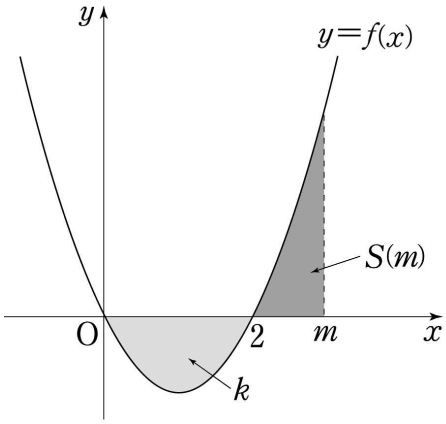
12) 정답) ②

$0 \le x \le 2$일 때, $f(x) \le 0$ 이므로 이 범위에서 $\int_0^x |f(t)|dt = \left|\int_0^x f(t)dt\right|$이다. 따라서

$0 \le x \le 2$일 때, $g(x) = 1$이다.

이제 구간에 따라 정적분 값에 절댓값을 씌운 값을 비교하자. 2보다 큰 실수 m에 대하여

$\left|\int_0^2 f(t)dt\right| = k$, $\left|\int_2^m f(t)dt\right| = S(m)$ 이라 하면, 각각의 값(k, $S(m)$)은 다음 색칠된 부분의 넓이와 같다.



각각의 값은 양수이다. 따라서 $\int_0^x |f(t)|dt = k + S(x)$, $\left|\int_0^x f(t)dt\right| = |k - S(x)|$

이다. 그러므로 $g(x) = k + S(x) - |k - S(x)| + 1$이다.

이때, $k > S(x)$를 만족시키는 모든 x에 대해서는

$g(x) = k + S(x) - \{k - S(x)\} + 1 = 2S(x) + 1$이고,

$k < S(x)$를 만족시키는 모든 x에 대해서는

$g(x) = k + S(x) + \{k - S(x)\} + 1 = 2k + 1$이다.

즉, $k = S(x)$를 만족시키는 x를 경계로 $g(x)$의 식이 달라진다.

$\int_0^x f(t)dt = -k + S(x)$이므로 이 값이 0이 되는 0이 아닌 x를 찾으면..

$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (t^2 - 2t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_0^x = 0$ 에서 $x = 3$을 얻을 수 있다.

따라서 $x = 3$을 기준으로 k와 $S(x)$의 대소가 바뀐다.

즉, $2 < x < 3$일 때, $k > S(x)$이므로 $g(x) = 2S(x) + 1$

$x \ge 3$일 때, $g(x) = 2k + 1$이다.

상수 k의 값 $\left|\int_0^2 f(t)dt\right|$을 구하면 $= \left|\int_0^2 f(t)dt\right| = \left|-\frac{4}{3}\right|$에서 $k = \frac{4}{3}$이고

$\left|\int_2^x f(t)dt\right| = S(x)$ 의 값을 구하면 $\left|\int_2^x f(t)dt\right| = S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}$이다.

함수 $g(x)$를 범위에 따라 정리하면 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} 1 & (0 \le x \le 2) \\ \dfrac{2}{3}x^3-2x^2+\dfrac{11}{3} & (2 \le x < 3) \\ \dfrac{11}{3} & (x \ge 3) \end{cases}$$

따라서

$$\int_0^4 g(x)dx$$

$$=\int_0^2 1dx+\int_2^3\left(\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{11}{3}\right)dx+\int_3^4\frac{11}{3}dx$$

$$=\frac{15}{2}$$