확률과 통계

수학자의 명언

데카르트 (Descartes, 1596~1650)

“내가 푼 문제마다 이후 다른 문제를 푸는 데 도움이 되는 규칙이 되었다.”

수
능

경우의 수

Critical Point - 교과서의 이론을 다시 한 번 체계적으로 정리하는 단계 (수능 기본개념 완성)

01.수형도를 빨리 세는 도구인 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하라.

02.몇 개를 몇 개로 볼 것인지 생각해서 나누고, 곱하여라.

03.분할의 기호를 이해하고, 계산 방법을 숙지하여라.

04.이항정리의 공식 $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^r b^{n-r}$을 활용하라.

특강 - 교과서의 이론을 여러 가지 소재로 연습하는 단계 (수능 추가개념 완성, 논리력+응용력+사고력 배양)

수능특강01: 몇 개를 몇 개로, 경우의 수 '1'

수능특강02: 함수와 경우의 수

수능특강03: 이항계수와 중복조합

수능에서 논술까지 한번에!

한권으로 완성하는 수학

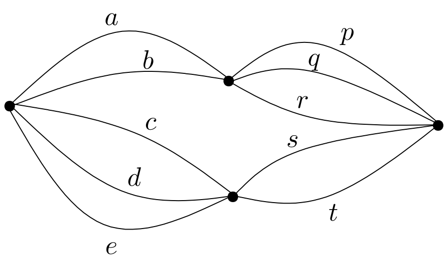
저자의 잔소리

경우의 수는 개념도 중요하지만
문제를 반드시 많이 풀어 봐야해!!

01.경우의 수

CP 01 수형도를 빨리 세는 도구인 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하라.

경우의 수를 세는 기초적인 방법은 수형도를 그리는 것이다. 아래의 길 찾기의 예를 들어서 공부해보자.[1)]



여기서 별 고민 없이

$$2\times3+3\times2=12$$

로 계산하는 학생들이 많을 것이다. 하지만 대부분의 학생들은 제대로 이해를 하지 못하고 위와 같이 계산을 하고 있기 때문에 이 상황을 수형도로 꼼꼼하게 분석하면서 왜 저렇게 계산할 수 있는지 공부해보자.

a	p
	q
	r
b	p
	q
	r
c	s
	t
d	s
	t
e	s
	t

위 수형도에서 보듯이 경우의 수가 12가지임을 확인할 수 있는데, 여기서 회색인 부분을 보면 a일 때와 b일 때 뒤에 나오는 모양이 p, q, r세 가지로 완전히 같음을 알 수 있다. 따라서 회색 부분의 경우의 수를 셀 때, 다음과 같이 생각할 수 있다.

a일 때와 b일 때, 뒤에 나올 수형도의 모양이 같으므로 a일 때만 센 후, 그 값에 두 배를 하자.[2)]

Annotation

***중요**
CP는 교과서의 개념 중 수능 핵심개념을 모아둔 것이므로 반드시 해당 단원 교과서를 먼저 공부한 후에 CP를 공부하도록 하자.

1) 단, 왼쪽에서 오른쪽으로 가는 단방향 길 찾기이다.

2) 이것을 이해해야만 진짜 곱의 법칙을 이해한 것이다.

즉, $2\times$ 라고 쓰는 순간,

① a와 b의 수형도의 뒤가 같음을 인정하는 것[1]

② a인 경우만 센다는 것[2]

이다. 여기서 ②로 세는 것을 "a로 고정"한다고 해서 "고정"이라는 용어로 약속을 하자. 즉,

"곱의 법칙을 쓴다." = "수형도의 뒤가 같다." = "고정한다."

이렇게 세 가지는 모두 동치라고 할 수 있다.
계산해보면 $2\times$(a로 고정했을 때의 경우의 수)$=2\times3=6$이다.

그런데, 수형도에서 보면 a, b는 뒤가 같지만 a와 c는 뒤가 다른 것을 알 수 있다.
여기서 수형도의 뒤가 다르면 합의 법칙을 적용해야 한다.[3]
하지만 c, d, e는 수형도의 뒤가 같으므로 위와 마찬가지 방법으로

$3\times$(c로 고정했을 때의 경우의 수)$=3\times2=6$

이므로 합의 법칙에 의하여 $6+6=12$가 되는 것이다. 결론적으로

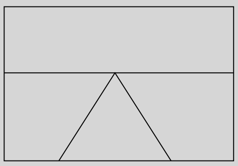
"합의 법칙을 쓴다." = "수형도의 뒤가 다르다."

"곱의 법칙을 쓴다." = "수형도의 뒤가 같다." = "고정한다."

이 두 가지를 잘 적용하는 것이 곧 수형도를 잘 그리는 것이다.[4]

문제집에서 흔히 볼 수 있는 아래의 문제를 풀면서 다시 한 번 연습해보자.

오른쪽 그림의 각각의 영역에 이웃한 영역은
색이 다르도록 네 가지 색을 칠하는 방법의
경우의 수는? (단, 색을 모두 사용할 필요는 없다.)[5]



Annotation

1) 여기서 만약 수형도의 뒤가 같다고 생각했는데 실제로 다르다면 문제를 잘못 풀어서 답이 틀리게 된다.

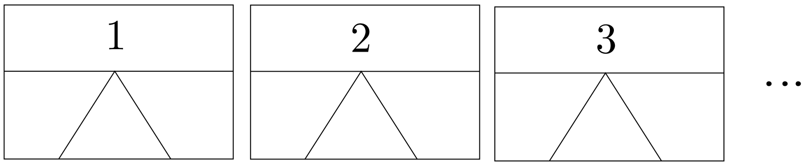
2) a인 경우와 b인 경우에 경우의 수가 같으므로 a인 경우만 세서 2배를 하는 것이다.

3) 즉,
a, b끼리는 곱의 법칙
c, d, e끼리는 곱의 법칙
(a, b), (c, d, e)끼리는 합의 법칙

이렇게 세 번의 법칙을 적용한 것이다.

4) 수형도와 곱의 법칙, 합의 법칙이 완전히 같다는 것을 알아야 한다. 그것을 깨닫지 못하면
경우의 수를 다루는 능력이 절대 높은 레벨까지 올라갈 수 없다.

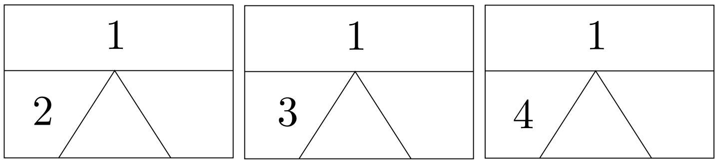
5) 스스로 풀어본 후 다음페이지로 넘어가세요.



네 가지의 색을 1, 2, 3, 4라고 하면 그림과 같이 위의 영역에 1을 칠하든, 2를 칠하든, 3을 칠하든, 4를 칠하든 뒤에 나올 수형도의 경우의 수가 같음을 예측할 수 있다. 따라서

$4\times$(1로 고정했을 때의 경우의 수)

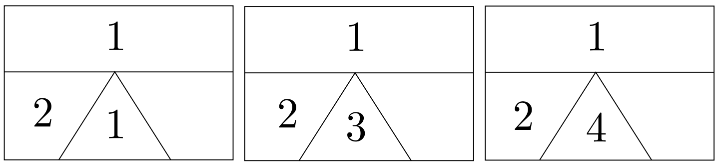
라 생각할 수 있으므로, 위의 영역에는 1로 고정시키자.



또한 그림과 같이 왼쪽 아래 영역에 2, 3, 4일 때의 수형도의 뒤가 같으므로
또 2로 고정시키면서 곱의 법칙을 활용할 수 있다. 따라서 ①에서

$4\times3\times$(2로 고정했을 때의 경우의 수)

이 된다. 이제 첫 영역과 두 번째 영역은 1과 2로 고정되었으므로



다음과 같이 세 가지 경우가 가능한 데, 여기서 1, 3, 4일 때 뒤가 같다고 생각해서 $4\times3\times3\times$ 으로 풀어나가는 순간 문제가 꼬이기 시작한다.
따라서 "합의 법칙"을 활용하거나 그냥 "수형도"를 그리거나 두 가지 방법으로 나뉜다. 수형도를 그려보면 아래와 같다.[1)]

1	2
	3
	4
3	2
	4
4	2
	3

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times3\times(1\times3+2\times2)=84$이다.[2)]

1) 이를 합의 법칙으로 완벽하게 써내면 아래와 같다.
$1\times3+2\times2$

보통 합의 법칙은 헷갈리기 쉬우므로 그냥 수형도로 대체하는 것이 편할 때도 많다.

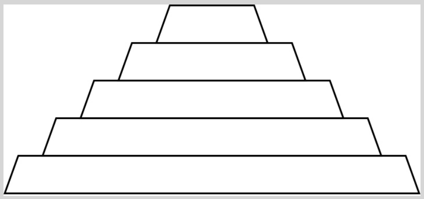
2) 이 문제는 그냥 수형도를 그리면 84개를 그려야 하지만 앞에서 곱의 법칙으로 4×3까지 계산을 했으므로 나머지 7개만 더 세면 된다.

이처럼 모든 경우의 수는 “수형도”가 기본이며 수형도를 규칙적으로 세는 수단으로 “곱의 법칙”과 “합의 법칙”을 배우는 것이다.

위의 모든 개념을 숙지하고 아래의 기출문제를 풀어보자.[1)]

그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오.

[2008.6]



곱의 법칙 이후, 수형도나 합의 법칙을 활용해서 문제를 논리적으로 해결하면 된다.

이러한 수형도에서 곱의 법칙만이 적용되어서 나타나는 공식들이 아래와 같다.

① n개 중 r개를 뽑아서 배열하는 방법

: $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ \cdots\ \times(n-r+1)=\dfrac{n!}{(n-r)!}={}_n\mathrm{P}_r$

② n개 중 r개를 뽑아서 배열하는 방법 (단, 같은 것을 뽑을 수 있다.)

: $n\times n\times\ \cdots\ \times n=n^r={}_n\Pi_r$

이러한 공식들도 외우는 것 보다, 곱의 법칙으로 유도해나가듯이 활용하는 것이 중요하다.[2)]

경우의 수를 세는 기본적인 방법

① 합의 법칙, 곱의 법칙, ${}_n\mathrm{P}_r$, ${}_n\Pi_r$은 모두 수형도에서 유도가 된다. [3)]
② 수형도의 뒤가 같으면 곱의 법칙을, 뒤가 다르면 합의 법칙을 적용한다.

Annotation

1) 자세한 풀이는 생략
힌트 : 곱의 법칙을 쓴 후 합의 법칙 혹은 수형도로 방향 전환

정답: $3\times2\times5=30$

→ 곧 자세한 풀이를 배울 수 있는데 그전에 꼭 풀어보자.

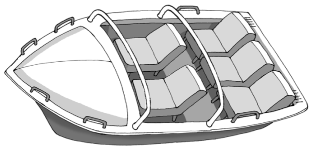
2) 즉, 이런 공식을 전혀 모르더라도 곱의 법칙만 잘 적용하면 문제를 풀어낼 수 있다.

3) 합의 법칙이 적용되는 순간 문제가 어려워지는데, 그 때 당황하지 말고, 수형도를 그리거나 침착하게 합의 법칙을 잘 적용하면 된다.

Annotation

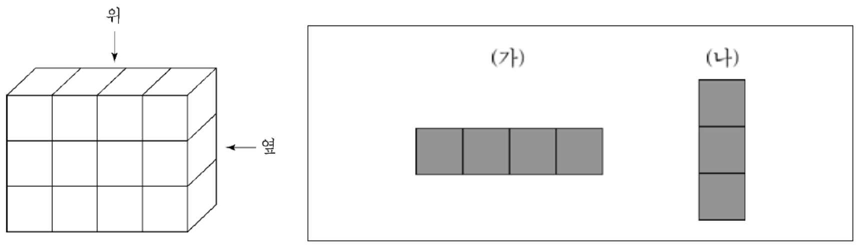
STEP1 **교과서 수준의 문제에 Critical Point를 적용해보자.** … 1)

어머니, 아버지를 포함한 5명의 가족이 어느 놀이기구를 타려고 한다. 앞줄에는 반드시 어머니, 아버지가 앉을 때, 5명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. [2007 변형]



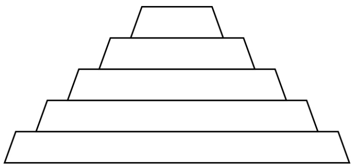
STEP2 **수능 수준의 문제에 Critical Point를 적용해보고 교과서 수준의 문제와 비교해서 풀이의 공통성에 대하여 스스로 생각해보자.** … 2)

(1) 다음 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.



이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는? [2006]

(2) 그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. [2008.6]



3 문제를 모두 스스로 풀어보고 곱의 법칙, 합의 법칙으로 철저하게 분석할 필요가 있다. 특히 **STEP1문제와 STEP2-(2)를 풀면서 곱의 법칙과 합의 법칙의 차이를 완벽히 이해해야 하고 STEP2-(1)의 문제는 곱의 법칙이지만 몇 가지 얻어야할 교훈이 있다.**

다음페이지에서 설명을 보기 전에 반드시 스스로 풀어보도록 하자.

1) **정답 : 12**
***이 문제가 풀리지 않는다면 교과서와 CP단계의 공부로 돌아가셔서 완벽히 공부하고 오셔야 합니다.**

2) **정답 : 36, 30**

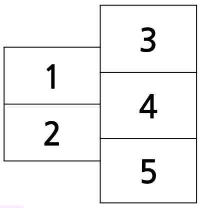
***문제가 안 풀리면 참고해보자.**
① STEP2 - (1)
4개 중 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2$이다.

기본개념완성

수능

<STEP1의 풀이>

어머니, 아버지가 앞 두 자리에 앉아야 하는데 두 사람이 자리를 바꿀 수 있다. 그런데 오른쪽 그림에서 1에 어머니, 2에 아버지가 앉든 1에 아버지, 2에 어머니가 앉든 결국 3, 4, 5에 배열하는 경우의 수는 표와 같이 같을 것이라 추측할 수 있다.[1][2]



1	2	3	4	5
A	B	a	b	c
		a	c	b
		b	a	c
		b	c	a
		c	a	b
		c	b	a

위 표에서 보듯이 1-A, 2-B를 1-B, 2-A로 바꾸더라도 3, 4, 5에 오는 배열 방법의 수는 동등하다. 따라서 1-A, 2-B인 경우만 세면되므로 2를 곱하면서 1-A, 2-B로 고정해줘야 한다. 결국

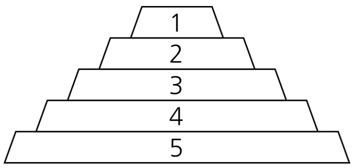
$2\times$(1-A, 2-B일 때 3, 4, 5에 배열하는 방법의 수)

을 구하면 되는데 3, 4, 5에 배열하는 방법의 수는 수형도에서 볼 수 있듯이 $3!$이다. 따라서 $2\times 3! = 12$가 정답이 된다.

이처럼 **STEP1의 문제는 수형도의 뒷 부분이 1-A, 2-B일 때와 1-B, 2-A일 때가 완전히 같았으므로 곱의 법칙**만 활용하면 풀 수 있는 문제이다.
이제 STEP2-(2)의 문제를 풀어보자.

<STEP2-(2)의 풀이>

편의상 칠하는 색을 A, B, C라 하자. 1에 A를 칠하든 B를 칠하든 C를 칠하든 앞으로 나올 경우의 수가 같음을 추측할 수 있다.[3] 따라서 1-A로 고정하고 곱의 법칙을 쓰면



$3\times$(1-A일 때 2,3,4,5에 칠하는 경우의 수)

이다. 문제에서 1과 5의 색이 달라야 한다 했으므로 5부터 칠하자. 1-A로 고정되어 있으므로 5에는 B아니면 C가 와야 하는데 A, B든 A, C든 어차피 서로 다른 색일

Annotation

1) 표: 어머니를 A, 아버지를 B 나머지를 a, b, c 라 하자.

2) 편의상 표를 그렸지만 수형도라고 생각하면 된다.

3) 사실 이 부분은 직관이라 할 수 있는데, 이해가 되지 않는다면 B를 칠할 때 B를 A로 치환해서 생각해보면 똑같은 것을 알 수 있다.

뿐이므로 앞으로 나올 경우의 수가 같음을 추측할 수 있다. 즉, 마찬가지로 5-B로 고정하고 2를 곱하면서 곱의 법칙을 쓰면 된다.

$$3\times2\times(\text{1-A, 5-B일 때 2,3,4 에 칠하는 경우의 수})$$

여기서 부터가 중요하다. 2에 칠할 수 있는 색을 생각해보면 B와 C인데 B를 칠하나 C를 칠하나 뒤가 같다고 생각해서 $3\times2\times2\cdots$으로 접근하는 순간 풀이가 완전히 어긋나게 된다. 왜냐하면 2-B를 칠하면 3이 B랑 달라야하고 4가 B가 될 수 있는 것 같지만 5-B에 의해 불가능하게 된다.

따라서 2에 B를 칠하는 것과 C를 칠하는 것은 명백히 앞으로 수형도의 뒤에 나올 경우의 수가 다르다는 것을 알아내야 한다.[1] 따라서

$$3\times2\times(\underset{\substack{\text{2-B}\\\text{고정}}}{\underline{1\times\quad}}+\underset{\substack{\text{2-C}\\\text{고정}}}{\underline{1\times\quad}})$$

와 같이 쓴 후 계속 해나가야 하는데, 확인해보면 합의 법칙을 또 활용해야 하는 것을 알 수 있다. 따라서 합의 법칙이 너무 자주 쓰여 복잡해 질 것으로 추측되면 단순히 그냥 합의 법칙, 곱의 법칙 대신 수형도를 그려버리는 것이 좋을 수 있다.
1-A, 5-B를 고정한 상태에서 나머지는 합의 법칙이 아닌 수형도로 해결해보자.

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td rowspan="5">A</td><td>B</td><td>A</td><td>C</td><td rowspan="5">B</td></tr>
<tr><td>B</td><td>C</td><td>A</td></tr>
<tr><td>C</td><td>A</td><td>C</td></tr>
<tr><td>C</td><td>B</td><td>A</td></tr>
<tr><td>C</td><td>B</td><td>C</td></tr>
</table>

표와 같이 총 5가지의 경우의 수가 가능하므로 계산해보면

$$3\times2\times5=30$$

이 정답이 된다. **이처럼 합의 법칙이 활용되기 때문에 STEP1의 문제보다 훨씬 어려운데 <u>합의 법칙이 자주 쓰여 많이 복잡할 때에는 수형도로 풀이를 바꾸는 것이 유리하다.</u> 반드시 알아두도록 하자.**

이제 STEP2-(1)을 풀면서 어떤 교훈을 얻어야 하는지 살펴보자.

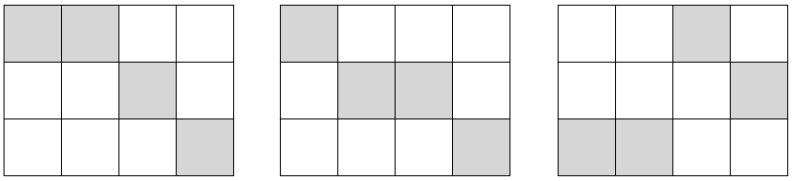
Annotation

<u>1) 이러한 수형도의 뒤가 같을 것이냐, 다를 것이냐에 대해 판단하는 연습을 부단히 해야만 곱의 법칙과 합의 법칙을 완벽하게 마스터할 수 있다.</u>

Annotation

<STEP2-(1)의 풀이>

일단 올바른 풀이를 보자. 주어진 조건을 만족하는 그림을 몇 개 그려보면 다음과 같다.



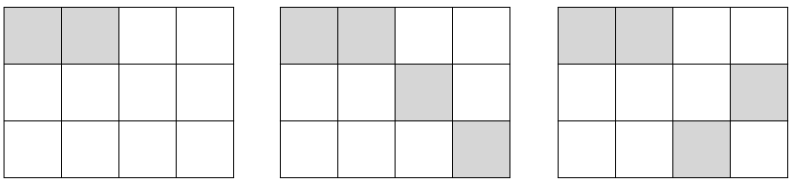
따라서 1,2,3 행 중 1개의 행에는 반드시 2개의 사각형이 칠해져야하는 것을 알 수 있다. 이제 1,2,3 행 중 몇 행에 2개의 사각형이 칠해지든 뒤에 나올 경우의 수가 같을 것이라 추측할 수 있으므로 1열로 고정하고 곱의 법칙을 활용하면 다음과 같다.

$3\times$(1행에 2개의 사각형에 칠할 때 경우의 수)

그 다음 1행에서 2개의 사각형을 고르는 경우의 수가 ${}_4\mathrm{C}_2$인데 어떻게 2개를 고르든 경우의 수가 같을 것이므로 1열의 제일 앞의 두 사각형에 칠하는 것으로 고정하면서 곱의 법칙을 활용하면 다음과 같다.

$3\times{}_4\mathrm{C}_2\times$(1행에 제일 앞 두 사각형에 칠할 때 경우의 수)

따라서 아래의 왼쪽 그림과 같이 고정한 후 나머지 경우의 수를 세면되는데,



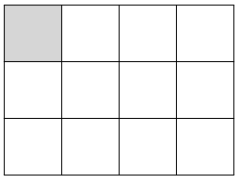
위의 오른쪽 두 그림과 같이 2가지 경우밖에 없다. 즉, 구하는 경우의 수는

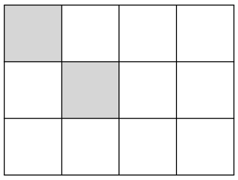
$$3\times{}_4\mathrm{C}_2\times 2=36$$

이 된다. 그런데 이 문제를 다음과 같이 푼 학생도 많았다.

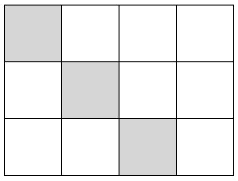
Annotation

먼저 1열에 아무 사각형이나 1개 칠하는 경우의 수는 4이다. 각각에 대하여 뒤에 나올 경우의 수 또한 같다. 따라서 $4\times$이라 쓴 후 왼쪽 그림과 같이 고정하자.

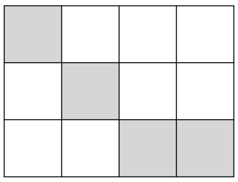


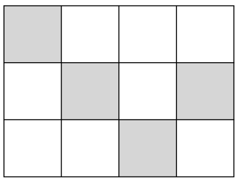


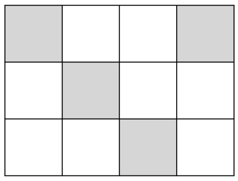
그런 다음 2열의 3칸 중 어느 사각형을 칠하나 뒤가 같으므로 $4\times3\times$이라 쓴 후 위의 오른쪽 그림과 같이 고정하자. 마찬가지로 3열에도 $4\times3\times2\times$라 하면서 고정하면 다음 그림과 같다.



여기서 다음 세 개의 그림과 같이 4열의 아무 자리나 칠해도 되므로

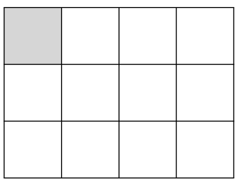


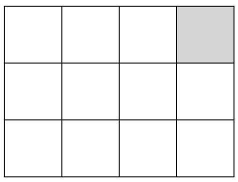


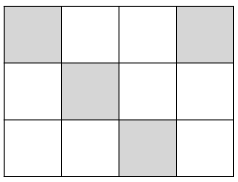


$4\times3\times2\times3=72$가 나온다. 그런데 앞서 구한 36과 명백히 다른 것을 알 수 있다.[1)]
그런데 방금 풀이에서 어디서 틀렸기에 답이 다르게 나왔을까? 를 생각해보자.
일단 곱의 법칙을 활용하면서 "뒤가 같다." 라고 판단해왔던 과정은 단 한번도 틀린 적이 없다.

처음에 1행에 사각형을 배열할 때 어디에 배치해도 경우의 수가 같다는 것은 참인데 왼쪽 두 그림 중 어느 걸로 고정시키든 오른쪽 그림이 나타날 수 있다.

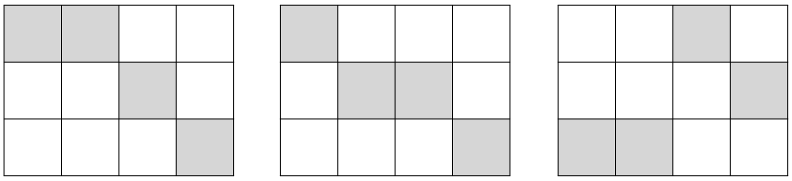






이처럼 왼쪽 그림으로 고정했을 때도 카운트 되고, 중간 그림으로 고정했을 때도 카운트 되므로 오른쪽 그림은 두 번 카운트 된 것이다. 그런데

1) 일단 올바른 정답은 36이다.



와 같은 그림들도 결국은 모두 두 번 씩 카운트가 되므로 1개를 2개로 센 것이 된다. 따라서 다시 2로 나눠주면 원하는 경우의 수를 얻을 수 있다.

$$\frac{4\times3\times2\times3}{2}=36$$

이와 같이 1열에서 사각형을 1개 고정하면서 시작하면 풀이가 매우 어려워진다.

이처럼 **고정을 할 때 중복이 일어날 수도 있는데 이를 문제 풀면서 항상 고려해야 경우의 수에서 절대적인 실력을 가질 수 있다.**[1)]

이렇게 문제로부터 얻을 수 있는 교훈을 완벽히 마스터하고 넘어가야 한다. **곱의 법칙, 합의 법칙, 중복, 고정 등은 경우의 수에서 반드시 필요한 필수 개념이다.**

총정리하면 다음과 같다.

경우의 수를 세는 기본적인 방법

① 합의 법칙, 곱의 법칙, ${}_nP_r$, ${}_n\Pi_r$은 모두 수형도에서 유도가 된다.

② 수형도의 뒤가 같으면 곱의 법칙을, 뒤가 다르면 합의 법칙을 적용한다.

→ 합의 법칙이 곤란하면 수형도를 활용한다.

→ 곱의 법칙을 사용할 때, 고정하며 중복을 항상 고려해줘야 한다.[2)]

**이 단원은 반드시 모두 완벽하게 이해하고 다음으로 넘어가도록 하자.
모든 경우의 수, 확률 문제의 근간이 되는 내용이다.**

Annotation

**1) 과외 대비!? - <저의 경험담>
이 같은 내용으로 다음과 같이 질문하는 학생들이 많다.**

"전 4x3x2x3으로 했는데 왜 답이 안나오나요?"

제대로 답변을 못해주는 선생님이 은근히 많은데 그냥 합의 법칙, 곱의 법칙에 대한 내공이 부족한 것임!

"네가 잘못푼거야!"

**라고 할 확률이 높아요! ㅋㅋ
그리고 여러분들도 내년엔 과외 선생이 될 것이니 완벽히 공부해두시길! 경우의 수에서 이런 질문 은근히 많이 들어와요~**

2) 처음에는 중복이 없어 보이지만 수형도를 끝까지 완성해 나가다보면 중복이 생기는 경우가 있다.