2019학년도 TPN 모의고사

수학영역 가형 정답 및 풀이

01.③	02.②	03.⑤	04.①	05.④
06.③	07.②	08.①	09.①	10.②
11.X	12.⑤	13.⑤	14.⑤	15.①
16.④	17.④	18.④	19.③	20.④
21.②	22.[248]	23.[98]	24.[27]	
25.[2]	26.[11]	27.[12]	28.[470]	
29.[4]	30.[600]			

1. 출제의도 : 자연수와 집합의 분할을 할 수 있는가?

정답률 : 100 %

정답풀이 :

$5=1+4=2+3$

$\therefore P(5,2)=2$

$S(5,2)=2^{5-1}-1=16-1=15$

따라서 구하고자 하는 값은

$P(5,2)+S(5,2)=2+15=17$

정답 ③

2. 출제의도 : 지수함수와 로그함수, 다항함수와 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답률 : 100 %

정답풀이 :

$$\lim_{n\to 0}\frac{(e^{3n}-1)\sin n}{\ln(1+6n)n}=\lim_{n\to 0}\frac{e^{3n}-1}{n}\times\frac{n}{\ln(1+6n)}\times\frac{\sin n}{n}$$

$$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

정답 ②

3. 출제의도 : 타원의 성질을 통해 타원의 초점을 구할 수 있는가?

정답률 : 100 %

정답풀이 :

$\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{12^2}=12$

따라서 $F(12,0), F'(-12,0)$ 또는 $F(-12,0), F'(12,0)$이다.

따라서, 둘 중 어떤 경우를 선택하건 무관하게 $|\overline{FF'}|=24$이다.

정답 ⑤

4. 출제의도 : 삼각함수의 정적분을 구할 수 있는가?

정답률 : 90 %

정답풀이 :

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로, 주어진 정적분은 다음과 같다.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$=\left[-\ln|\cos x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(-\ln\frac{1}{2}\right)-\left(-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\ln\sqrt{3}$$

정답 ①

5. 출제의도 : 확률의 계산식에서 확률을 구할 수 있는가?

정답률 : 90 %

정답풀이 :

주어진 두 식과 조건을 통하여

$P(A)P(B)=\dfrac{1}{3}$임을 알 수 있고,

$P(A)=\dfrac{1}{2}$에서 $P(B)=\dfrac{2}{3}$이다.

따라서,

$$\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$$

정답 ④

6. 출제의도 : 주어진 벡터의 성분으로부터 원래의 벡터를 구할 수 있는가?

정답률 : 80 %

정답풀이 :

$\vec{a}+\vec{b}=(3,6)$로 $4\vec{a}+4\vec{b}=(12,24)$ 임을 알 수 있고, 이를 주어진 벡터식 $3\vec{a}-4\vec{b}=(2,4)$에 연립시키면,

$7\vec{a}=(14,28)$에서

$\vec{a}=(2,4), \vec{b}=(1,2)$ 이다.

따라서,

$|\vec{a}|+|\vec{b}|=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

정답 ③

7. 출제의도 : 매개변수를 이용한 도함수를 구할 수 있는가?

정답률 : 90 %

정답풀이 :

$\dfrac{dx}{dt}=2te^{t^2}+3$이고,

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t+1}{t^2+t+1}$이다.

따라서,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t+1}{t^2+t+1}}{2te^{t^2}+3}$$

이때 $t=1$을 대입하면,

$$\frac{\frac{2t+1}{t^2+t+1}}{2te^{t^2}+3}=\frac{\frac{3}{3}}{2e+3}=\frac{1}{2e+3}$$

정답 ②

8. 출제의도 : 여러 사항을 고려해야 하는 확률을 구할 수 있는가?

정답률 : 100 %

정답풀이 :

표를 그리면 쉽게 해결할 수 있다. 50명의 부사관이 맛이 있다고 하였으므로, 나머지 50명의 부사관은 맛이 없다고 대답하였다. 또한, 45명이 여성이므로, 55명은 남성 부사관이 된다.

	남자	여자	합계
맛있다	30명	20명	50명
맛없다	25명	25명	50명
합계	55명	45명	100명

따라서 구하고자 하는 확률은 전체 부사관 중 여성인 동시에 맛이 없다고 대답할 확률이므로,

$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

정답 ①

9. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용한 계산을 할 수 있는가?

정답률 : 70 %

정답풀이 :

$\cos^2\theta=\frac{1}{16}$이고 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

따라서 $\sin\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$이다.

또한,

$\tan\theta=\tan(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{15}$ 에서

$\tan\frac{\theta}{2}=t$로 두면.

$-\sqrt{15}=\frac{2t}{1-t^2}$

$\sqrt{15}t^2-\sqrt{15}=2t$

$\sqrt{15}t^2-2t-\sqrt{15}=0$

$\therefore t=\frac{1\pm 4}{\sqrt{15}}$

그런데 $\frac{3}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<\pi$ 라는 조건을 고려하면 $\tan\frac{\theta}{2}<0$ 이다.

$\therefore t=-\frac{3}{\sqrt{15}}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$

정답 ①

10. 출제의도 : 벡터의 분할을 이용한 넓이 계산을 할 수 있는가?

정답률 : 50 %

정답풀이 :

점 A를 원점으로 생각하고 주어진 두 벡터를 좌표화하면,

$\overrightarrow{AB}=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{AE}=(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

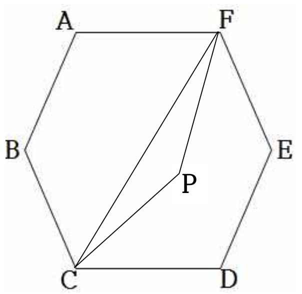
따라서,

$\overrightarrow{AP}=$

$(\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})+\frac{2}{3}\times\frac{3}{2},\frac{1}{2}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{2}{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$

$=(\frac{3}{4},-\frac{7\sqrt{3}}{12})$

이를 그림으로 표현하면,



이제 사다리꼴 ABCF의 넓이를 S_1, 삼각형 CFP의 넓이를 S_2로 두고 넓이를 구하자.

1) S_1 구하기

$S_1=(2+1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

2) S_2 구하기

$\overline{FC}$를 지나는 직선을 l이라고 하면,

$l:\ \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ 이다.

이때, 구하는 삼각형의 높이는 점 $P(\frac{3}{4},-\frac{7\sqrt{3}}{12})$와 직선 l 사이의 거리이다. 거리를 d로 두면,

$$d=\frac{\left|\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{7\sqrt{3}}{12}-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{\left|\frac{4\sqrt{3}}{12}\right|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\therefore S_2=2\times d\times\frac{1}{2}=d=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$S_1+S_2=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{11\sqrt{3}}{12}$

*** S_2를 구하는 다른 방법**

교과 외의 과정인 외적을 이용할 경우 S_2의 값을 좀 더 쉽게 구할 수 있다. 자신이 주어진 시간 내에 벡터 문제를 풀 자신이 없다면 한 번 참고해 보도록 하자.

벡터 $\overrightarrow{PF}$와 벡터 $\overrightarrow{PC}$를 성분으로 표현하면,

$\overrightarrow{PF}=(\frac{1}{4},\frac{7\sqrt{3}}{12})$

$\overrightarrow{PC}=(-\frac{3}{4},-\frac{5\sqrt{3}}{12})$

이때 $S_2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF}\times\overrightarrow{PC}|$이다.

$$|\overrightarrow{PF}\times\overrightarrow{PC}|=\left|(\frac{1}{4},\frac{7\sqrt{3}}{12})\times(-\frac{3}{4},-\frac{5\sqrt{3}}{12})\right|$$

$$=\left|(0-0,0-0,-\frac{5\sqrt{3}}{48}-(-\frac{3}{4}\times\frac{7\sqrt{3}}{12})\right|$$

$$=\left|(0,0,\frac{16\sqrt{3}}{48})\right|=\left|(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3})\right|$$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore S_2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF}\times\overrightarrow{PC}|=\frac{\sqrt{3}}{6}$

정답 ②

11. 출제의도 : 로그함수가 들어간 미적분을 할 수 있는가?

정답률 : 100 % 문제 오류

정답풀이 :

주어진 $f(x)$에 대한 첫 번째 식을 통해 다음을 알 수 있다.

$f'(x)=\frac{2}{x}f(x)$

양변을 $f(x)$로 나누고 적분하면,

$\ln|f(x)|=2\ln|x|+C$

(C는 적분상수)

여기서 $f(x)>1$이므로,

$\ln f(x)=2\ln|x|+C$

(C는 적분상수)

$f(x)$에 관한 두 번째 식을 고려하면,

$g(x)=|x|$

$\therefore g(4)=|4|=4$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 정규분포의 기본적인 특성을 이해하고 있는가?

정답률 : 70 %

정답풀이 :

3학년 12반 학생들은 평균적으로 2장, 표준편차 0.5장으로 학생부종합전형을 지원했으므로, 이는 정규분포 $N(2, 0.5^2)$를 따른다.

따라서,

$P(1 \le X \le 3)$

$=P(\frac{1-2}{0.5} \le Z \le \frac{3-2}{0.5})$

$=P(-2 \le Z \le 2)$

$=2P(0 \le Z \le 2)=2\times 0.4772$

$=0.9544$

정답 ⑤

13. 출제의도 : 실생활에 적용된 이차곡선 문제와 경우의 수 복합 문제를 해결할 수 있는가?

정답률 : 10 %

정답풀이 :

이동거리가 12가 되기 위해서는 초점이 점 B,C이면서 점 A,P,Q, D,R,S를 지나는 타원 위의 점을 지나고, 두 초점을 지나는 동시에 $\overline{AB}, \overline{CD}$를 지나가는 경로를 선택하면 된다. 이러한 경로를 모두 세면 34개의 경로임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 $34+4=38$이다.

정답 ⑤

14. 출제의도 : 쌍곡선의 성질을 이용하여 자취의 방정식을 구할 수 있는가?

정답률 : 20 %

정답풀이 :

곡선도로망에서 출발하는 사람의 위치를 점 A(a,b) 로 두고, 다른 한 사람의 위치를 점 B(0,3)으로 두면, 점 A는 다음을 만족한다.

$\frac{a^2}{25}-\frac{b^2}{144}=1\ (a \le -5)$ $\cdots$ ㉠

이때 두 사람이 서로를 향해 일직선으로 같은 속도로 이동하기 때문에, 두 사람이 만나는 점은 두 사람의 출발점의 중점이다.

이 지점을 C로 두면, 점 C의 위치는 다음과 같다.

$C(\frac{0+a}{2}, \frac{b+3}{2})\ (a \le -5)$

여기서 a,b를 다음과 같이 치환하자.

$x=\frac{a}{2}, y=\frac{b+3}{2}\ \ (a \le -5)$ $\cdots$ ㉡

관계식 ㉡을 식 ㉠에 대입하면 다음을 얻는다.

$\frac{4x^2}{25}-\frac{(2y-3)^2}{144}=1\ (x \le -\frac{5}{2})$

이를 주어진 식의 형태로 정리하면,

$(y-\frac{3}{2})^2=36(\frac{4x^2}{25}-1)(x \le -\frac{5}{2})$

위 식은 문제에서 주어진 식에서 $t=36$을 대입한 형태와 동일하다. 따라서 구하는 답은 36이다.

정답 ⑤

 # 출제자의 코멘트

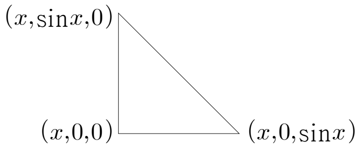
사실 세트형 문항은 최근의 수능 유형에는 잘 나오지 않고 있으며, 이렇게 실생활에 적용하는 문제도 잘 나오지 않고 있다. 그럼에도 불구하고 출제한 이유는 본수능때 신유형의 문제가 나왔을 때 당황하지 않는 연습을 하도록 하기 위함이다.

15. 출제의도 : 주어진 함수들로 둘러싸인 부분의 부피를 구할 수 있는가?

정답률 : 20 %

정답풀이 :

점 $(x, \sin x, 0)$와 점 $(x, 0, \sin x)$을 yz평면으로 펴서 보면,



이 직각삼각형의 넓이를 $f(x)$로 두면, $f(x)=\frac{\sin^2 x}{2}$이다.

여기서 구하는 부분의 부피는

$4\int_0^{\pi} f(x)dx=4\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}dx$

$=2\int_0^{\pi}\sin^2 x dx$ $\cdots$ ㉠

그런데,

$2\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = 2\int_0^{\pi}\sin x \sin x dx$

$=2\left\{[-\sin x \cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos^2 x dx\right\}$

$=2\left\{\pi-\int_0^{\pi}\sin^2 x dx\right\}$이므로,

$2\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=2\pi-2\int_0^{\pi}\sin^2 x dx$

$\therefore 4\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = 2\pi$ $\cdots$ ㉡

따라서, 구하는 부분의 부피는 ㉠과 ㉡에 의하여 π이다.

정답 ①

16. 출제의도 : 매개변수로 정의된 함수에 관한 까다로운 문제를 해결할 수 있는가?

정답률 : 30 %

이 문제의 정답풀이는 여러분들께 맡깁니다. 자력으로 해결해보시기 바랍니다.

만약 이 문제를 풀이하신 분이 계신다면 인터넷에 올려서 다른 수험생 여러분들에게 도움을 주시기 바랍니다.

정답 ④

17. 출제의도 : 접선의 개수를 통해 주어진 곡선의 방정식을 추론할 수 있는가?

정답률 : 30 %

정답풀이 :

$y^2=x^3+ax+b$를 음함수 미분하면,

$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+a}{2y}$

$x^2=y^3+ay+c$도 마찬가지로 음함수 미분하면,

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+a}$

이때, (α,β)에서 $\frac{dy}{dx}$는 동일하므로,

$\frac{2\alpha}{3\beta^2+a}=\frac{3\alpha^2+a}{2\beta}$

$9\alpha^2\beta^2+3a(\alpha^2+\beta^2)+a^2-4\alpha\beta=0$

여기서 (α,β)의 쌍은 유한개이므로, 위의 식을 완전제곱식의 형태로 고치면,

$(3\alpha\beta+a)^2+3a(\alpha\pm\beta)^2=0$또는

$(3\alpha\beta-a)^2+3a(\alpha\pm\beta)^2=0$이다.

이때, $a\ge 0$이고 $\alpha\beta$의 계수는 -4이므로, $a=\frac{1}{3}$이다.

따라서 위의 두 경우 중 가능한 경우는 다음과 같다.

$(3\alpha\beta-\frac{1}{3})^2+(\alpha-\beta)^2=0$

여기서 이를 만족하는 (α,β)는 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 또는 $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$이다.

1) $(\alpha,\beta)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 일 경우

원식에 대입하면, $b=c=-\frac{1}{27}$

2) $(\alpha,\beta)=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ 일 경우

원식에 대입하면, $b=c=\frac{7}{27}$

$\therefore [100|b+c|]=7 \text{ or } 51$

$\therefore 7+51=58$

정답 ④

 # 검토자의 코멘트

수학에, 특히 정수론에 관심이 많은 수험생이라면 이 문제의 곡선이 매우 익숙할 것이다.

이 문제에서 주어진 곡선은 대학교(대학원) 정수론에서 쓰는 타원 곡선(Elliptic Curve)이라는 것으로, 그 중 바이어슈트라스 표준꼴이 다음과 같은 모양이다.

$$y^2=x^3+ax+b$$

그렇다고 출제자보고 고등학교 범위를 넘어서서 문제를 냈다고 비판하지는 말자. 왜냐하면 이 사실을 안다고 해도 주어진 문제의 해결에는 도움이 되지 않는다. 이 문제는 타원곡선의 특성을 이용해 해결하는 문제가 아니기 때문이다.

18. 출제의도 : 주어진 함수에 대한 조건을 이용하여 까다로운 문제를 해결할 수 있는가?

정답률 : 20 %

정답풀이에 들어가기 전에, 배경지식 없이 이 문제를 자력으로 제한시간 내에 푼 수험생에게 진심으로 존경을 표한다.

정답풀이:

조건 (다)를 먼저 고려해보자.

$f'_n(x)=-\frac{1}{x^{n-1}}(e^{-\frac{1}{x}}-x^{2n-2}e^{-x})$

$=\frac{1}{x^{n-1}}(x^{2n-2}e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}})$

$=x^{1-n}(x^{2n-2}e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}})$

$=x^{n-1}e^{-x}-x^{1-n}e^{-\frac{1}{x}}$

$=x^{n-1}e^{-x}-(\frac{1}{x})^{n-1}e^{-\frac{1}{x}}$

이는 x에 대하여 미분된 꼴이므로, 원래 식을 추론하면 다음과 같다.

$f_n(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}t^{n-1}e^{-n}dt$

그런데, 이 함수는 n,x라는 두 개의 변수가 존재하여 상대하기가 매우 까다롭다. 따라서 우선 $x\to\infty$라는 조건을 가정하고 함수에 접근하는 것으로 하자.

이 함수의 해석을 위해 우선 아래의 <정리 1>을 증명하자.

<정리1>

$$\lim_{x\to\infty}f_{n+1}(x)=\lim_{x\to\infty}nf_n(x)$$

증명 :

부분적분을 하면,

$\lim_{x\to\infty}f_{n+1}(x)=\lim_{x\to\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}t^ne^{-t}dt$

$=\lim_{x\to\infty}[-t^ne^{-t}]_{\frac{1}{x}}^{x}$

$+\lim_{x\to\infty}n\int_{\frac{1}{x}}^{x}t^{n-1}e^{-t}dt$

여기서

$\lim_{x\to\infty}[-t^ne^{-t}]_{\frac{1}{x}}^{x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{(-x^ne^{-x})-(-(\frac{1}{x})^ne^{-\frac{1}{x}})\right\}$

$=(-0)-(-0)=0$

따라서

$\lim_{x\to\infty}f_{n+1}(x)=\lim_{x\to\infty}[-t^ne^{-t}]_{\frac{1}{x}}^{x}$

$+\lim_{x\to\infty}n\int_{\frac{1}{x}}^{x}t^{n-1}e^{-t}dt$

$=\lim_{x\to\infty}n\int_{\frac{1}{x}}^{x}t^{n-1}e^{-t}dt$

$=\lim_{x\to\infty}nf_n(x)$

$\therefore \lim_{x\to\infty} f_{n+1}(x) = \lim_{x\to\infty} n f_n(x)$

Q.E.D

한편, 이 정리를 $n=1$일 때에 적용하면,

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} t^{1-1} e^{-t} dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} e^{-t} dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left\{(-e^{-x}) - (-e^{-\frac{1}{x}})\right\}$$

$$= (-0) - (-e^{0}) = 1$$

즉, $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = 1$이다.

여기서 <정리 1>을 적용하면,

$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 1 \times \lim_{x\to\infty} f_1(x) = 1$

$\lim_{x\to\infty} f_3(x) = 2 \times \lim_{x\to\infty} f_2(x) = 2$

$\lim_{x\to\infty} f_4(x) = 3 \times \lim_{x\to\infty} f_3(x) = 6$

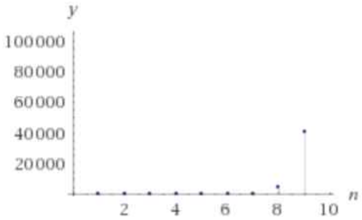
$\vdots$

따라서, $\lim_{x\to\infty} f_n(x)$는 n이 양수일 때, 다음이 성립한다.

$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = (n-1)!$ $\cdots$ ㉠

일일이 $\lim_{x\to\infty} f_n(x)$를 쓰기에는 불편하므로, 이제부터 $g(n)$이라고 두고 계속 해석해보자.

$g(n)$은 지금까지 밝힌 바에 따르면 다음과 같은 형태이다.



여기서 $g(n)$을 n으로 미분한 함수 $g'(n)$을 생각해보자.

우선 $h(n)$을 다음과 같이 정의하자.

$$h(n) = \frac{d}{dn} \ln(g(n))$$

따라서,

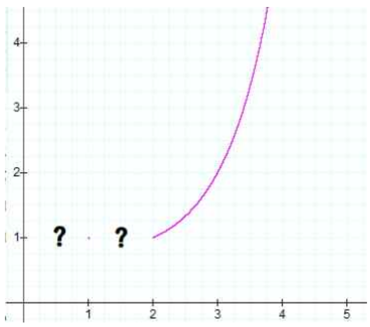
$$h(n) = \frac{d}{dn} \ln\{ng(n-1)\} (\because ㉠)$$

$$= \frac{d}{dn}\{\ln n + \ln g(n-1)\}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{g'(n-1)}{g(n-1)}$$

$$= \frac{1}{n} + h(n-1)$$

이때, 앞에 주어진 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty} f_n(x)$는 구간 (2,3) 내에서 연속이고 증가한다는 조건에 의해 $h(n)$은 무조건 구간 $(2,\infty)$에서 양수이면서 미분가능하고, 극값이 존재하지 않는다. 따라서, 구간 $(1,\infty)$에서 $g(n)$의 그래프는 다음과 같다.



(여기서 ? 표시는 아직 알지 못하여 그릴 수 없는 부분이다.)

따라서, 구간 $[2,2017]$내의 실수 n에 대하여 $g(n)$은 전 구간에서 증가한다.

이제, 구간 $[-2017,0]$에서의 $g(n)$을 고려해보자.

<정리 1>에서,

$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} (n-1) f_{n-1}(x)$

여기서 양변을 $n-1$으로 나누어 주면,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)}{n-1} = \lim_{x\to\infty} (n-2) f_{n-2}(x)$$

여기서 같은 방식으로 양변을 $(n-2)$로 나누어 주면,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)}{(n-1)(n-2)} = \lim_{x\to\infty} (n-3) f_{n-3}(x)$$

이런 방식으로 계속해서 나누어 주면, $n>0$일 때 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \frac{\lim_{x\to\infty} f_n(x)}{(n-1)(n-2)\times\cdots\times(k+1)k}$$

이때, k가 어떤 정수이건 음수이면 무조건 우변이 발산함을 알 수 있다. 따라서, 모든 음의 정수인 k에 대하여 $\lim_{x\to\infty} f_k(x)$는 미분불능이다.

이 함수를 더 깊이 해석하면 더 흥미로운 사실을 많이 찾을 수 있지만, 문제풀이를 위해서는 여기까지만 해석해도 충분하다. 그러므로 여기까지만 해석하고 문제를 풀어보자.

ㄱ. 구간 $(0,\infty)$내의 모든 실수 x에 대해서 $f_n(x) < 2017$임을 만족하는 n을 찾기 위해서는 그 n이, $\lim_{x\to\infty} f_n(x) < 2017$ 를 만족하는 것으로 충분하다.

n이 정수일 때, ㉠에 의하여 $(n-1)! < 2017$를 만족하는 정수 n을 구하면 된다. 따라서 이를 만족하는 정수 n은 1,2,3,4,5,6,7이며, 이를 모두 더하면 28이다.

(참)

ㄴ. 위에서 모든 음의 정수에서는 $\lim_{x \to \infty} f_n(x)$이 발산하므로, 구간 $[-2017, 0]$에서는 최소한 2017개의 점에서 미분불능이다.

한편, 위에서 구간 $[2, 2017]$ 내의 실수 n에 대하여 $\lim_{x \to \infty} f_n(x)$이 항상 증가하므로, 해당 구간 내에서 증가하지 않는 점은 존재하지 않는다. 따라서 최소한 이 두 경우의 합은 2017 이상이다.

(거짓)

ㄷ. <정리 1>에서,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f_n(x)}{2 f_{n-2}(x)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{n(n-1) f_{n-2}(x)}{f_{n-2}(x)}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} = {}_nC_2$$

(참)

따라서 참인 보기는 ㄱ,ㄷ 이다.

정답 ④

 # 출제자의 코멘트

이 문제를 제한시간 내에 올바르게 풀이한 수험생은 정말로 수학에 대한 배경지식이 많거나, 그게 아니라면 수능을 대비해서 더 이상 공부할 필요가 없을 정도의 경지에 다다랐다고 생각된다.

문제에서 제시된 함수 중 x에 대한 극한을 가진 $\lim_{x \to \infty} f_n(x)$ 를 풀어서 쓰면 다음과 같다.

$$\lim_{x \to \infty} f_n(x) = \lim_{x \to \infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} t^{n-1} e^{-t} dt$$

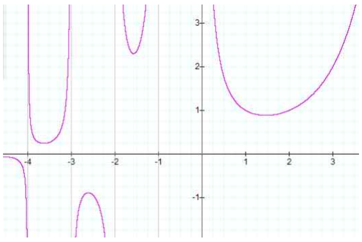
$$= \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

맨 마지막으로 나온 저 식은 대학교의 공학계열이나 자연계열에 진학하면 흔히 볼 수 있을 함수로, 감마 함수(gamma Function) 또는 계승함수(Factorial Function)이라고 하며, 다음과 같이 정의한다.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

이 함수의 특징은 자연수에서만 정의되는 팩토리얼(계승)을 실수 범위, 나아가서 복소수 범위까지 확장할 수 있도록 하는 함수라는 것이다. (실제로 이는 위의 풀이에서 <정리1> 과 ㉠을 통해 증명하였다.) 사실 출제자가 이 문제를 낸 목적도 고등학교 수준에서 감마 함수의 성질을 분석하는 문제를 내 보고 싶었던 점도 있었다.

마지막으로, 실제로 문제의 함수를 해석하면서 약간의 그래프를 그려보았지만, 수학적으로 더 흥미를 가진 수험생들을 위해 완벽한 형태의 감마 함수의 그래프를 그려놓겠다.



19. 출제의도 : 공간벡터와 확률의 복합문제를 풀이할 수 있는가?

정답률 : 30 %

정답풀이 :

도형X: $B'F'G'E' - O'A'D'C'$, $\overline{B'O'}$와 $\overline{G'D'}$가 평면 Q와 만나 생기는 교점 M_1, M_2를 이어서 이를 연장하면, 직선 D가 된다.

여기서 M_1의 좌표를 θ_1, θ_2를 이용하여 표현하면,

$M_1(1 - \cos\theta_1 - \sin\theta_1$
$, 1 + \tan^2\theta_2(\cos\theta_1 + \sin\theta_1)$
$, 1 - \cos\theta_1 + \sin\theta_1)$

(* 이 부분의 계산은 도형 X와 평면 Q를 각각 각도로 표현해야 한다고 생각하는 데에 성공했다면 쉽게 할 수 있으므로 생략한다.)

따라서, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{x^2}{4} = \frac{2}{(\cos\theta_1 + \sin\theta_1)^2} + \tan^2\theta_2$$

$$\therefore m = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^2 d\theta_2 d\theta_1}{\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{8}{\pi}(2 + \sqrt{3}) - 4$$

따라서 $a + b + c = 8 + 2 + 4 = 14$.

정답 ③

20. 출제의도 : 매우 복잡한 경우의 수 문제를 주어진 불완전한 풀이를 통해 해결할 수 있는가?

정답률 : 20 %

정답풀이 :

처음 그리기를 시작하는 점부터 시계방향으로 삼각형의 각 점을 A, B, C라 하면

$f(n)$=(A n+1개, B n개, C n개를 같은 알파벳끼리는 이웃하지 않고 양 끝에 A가 오는 경우의 수(=a_n))×(A, B, C가 나열되었을 때 도형의 선을 선택해 그리는 경우의 수(=b_n))

a_n은 A n+1개를 나열한 뒤 A 사이의 공간 n개에 B, C를 알파벳끼리 겹치지 않게 하나 이상 배열하는 경우의 수와 같다.

각각의 공간에 배열된 B와 C의 개수의 합이 홀수 개인 공간의 개수를 2k 라 하면,

$(0 \le k \le [\frac{n}{2}], k$는 자연수)

$a_n(k) =$ (가)

((가) $={}_nC_{2k}\times{}_nH_k\times 2^{n-2k}\times{}_{2k}C_k$)

즉 $a_n=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}$(가)

한편 b_n은 나열된 A, B, C로 가운데 삼각형의 변을 따라 움직이는 경우의 수가 (나) ((나)$=(n!)^3$)이고, 도중 각 꼭짓점 바깥에 있는 삼각형을 지나가는 경우의 수가 (다) ((다)$={}_{2n}P_n\times{}_{2n-1}P_n\times{}_{2n-1}P_n\times 2^{3n}$) 이므로,

b_n=(나)×(다)

따라서, $f(n)=a_n\times b_n$ 이다.

구하고자 하는 모든 함수의 식을 구했으므로, 주어진 식을 계산만 하면 된다.

$g_8(3)={}_8C_6\times{}_8H_3\times 2^{8-6}\times{}_6C_3$

$=2^9\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7$

$h_1(5)=(5!)^3=2^9\cdot 3^3\cdot 5^3$

$h_2(3)={}_6P_3\times{}_5P_3\times{}_5P_3\times 2^9$

$=2^{16}\cdot 3^3\cdot 5^3$

이를 통해 주어진 가우스 식을 계산해주면 조금 계산량이 많지만 구하는 값이 223임을 어렵지 않게 구할 수 있다.

정답 ④

21. 출제의도 : 삼차함수의 성질과 평균값을 정리를 이용하여 주어진 함수의 방정식과 그 극값을 추론할 수 있는가?

정답률 : 0 %

정답풀이 :

우선, $g(1)=0$이고, $g'(x)>0$이라는 조건에 의해 $g(x)$는 전 구간에서 증가하는 함수이다.

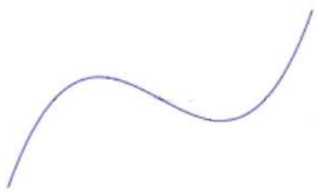
조건 <가>부터 먼저 해석해보자.

$x\neq 1$일 때, 양변을 $g(x)$로 나누어 주면($g(x)$는 증가함수이므로, 이 함수의 실근은 1 외에 존재하지 않기 때문에 나누어 주어도 된다.), 다음이 성립한다.

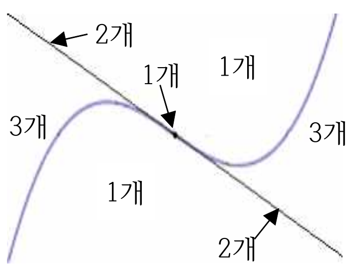
$$\frac{f(x)}{x-1}\neq f'(x)$$

이 식의 의미는 $f(x)$에 그은 접선 중, 기울기가 $\frac{f(x)}{x-1}$인 지점은 오직 1 뿐이라는 의미가 된다. 이를 이해하기 위해서 우선 삼차함수의 그래프의 개형을 생각해보자. 여기서는 최고차항이 1이고 $f'(x)=0$가 서로 다른 두 실근을 가지는 삼차함수에 대해서만 고려해보자. (중근을 가지거나 허근을 가지는 경우에도 아래 방법과 유사한 방법으로 풀 수 있다. 이 부분은 자력으로 해 보길 바란다.)

최고차항이 1이고 $f'(x)=0$가 서로 다른 두 실근을 가지는 삼차함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.



여기서 삼차함수의 성질에 의해, 주어진 삼차함수 주변에 위치한 점들은 다음의 수만큼 접선을 그을 수 있다.



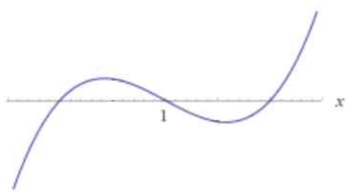
그런데, 주어진 문제에서 $f(x)$에 그은 접선 중 기울기가 $\frac{f(x)}{x-1}$인 지점은 오직 $x=1$ 1개뿐이라고 하였다. 이를 만족하기 위해서는 위에서 주어진 그림에 의해 $f(x)$가 $x=1$에서 변곡점을 가져야 한다.

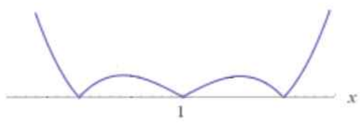
이제 조건 <나>를 해석해보자.

$g(|f(x)|)=k$를 만족하는 x값이 오직 1개인 k가 존재하지 않는다는 의미는 $y=|f(x)|$의 그래프를 그렸을 때, 오직 1개의 x값에만 대응되는 y값이 존재하지 않음을 뜻한다. 따라서, $f(x)$는 반드시 셋 이상의 근을 가져야 한다.

마지막으로 조건 <다>를 해석해보자.

조건 <가>,<나>로부터 $f(x)$의 그래프와 $|f(x)|$의 그래프를 대략적으로 그려볼 수 있다. 대략적으로 그린 두 함수의 그래프는 다음과 같다.





이때 그래프에 의해 $g(|f(x)|)$의 극값은 5개임이 자명하고, 이에 의하여 다음이 성립한다.

$$a_5-a_1=5-1=4$$

따라서, $f(x)$의 두 근은 점 1을 중점으로 두고 서로에게서 4만큼 떨어진 지점에 존재하므로, 두 근은 -1과 3이다.

$\therefore f(x)=(x-1)(x+1)(x-3)$

$=x^3-3x^2-x+3$

a_2a_4를 구하기 위해 미분하면,

$f'(x)=3x^2-6x-1$

$\therefore a_2 a_4 = -\dfrac{1}{3}$

따라서,

$$\int_2^4 f(x)dx+(2-n)a_2a_{n-1}$$

$$=\int_2^4 f(x)dx+\frac{1}{3}\cdot 3$$

$$=\int_2^4 x^3-3x^2-x+3\,dx+1$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_2^4+1$$

$$=4+1=5$$

정답 ②

 # 출제 비화

다른 출제진과 검토진은 이 문제를 깔끔하다고 굉장히 마음에 들어 하였으나, 정작 출제자 본인이 마음에 들어 하지 않아서 잘릴 뻔한 문제였다.

22. 출제의도 : 역함수의 성질을 이용하여 두 함수의 교점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답률 : 40 %

정답풀이 :

주어진 두 함수 $y=\log_2(x+a)$와 $y=2^x-a$는 서로 역함수 관계이다. 따라서 이 교점은 $y=x$ 위에 존재한다. 따라서 교점의 좌표를 $P(\alpha,\alpha)$로 두면,

$\alpha^2+\alpha^2=(8\sqrt{2})^2$

$\therefore \alpha=8$, $P(8,8)$

여기서 $y=2^x-a$가 점 P를 지나므로 위 식에 값을 대입하면,

$8=2^8-a$ 에서 $a=256-8=248$

정답 248

23. 출제의도 : 조건이 주어진 배열을 해결할 수 있는가?

정답률 : 50 %

정답풀이 :

경우를 나누어 생각하자.

1) 맨 끝에 흰 돌이 오는 경우

$$\frac{8!}{4!4!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=14\cdot 5=70$$

2) 맨 끝에 검은 돌이 오는 경우

$$\frac{8!}{6!2!}=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=4\cdot 7=28$$

따라서 $70+28=98$

정답 98

24. 출제의도 : 두 점의 외분점의 좌표를 외분점의 정의를 통해 구할 수 있는가?

정답률 : 10 %

정답풀이 :

$P(e,y,a)=P(6.5,0.5,6.5)$

$\therefore 2(6.5+0.5+6.5)=2\times 13.5=27$

정답 27

 # 덧붙이는 말

답안 오류를 지적해주신 [한두한] 님과 [진정해라]님께 진심으로 감사드립니다.

25. 출제의도 : 삼각함수의 극한을 통해 다른 함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답률 : 50 %

정답풀이 :

$\lim\limits_{\sin x\to 0}$ 는 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$에 의해 $\lim\limits_{x\to 0}$ 로 치환할 수 있다.

$$\therefore \lim_{\sin x\to 0}\frac{2}{\sin x}\ln\left(\frac{\tan x+x^2}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}=1$ 이므로,

$$(\text{준식})=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln\left(\frac{x+x^2}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(1+x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}$$

$$=2$$

정답 2

26. 출제의도 : 정규분포의 원리를 심화적으로 잘 이해하고 있는가?

정답률 : 0 %

정답풀이 :

주어진 두 식을 비교해보자.

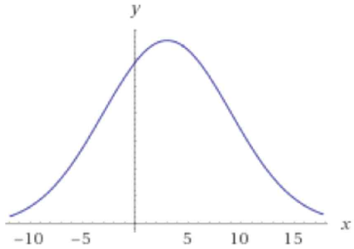
$$\int_0^\gamma \frac{a}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{72}}\ (\gamma\geq 0)$$

$$g(X)=\frac{1}{\Delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(X-m)^2}{2\Delta^2}}$$

이때 a를 무시하면, 적분식 안의 형태는 정규분포의 형태와 동일해야 한다. 따라서, $m=3, \Delta=6$이다.

이제 주어진 문제를 조금 더 깊이 생각해보자. 문제에서 근하가 쏜 화살이 과녁 어딘가에 맞을 것이 자명하므로(넓이가 무한이니까), 화살이 맞은 장소와 과녁의 중심 사이의 거리에 대한 모든 확률을 더하면 1이 되어야 한다. 그런데 이 문제에서 주어진 적분식은 정규분포 $N(3,6^2)$을 따르는 확률밀도함수에 대한 적분식이다. 즉, 화살이 맞은 지점과 과녁의 중앙과의 거리가 0 미만인 경우는 존재하지 않는다. 따라서, 정규분포를 '잘라' 주어야 한다.

우선 구하는 정규 분포를 그리면 대략 이런 형태이다.



여기서 0 이하의 부분을 전부 지워야 한다. 이는 $P(\gamma\leq 0)$의 값을 구하여 빼는 것과 동일하다. 이를 구하기 위해 주어진 조건을 이용하자.

$P(x \ge 6) = 0.5 - \int_3^6 g(x)dx$에서

$\int_3^6 g(x)dx = 0.5 - P(x \ge 6)$

$= 0.5 - P(Z \ge \frac{6-3}{6})$

$= 0.5 - P(Z \ge \frac{1}{2})$

$= 0.5 - 0.3 = 0.2$

그런데 여기서

$\int_3^6 g(x)dx = \int_0^3 g(x)dx$

따라서,

$P(x \ge 0) = 0.5 - \int_0^3 g(x)dx$

$\therefore P(x \ge 0) = 0.5 - 0.2 = 0.3$

따라서 전체 확률에서 0.3만큼을 뺀 0.7이 a를 무시하고 구한 적분식의 값이다. 그런데 모든 확률의 합은 반드시 1이어야 하므로, a와 적분식의 곱은 반드시 1이어야 한다. 따라서, $a = \frac{10}{7}$이 성립한다.

따라서, 구하고자 하는 값은 다음의 과정을 통하여 구할 수 있다.

$a \times \int_0^6 \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)}{72}} dx$

$= \frac{10}{7} \times P(0 \le \gamma \le 6)$

$= \frac{10}{7} \times P(\frac{0-3}{6} \le Z \le \frac{6-3}{6})$

$= \frac{10}{7} \times P(-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{1}{2})$

$= \frac{10}{7} \times 2P(0 \le Z \le \frac{1}{2})$

$= \frac{10}{7} \times 2 \times \frac{1}{5} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

여기서 $p = 7, q = 4$ 이므로, $p + q = 7 + 4 = 11$ 이다.

정답 11

27. 출제의도 : 각을 이용하여 구하고자 하는 좌표와 넓이를 표현하고, 이들을 이용한 극한을 구할 수 있는가?

정답률 : 0 %

정답풀이 :

점 O_2에서 $\overline{PQ}$에 수선을 내려 $\overline{PQ}$와의 교점을 점 H라고 하자. 여기서부터는 $\overline{O_2H}$의 기울기를 m이라고 표현하자.

$P(4\cos\theta, 4\sin\theta)$이므로,

$\overline{PQ} : y = -\frac{1}{m}(x - 4\cos\theta) + 4\sin\theta$

$\therefore x + my - 4\cos\theta - 4m\sin\theta = 0$

한편,

$\overline{O_2H} : \frac{1 - 4\cos\theta - 4m\sin\theta}{\sqrt{m^2+1}} = 3$

에서 어떤 α에 대하여 $\tan\alpha = m$으로 두면,

$f(\theta) = 4\cos(2\alpha - \theta)$

이제 α를 m에 대한 식으로 고치고 식을 정리하면,

$f(\theta) = \frac{1-m^2}{1+m^2}\cos\theta + \frac{2m}{1+m^2}\sin\theta$

$S(\theta) = 8\theta$

이제 m을 θ에 대하여 표현해주고 정리하면 된다. 정리하고 나면 $\lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)^2}{4\cos\theta - f(\theta)} = 12$ 임을 어렵지 않게 구할 수 있다.

정답 12

28. 출제의도 : 실생활에 적용된 순서가 있는 배열의 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답률 : 0 %

정답풀이 :

주어진 조건에 의하여 문제지를 구매할 수 있는 경우는 다음 3가지이다.

1) 국어, 수학, 영어, 한국사, 사회탐구만을 구입하는 경우

2) 국어, 수학, 영어, 한국사, 과학탐구만을 구입하는 경우

3) 국어, 수학, 영어, 한국사, 사회탐구 1권, 제2외국어 1권을 구입하는 경우

이제 경우를 나누어 각각을 구하도록 하자.

1)의 경우

사회탐구, 한국사는 서로 순차적으로 색이 바뀌는 위치에 있고, 나머지 영어, 국어, 수학도 서로 순차적으로 색이 바뀌는 위치에 있다. 따라서, 사회탐구와 한국사를 각각 a, b로 두고, 영어, 국어, 수학을 각각 1,2,3으로 두면, 주어진 문제는 다음과 같이 분리해서 경우의 수를 구할 수 있다.

(가) $1,1,2,3,a,b$로 배열하지 않는 경우와 $1,2,3,3,a,b$로 배열하지 않는 경우.

구하는 경우의 수는 포함-배제의 원리를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$2 \cdot \frac{1}{2}\{6! - (4 \cdot 5! \cdot 2) + (3 \cdot 4! \cdot 2 + 3 \cdot 4! \cdot 2^2) - (3 \cdot 3! \cdot 2^2)\}$

$= 120$

(나) $1,2,2,3,a,b$로 배열하지 않는 경우

구하는 경우의 수는 (가)와 같은 방법으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$2 \cdot \frac{1}{2}\{6! - (5 \cdot 5! \cdot 2) + (4 \cdot 4! \cdot 2 + 6 \cdot 4! \cdot 2^2) - (4 \cdot 3! \cdot 2 + 4 \cdot 3! \cdot 2^2 + 2 \cdot 3! \cdot 2^3) + (4 \cdot 2! \cdot 2^2)\} = 80$

(다) $1,2,3,a,a,b$로 배열하지 않는 경우

(가)와 같은 방법으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$\frac{1}{2}\{6! - (4 \cdot 5! \cdot 2) + (2 \cdot 4! \cdot 2 +$

$4 \cdot 4! \cdot 2^2)-(4 \cdot 3! \cdot 2^2)+(1 \cdot 2! \cdot 2^2)\} = 76$

따라서 1)의 경우에 구하는 경우의 수는 276가지이다.

2)의 경우

영어, 국어, 수학, 과학탐구는 서로 순차적으로 색이 바뀌는 위치에 있고, 한국사는 어느 것과도 순차적으로 배열될 수 없다. 따라서, 한국사를 x로 두고, 영어, 국어, 수학이랑 과학탐구를 각각 1,2,3,4로 두면 주어진 문제는 다음과 같이 분리해서 경우의 수를 구할 수 있다. 방법은 1)의 경우와 동일하므로, 서술하지 않고 수식만 써 놓는다.

(가) $1,1,2,3,4,x$로 배열하지 않는 경우와 $1,2,3,4,4,x$로 배열하지 않는 경우.

$\frac{1}{2}\{6!-(4 \cdot 5! \cdot 2)+(4 \cdot 4! \cdot 2+2 \cdot 4! \cdot 2^2)-(2 \cdot 3! \cdot 2)+(1 \cdot 3! \cdot 2^2)\} = 48$

(나) $1,2,2,3,4,x$로 배열하지 않는 경우와 $1,2,3,3,4,x$로 배열하지 않는 경우.

$2 \cdot \frac{1}{2}\{6!-(5 \cdot 5! \cdot 2)+(6 \cdot 4! \cdot 2+4 \cdot 4! \cdot 2^2)-(6 \cdot 3! \cdot 2+3 \cdot 3! \cdot 2^2)+(2^2 \cdot 2! \cdot 2)\} = 64$

따라서 2)의 경우에 구하는 경우의 수는 112가지이다.

3)의 경우

사회탐구와 한국사, 제2 외국어, 영어, 국어, 수학 전부 서로 순차적으로 색이 바뀌는 위치에 있다. 따라서, 사회탐구부터 순서대로 1,2,3,4,5,6으로 두면 주어진 문제는 다음과 같이 분리해서 경우의 수를 구할 수 있다. 방법은 1)의 경우와 동일하나, 이번에는 단 하나의 경우밖에 없다.

※ 1,2,3,4,5,6으로 배열하지 않는 경우

$6!-(5 \cdot 5! \cdot 2)+(4 \cdot 4! \cdot 2+6 \cdot 4! \cdot 2^2)-(3 \cdot 3! \cdot 2+1 \cdot 3! \cdot 2^3+6 \cdot 3! \cdot 2^2)+(2 \cdot 2! \cdot 2+1 \cdot 2! \cdot 2^2+1 \cdot 2! \cdot 2^2)-(1 \cdot 1! \cdot 2) = 82$

따라서 3)의 경우의 구하는 경우의 수는 82가지이다.

따라서 구하는 모든 경우의 수는 $276+112+82=470$이다.

정답 470

29. 출제의도 : 공간벡터에 의해 생기는 각에 대한 식의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답률 : 0 %

정답풀이 :

$\angle AIE' = \alpha$로 두면,

$\overrightarrow{IA} = (-3,0,0)$

$\overrightarrow{ID'} = (12\cos\alpha, 12\sin\alpha, 6\sqrt{2})$

가 성립한다.

따라서,

$|\overrightarrow{IA}||\overrightarrow{ID'}|\cos\theta = -36\cos\alpha$

$\therefore \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\alpha$

여기서

$\overline{A'H} = \sqrt{378+54\cos\alpha}$

$\overline{EF'} = \sqrt{126+36\sin\alpha-18\cos\alpha}$

따라서,

$|\overline{A'H}|(-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\alpha) = |\overline{EF'}|$

이제 위에서 주어진 $\overline{A'H}$에 대한 식과 $\overline{EF'}$에 대한 식을 대입하면,

$\sqrt{378+54\cos\alpha}\,(-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\alpha)$

$= \sqrt{126+36\sin\alpha-18\cos\alpha}$

양변을 제곱하면,

$(378+54\cos\alpha)(\frac{4}{6}\cos^2\alpha)$

$= 126+36\sin\alpha-18\cos\alpha$

$\therefore (14+2\cos\alpha)\cos^2\alpha$

$= 7+2\sin\alpha-\cos\alpha$

이제 $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ 임을 이용하여 α를 구하면 되지만, 이 경우 육차방정식이 된다. 이런 문제에서 육차방정식을 풀라고 할 리는 없으므로, 직관적으로 특수각으로 접근하여 식에 다음을 집어넣어 보자.

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ or $\alpha = \frac{\pi}{4}$ or $\alpha = \frac{\pi}{3}$

이를 만족하는 경우는 $\alpha = \frac{\pi}{4}$인 경우뿐이다. 이를 통해 $\cos\theta$를 구하면 다음과 같다.

$\cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

따라서, $p+q=3+1=4$이다.

정답 4

30. 출제의도 : 주어진 함수의 미분가능성을 이용하여 원래 함수의 성질을 추론할 수 있는가?

정답률 : 0 %

정답풀이 :

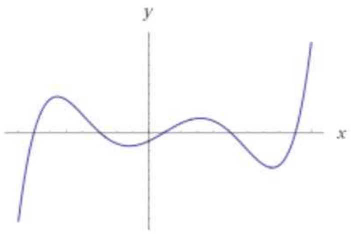
$g(x)$의 실근의 개수가 m개이면 $f(x)$의 실근의 개수 역시 m개임을 $g(x)$에 관한 다음 식을 통해 알 수 있다.

$\{g(x)\}^2 = |f(x)|$ … ㉠

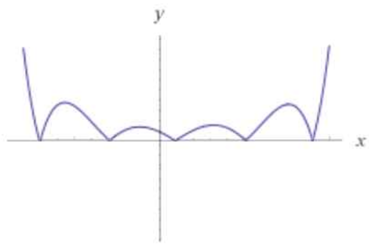
또한, $h_n(x)$가 연속함수이고, l은 $h_n(x) = \frac{|f(x)|}{(x-t_n)^n}$의 실근의 개수라는 조건에 의하여 $l \le m$이다. 따라서 l의 최댓값은 m이

다.

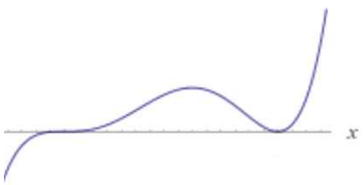
이제 $g(x)$의 그래프를 생각해보자. $g(x)$는 연속함수라서, $f(x)$의 그래프가 다음과 같다고 가정하면,



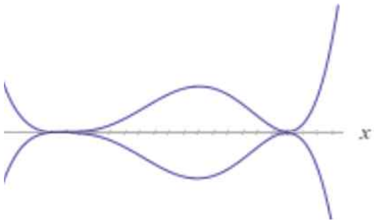
$g(x)$의 그래프는 ㉠에 의해 다음과 같다.



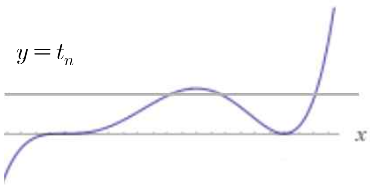
이때, 그래프가 뾰족해지는 부분이 생기면 $g(x)$가 전 구간에서 미분가능하다는 조건에 모순된다.
따라서, $g(x)$는 $f(x)$가 음수에서 양수가 될 때, 그 사이에 변곡점이 존재하는 동시에 x축 위에 변곡점이 위치해야 존재하는 함수이다.
따라서, 대략적인 $f(x)$의 그래프는 다음과 같은 꼴일 것이다.



여기서 a_n이 홀수일 때만 $h_n(x)$가 전 구간에서 미분가능하다는 조건의 의미를 해석해보자. $g(x)$의 그래프의 가능한 궤적은 다음과 같다.

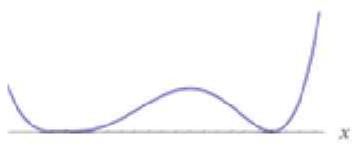


여기서는 이 중 아무거나 하나의 궤적인 $\sqrt{f(x)}$ 를 예시로 들어서 계속 풀이해 보자. $g(x)$의 그래프와 $y=t_n$을 동시에 고려하면,



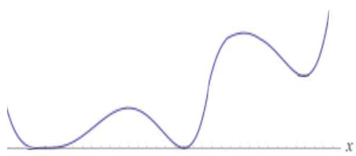
이때, 주어진 조건은 그림과 같이 어떤 수 t_n에 대해 $g(x)$과의 교점이 홀수 개 생겼을 때만 $h_n(x)$가 미분가능하다는 의미로 해석할 수 있다.

이제 문제로 넘어가서, p는 m과 α에 대한 함수로 나타낼 수 있다고 주어졌다. 여기서 t_n이 홀수인 점이 무한개 존재해서는 안 되므로, 처음의 $\sqrt{f(x)}$를 $g(x)$의 궤적으로 둔 가정이 잘못되었다는 것을 알 수 있다. 따라서, $g(x)$의 그래프는 다음과 같은 꼴이다.



여기서 만약 실근의 개수가 m개라면 p가 $g(x)$의 극값을 의미하는데, 이는 p가 $2m$에 대한 어떤 일차함수의 꼴로 나타남을 의미한다. 그리고, 여기서 $g(x)$의 그래프를 생각하면 극값이 최소 $2m-1$개 임을 알 수 있다.

그런데, 여기서 α를 고려하면, $g(x)$는 다음과 같이 극값이지만 x축과 만나지 않는 점도 존재할 수 있음을 고려해야 한다.



이때 추가되는 근의 개수가 반드시 짝수이므로, 반드시 2α에 대한 어떤 일차함수의 꼴로 나타난다.

이제 $h_n(x)$를 보면, $h_n(x)$가 a_n이 홀수일 때 전 구간에서 미분가능하다 하였으니, l이 m이 되기 위해서는 $x=t_n$이 성립할 때 $h_n(t_n)=0$이어야 한다. (만약 그렇지 않을 경우에는 미분불능이다.) 따라서 다항함수 $f(x)$의 꼴은 $(x-t_n)^{n+\beta}$의 꼴이다. 여기서 β는 1 이상이어야 하는데, 주어진 식의 $2u+1$이 최소여야 하므로, β 역시 최소여야 한다.

여기서 n이 홀수라고 가정해보자. 이때 β가 가장 작으려면 β는 1이며, $n+\beta$는 짝수가 된다.

그런데 여기서 $h_n(x)$를 고려하면 $h_n(x)$는 $n+\beta$가 짝수일 때, 0전후 주위에서 부호가 바뀌지 않는다. 즉, $h_n(x)=(x-t_n)^{\beta}$가 성립하고, β가 최소이므로 β는 1이 된다. 즉, $h_n(x)=(x-t_n)$이다.

한편, n이 짝수라면, β가 가장 작으려면 역시 1이어야 하나, 이때는 $n+\beta$이 홀수가 되어 $h_n(x)$가 0전후 주위에서 부호가 바뀌게 된다. 이는 미분불능점이 생겨서 모순이 된다. 따라서 β는 1이

아닌 2가 되어야 한다.

여기서 n이 작을 때 상수 t_n이 $y=g(x)$의 근이어야 하므로, t_n이 크다면 $n+\beta$가 똑같이 커야 하는데 이는 $n+\beta$가 최소임에 모순이다. 따라서 t_n이 작아야 한다.

이를 통해 $n=1$일 때 2, $n=2$일 때 4, $n=3$일 때 4, $n=4$일 때 6, $n=5$일 때 6 ... 이런 식으로 $m, m, m+2$까지 된다고 볼 수 있다.

여기서 $h_n(x)=(x-t_n)^\beta$ 인데, 여기서 차수가 무조건 2의 배수가 되기 때문에 차수가 홀수가 되게 하기 위해 끝에 1을 더해주어야 한다.

마지막으로 $h_m(\alpha)$에서 $J(\alpha)$의 최소가 2α임은 구했으므로, 다음이 성립한다.

$$b_m(\alpha)=2+4+4+6+6+\cdots+m+m+(m+2)+1+2\alpha$$

따라서,

$$b_m(\alpha)=\frac{m}{2}(m+4)+2\alpha+1$$

따라서 이를 계산하면,

$$\sum_{k=1}^{10} b_8(\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{10}\frac{8}{2}(8+4)+2\alpha+1$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{10}49+2\alpha=490+2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}$$

$$=490+2\cdot 55=600$$

정답 600

 # 검토자의 코멘트

전형적인 머리만 좋으면 글씨도 그림도 안 그리고 풀 수 있는 문제이다. 자신이 머리가 잘 돌아간다고 생각된다면 펜을 쓰지 않고 풀어보도록 하자.

참고로 암산에 실패한다고 해도 제작진들은 책임지지 않는다!