

2013학년도 사관학교 기출 문제

수학 영역(가형)

1

1. $\sqrt[6]{9^5} \times 24^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(2x - \pi)^2}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

3. 곡선 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 위의 점 (2, 1)에서의 접선의 기울기는? [2점]

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ -1
 ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ 의 값은? [3점]

- ① $\pi + 1$ ② $\pi + 2$ ③ $\pi + 3$
 ④ $\pi + 4$ ⑤ $\pi + 5$

5. 정규분포 $N(50, 10^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의로 25개의 표본을 뽑았을 때의 표본평균을 \bar{X} 라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $P(48 \leq \bar{X} \leq 54)$ 의 값을 구한 것은? [3점]

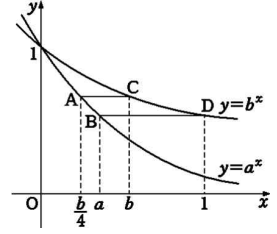
z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
 ④ 0.8185 ⑤ 0.9104

6. 어느 인터넷 동호회에서 한 종류의 사은품 10개를 정회원 2명, 준회원 2명에게 모두 나누어주려고 한다. 정회원은 2개 이상, 준회원은 1개 이상을 받도록 나누어주는 방법의 수는? (단, 사은품은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

- ① 20 ② 25 ③ 30
 ④ 35 ⑤ 40

7. 그림과 같이 $0 < a < b < 1$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 곡선 $y = a^x$ 위의 두 점 A, B의 x 좌표는 각각 $\frac{b}{4}, a$ 이고, 곡선 $y = b^x$ 위의 두 점 C, D의 x 좌표는 각각 $b, 1$ 이다. 두 선분 AC와 BD가 모두 x 축과 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$
 ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

8. 어느 지역에 서식하는 어떤 동물의 개체 수에 대한 변화를 조사한 결과, 지금으로부터 t 년 후에 이 동물의 개체 수를 N 이라 하면 등식

$$\log N = k + t \log \frac{4}{5} \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

가 성립한다고 한다. 이 동물의 현재 개체 수가 5000일 때, 개체 수가 처음으로 1000보다 적어지는 때는 지금으로부터 n 년 후이다. 자연수 n 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.) [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 행렬 $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 A(1, 2)가 옮겨지는 점을 B, 행렬 M^3 으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 C(2, 0)이 옮겨지는 점을 D라 하자. 두 벡터 \overrightarrow{OB} 와 \overrightarrow{BD} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은?

(단, O는 원점이다.) [3점]

- ① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $-\frac{1}{2}$
 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 두 실수 $x, y (x > y)$ 가 $x+y=1, xy=-1$ 을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_n = \sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의하자. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 제 n 항을 구하는 과정이다.

$x+y=1, xy=-1$ 에서 두 실수 x, y 는 방정식 $t^2 - t + \boxed{(\text{가})} = 0$ 의 두 근이다. 한편 $a_n = \sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1} \dots (*)$ (*)은 첫째항이 x^{n-1} 이고 공비가 $\frac{y}{x}$ 인 등비수열의 첫째 항부터 제 n 항까지의 합이므로 $a_n = \frac{\boxed{(\text{나})}}{\sqrt{5}}$

위의 과정에서 (가)에 들어갈 수를 m , (나)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $m + \{f(3)\}^2$ 의 값은? [3점]

- ① 17 ② 19 ③ 21
 ④ 23 ⑤ 25

11. 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\overline{AF} : \overline{BF} = 3 : 1$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

- ① $\frac{26}{3}$ ② $\frac{28}{3}$ ③ 10
 ④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{34}{3}$

12. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의

한 초점 F(c, 0)을 지나고 y축에 평행한 직선이 이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB} = \sqrt{2}c$ 일 때, a와 b 사이의 관계식은? (단, $a > 0, b > 0, c > 0$) [3점]

- ① $a = b$ ② $a = \sqrt{2}b$ ③ $2a = 3b$
 ④ $a = \sqrt{3}b$ ⑤ $a = 2b$

13. 모든 실수 x 에서 정의된 함수

$$f(x) = 2\sin 2x + 4\sin x - 4\cos x + 1$$

의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

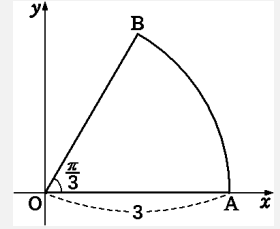
- ① $4-4\sqrt{2}$ ② $4-3\sqrt{2}$ ③ $4-2\sqrt{2}$
 ④ $5-2\sqrt{2}$ ⑤ $5-\sqrt{2}$

14. 모든 실수 x 에서 정의된 함수 $f(x) = \int_1^x (x^2 - t) dt$ 에 대하여

직선 $y = 6x - k$ 가 곡선 $y = f(x)$ 에 접할 때, 양수 k 의 값은?
 [3점]

- ① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$
 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

15. 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O 와 점 $A(3, 0)$ 을 잇는 선분 OA 를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 일차변환 f 를 나타내는

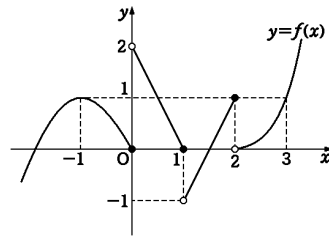


행렬이 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$ 일 때,

일차변환 f 에 의하여 부채꼴 OAB 가 옮겨진 도형을 D 라 하자. 도형 D 의 내부와 부채꼴 OAB 의 내부의 공통부분을 나타내는 도형을 E_1 이라 하고, 일차변환 f 에 의하여 도형 E_1 이 옮겨진 도형을 E_2 라 하자. 두 도형 E_1, E_2 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 할 때, $S_1 + S_2$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3}{8}\pi$ ② $\frac{7}{16}\pi$ ③ $\frac{1}{2}\pi$
 ④ $\frac{9}{16}\pi$ ⑤ $\frac{5}{8}\pi$

16. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. 함수 $f(x-1)$ 은 $x=0$ 에서 연속이다.
 ㄴ. 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
 ㄷ. 함수 $f(f(x))$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 세 이차정사각행렬 A, B, C 가 $(AB)^2 = A^2B^2$, $BA = AC$ 를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

보기

ㄱ. $B^2A = AC^2$
 ㄴ. B 의 역행렬이 존재하면 $A^2B = A^2C$ 이다.
 ㄷ. AC 의 역행렬이 존재하면 $B = C$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 모든 실수 x 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2}$ 의 값이 존재한다.
 ㄴ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^3) - f(a)}{h^3}$ 의 값이 존재한다.
 ㄷ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 의 값이 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x}$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $f(x) \geq 0$
 ㄴ. $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에 존재한다.
 ㄷ. 함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2 - 2\ln 2$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

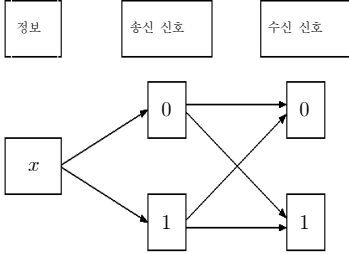
20. $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{(\ln x)^6}{x^2}$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^6}{x^2} = 0$ 이다.) [4점]

보기

ㄱ. $x = e^3$ 에서 극댓값을 갖는다.
 ㄴ. $x = e$ 에서 극솟값을 갖는다.
 ㄷ. $x > 0$ 에서 방정식 $f(x) = 1$ 의 실근의 개수는 3이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림은 어떤 정보 x 를 0과 1의 두 가지 중 한 가지의 송신 신호로 바꾼 다음 이를 전송하여 수신 신호를 얻는 경로를 나타낸 것이다.



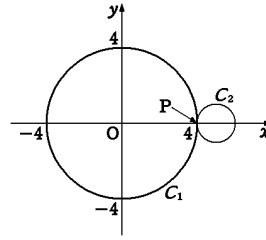
이때 송신 신호가 전송되는 과정에서 수신 신호가 바뀌는 경우가 생기는데, 각각의 경우에 따른 확률은 다음과 같다.

- (가) 정보 x 가 0, 1의 송신 신호로 바뀔 확률은 각각 0.4, 0.6이다.
- (나) 송신 신호 0이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.95, 0.05이다.
- (다) 송신 신호 1이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.05, 0.95이다.

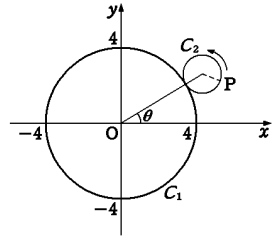
정보 x 를 전송한 결과 수신 신호가 1이었을 때, 송신 신호가 1이었을 확률은? [4점]

- ① $\frac{54}{59}$
- ② $\frac{55}{59}$
- ③ $\frac{56}{59}$
- ④ $\frac{57}{59}$
- ⑤ $\frac{58}{59}$

22. [그림 1]과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 큰 원 C_1 과 반지름의 길이가 1인 작은 원 C_2 가 점 $(4, 0)$ 에서 외접하고 있다. 이때 작은 원 위의 한 점을 P 라 하자. [그림 2]와 같이 원 C_2 가 원 C_1 에 접한 상태로 굴러갈 때, 두 원의 중심을 연결한 선분이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. θ 의 값이 0에서 $\frac{\pi}{2}$ 까지 변할 때, 점 $(4, 0)$ 에서 출발한 점 P 가 움직인 거리는? [4점]



[그림 1]



[그림 2]

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

23. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

- (가) $a_1 = 0, b_1 = 2$
- (나) n 이 짝수이면

$$a_n = a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{n}, b_n = b_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{n}$$
 이다.
- (다) n 이 1보다 큰 홀수이면

$$a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{n}, b_n = b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{n}$$
 이다.

$a_{41} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

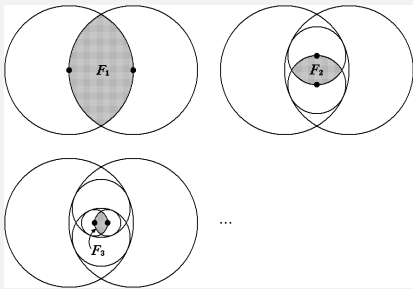
[4점]

- ① 79
- ② 80
- ③ 81
- ④ 82
- ⑤ 83

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1 이라 하자.

F_1 의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1 과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2 라 하자.

F_2 의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2 와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3 이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n 을 그려 나갈 때, F_n 의 둘레의 길이를 l_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]

- ① $2\pi(1 + \sqrt{7})$ ② $\frac{8\pi}{3}(1 + \sqrt{7})$ ③ $\frac{4\pi}{3}(2 + \sqrt{7})$
- ④ $2\pi(2 + \sqrt{7})$ ⑤ $\frac{5\pi}{3}(2 + \sqrt{7})$

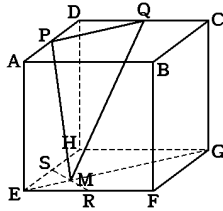
25. 분수방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-12} = \frac{2}{5}$ 의 모든 실근의 합을 구하여라.

[3점]

26. 좌표공간 위의 점 $A(4, 6, 7)$ 에서 두 점 $B(1, -1, 2)$, $C(5, -3, 8)$ 을 지나는 직선까지의 거리를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하여라. [3점]

27. 두 곡선 $y = \ln x + 3$, $y = \ln \frac{1}{x} + 3$ 과 직선 $x = e$ 로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는 V 이다. $\frac{V}{\pi}$ 의 값을 구하여라. [4점]

28. 그림과 같은 정육면체 ABCD-EFGH에서 네 모서리 AD, CD, EF, EH의 중점을 각각 P, Q, R, S라 하고, 두 선분 RS와 EG의 교점을 M이라 하자. 평면 PMQ와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan^2 \theta + \sec^2 \theta$ 의 값을 구하여라. [4점]



29. 다음과 같이 두 수 0과 1만을 사용하여 제 n 행에 n 자리의 자연수를 크기순으로 모두 나열해 나간다. ($n = 1, 2, 3, \dots$)

제1행	1
제2행	10, 11
제3행	100, 101, 110, 111
제4행	1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110.
...	

제 n 행에 나열한 모든 수의 합을 a_n 이라 하자. 예를 들어, $a_2 = 21$, $a_3 = 422$ 이다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{20^n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 세 다항함수 $f(x), g(x), h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(1) = 1, g(1) = 2$
- (나) 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(xy+1) = xg(y) + h(x+y)$ 이다.

이때 $\int_0^3 \{f(x) + g(x) + h(x)\} dx$ 의 값을 구하여라. [4점]