

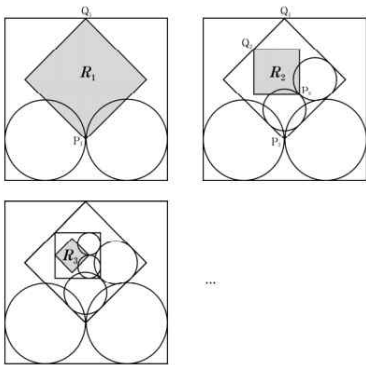
등비급수 5문제

1. 2017 3월 18번 교육청

한 변의 길이가 4인 정사각형이 있다. 그림과 같이 지름이 2인 두 원이 서로 한 점 P_1 에서 만나고 정사각형의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_1 이라 하고, 선분 P_1Q_1 을 대각선으로 하는 정사각형 R_1 을 그린다. 이 때, R_1 의 한 변의 길이를 l_1 이라 하자.

지름이 $\frac{l_1}{2}$ 인 두 원이 서로 한 점 P_2 에서 만나고 정사각형 R_1 의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_1 의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_2 라 하고, 선분 P_2Q_2 를 대각선으로 하는 정사각형 R_2 를 그린다. 이 때, R_2 의 한 변의 길이를 l_2 라 하자.

지름이 $\frac{l_2}{2}$ 인 두 원이 서로 한 점 P_3 에서 만나고 정사각형 R_2 의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_2 의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_3 이라 하고, 선분 P_3Q_3 을 대각선으로 하는 정사각형 R_3 을 그린다. 이 때, R_3 의 한 변의 길이를 l_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 정사각형 R_n 의 한 변의 길이를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]

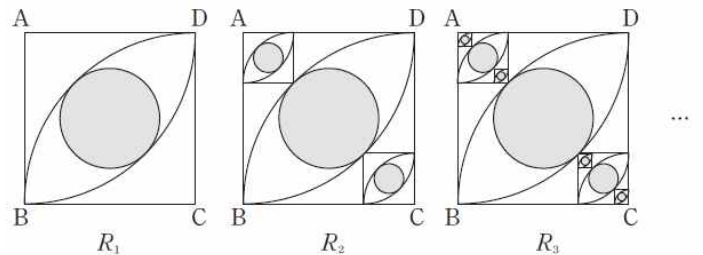


- ① $\frac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$ ② $\frac{24(2+\sqrt{2})}{23}$ ③ $\frac{12(1+4\sqrt{2})}{23}$
 ④ $\frac{3(3+2\sqrt{2})}{7}$ ⑤ $\frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$

2. 2013 A형 10월 19번 교육청

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD 안에 꼭짓점 A, C를 중심으로 하고 선분 AB, CD를 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 두 사분원의 호로 둘러싸인 부분에 내접하는 가장 큰 원을 그리고, 그 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 두 꼭짓점 A, C로부터 두 사분원의 호와 원이 접하는 두 점 중 가까운 점까지의 선분을 대각선으로 하는 정사각형을 각각 그린다. 이 2개의 정사각형 안에 그림 R_1 에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에 있는 작은 두 정사각형에서 두 꼭짓점으로부터 사분원과 원의 접점 중 가까운 점까지의 선분을 대각선으로 하는 정사각형을 각각 그린다. 이 4개의 정사각형 안에 그림 R_1 에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? (4점)



- ① $(3-2\sqrt{2})\pi$ ② $(2-\sqrt{3})\pi$ ③ $(\sqrt{2}-1)\pi$
 ④ $(4-2\sqrt{3})\pi$ ⑤ $(2-\sqrt{2})\pi$

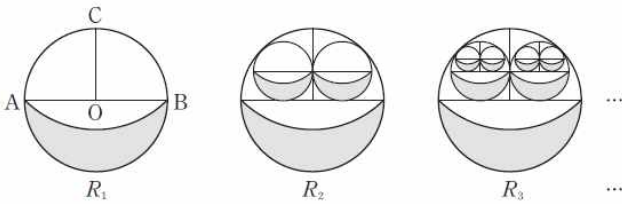
3. 2013 가형 수능 14번

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자.

점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 \smile 모양의 도형에 색칠하여 얻는 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 \smile 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에서 새로 생긴 2개의 원의 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 \smile 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? (4점)

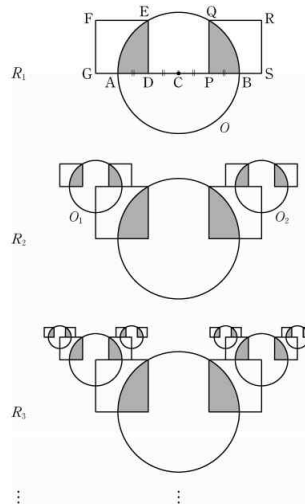


- ① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$
 ④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\frac{5+6\sqrt{2}}{7}$

4. 2017 11월 17번 수능

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 \triangleleft 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 \triangleright 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{DE}$ 인 원 O_1 , 점 R을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{PQ}$ 인 원 O_2 를 그린다. 두 원 O_1, O_2 에 각각 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 \triangleleft 모양의 2개의 도형과 \triangleright 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$
 ③ $\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$ ④ $\frac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

5. 2017 7월 15번 교육청





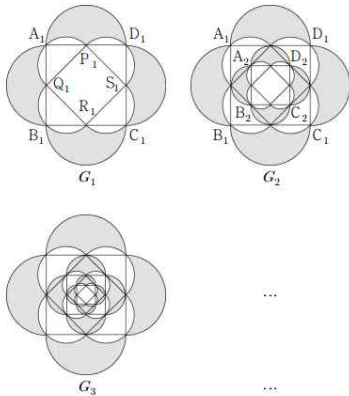
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 네 변 $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ 을 각각 지름으로 하는 반원을 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 외부에 그려 만들어진 4개의 호로 둘러싸인  모양의 도형을 E_1 이라 하자. 네 변 $D_1A_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1$ 의 중점 P_1, Q_1, R_1, S_1 을 꼭짓점으로 하는 정사각형에 도형 E_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어진  모양의 도형을 F_1 이라 하자. 도형 E_1 의 내부와 도형 F_1 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_1 이라 하자.

그림 G_1 에 네 변 $P_1Q_1, Q_1R_1, R_1S_1, S_1P_1$ 의 중점 A_2, B_2, C_2, D_2 를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어진  모양의 도형을 E_2 라 하자. 네 변 $D_2A_2, A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2$ 의 중점 P_2, Q_2, R_2, S_2 를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어진  모양의 도형을 F_2 라 하자. 그림 G_1 에 도형 E_2 의 내부와 도형 F_2 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 G_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 T_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ 의

값은? [4점]



- ① $\frac{4}{3}(\pi+2)$ ② $\frac{3}{2}(\pi+2)$ ③ $\frac{5}{3}(\pi+2)$
 ④ $\frac{4}{3}(\pi+4)$ ⑤ $\frac{5}{3}(\pi+4)$