고지우의 난문현답

제 1 일

1. 2017년 9월 평가원
2. 2015년 수능
3. 2014년 6월 평가원
4. 2014년 사관학교
5. 2013년 6월 평가원
6. 2010년 10월 교육청
7. 2011년 수능
8. 2015년 7월 교육청
9. 2009년 6월 평가원
10. 2009년 경찰대

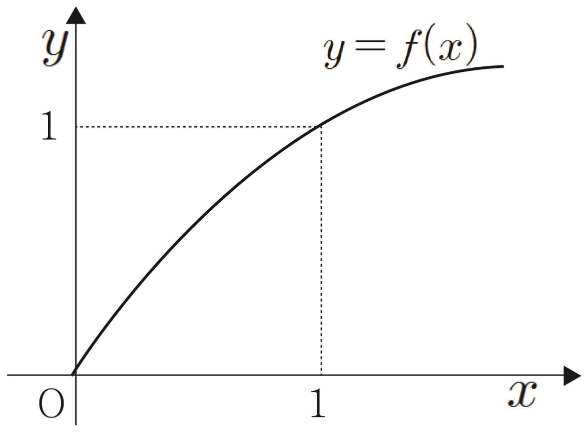
1. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$
(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$ 일 때, $f(2) - g(2)$ 의 값은? [4점]

① $\dfrac{16}{3e^4}$　② $\dfrac{6}{e^4}$　③ $\dfrac{20}{3e^4}$　④ $\dfrac{22}{3e^4}$　⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

2. 다음은 연속함수 $y = f(x)$의 그래프이다.



구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$와 같은 값을 갖는 것은? [4점]

① $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$

② $\displaystyle\int_0^1 xg(x)dx$

③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

④ $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$

⑤ $\displaystyle\int_0^1 \{f(x) - g(x)\}dx$

3. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$에 대하여

$$\mathrm{F}(x)=\int_0^x tf(x-t)dt\,(x \geq 0)$$

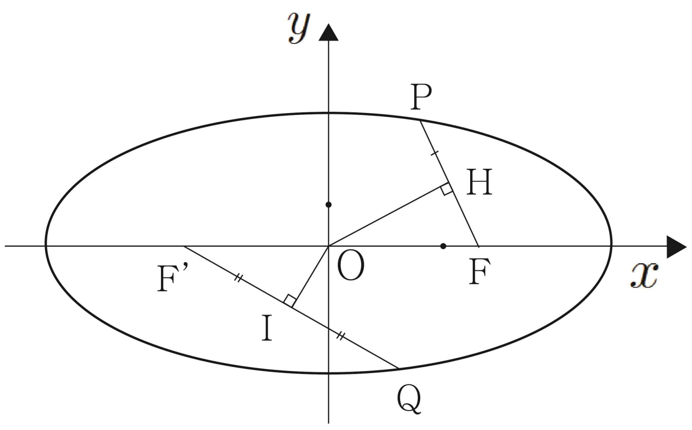
일 때, $\mathrm{F}'(a)=\ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

4. 함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

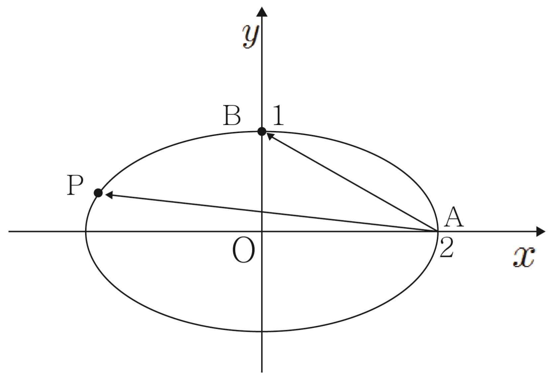
ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{4}\pi\right)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

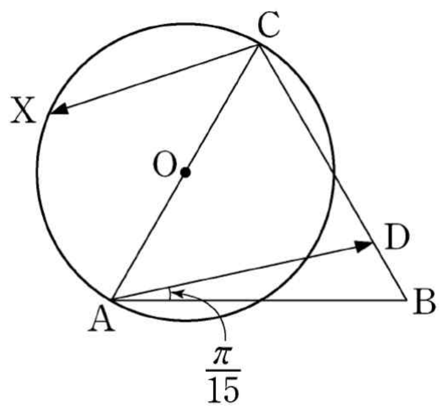
5. 두 점 $\mathrm{F}(5, 0)$, $\mathrm{F}'(-5, 0)$을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF'에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자. 점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF'의 중점이고 $\overline{\mathrm{OH}} \times \overline{\mathrm{OI}} = 10$일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{OH}} \neq \overline{\mathrm{OI}}$) [4점]



6. 두 점 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1)$와 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 최대가 되는 점 P에서의 접선의 방정식은 $y = ax + b$이다. $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. [4점]



7. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle \mathrm{DAB} = \frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle \mathrm{ACP} = \frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



8. 검은 바둑돌 ● 과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타낼 수 있는 유형은 다음과 같이 4가지이다.

	●●	●○	○●	○○
	< A형 >	< B형 >	< C형 >	< D형 >

예를 들어, 6개의 바둑돌을 <A형> 2번, <B형> 1번, <C형> 1번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 아래과 같이 5이다.

●●○○●●
○●●●○○
○○●●●○
●●●○○●
●○○●●●

10개의 바둑돌을 <A형> 4번, <B형> 2번, <C형> 2번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.) [4점]

9. A, B 두 사람이 하루에 한 번씩 탁구 경기를 하기로 하였다. 첫 경기부터 A가 이긴 횟수가 B가 이긴 횟수보다 항상 많거나 같도록 유지되면서 경기가 진행될 때, 처음 7일 동안 경기를 치른 결과, A가 네 번 이기고 B가 세 번 이기는 경우의 수를 구하시오. [4점]

10. 10보다 큰 자연수 n에 대하여 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 두 부분집합 X와 Y를 택할 때, $n(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y})=1$인 경우의 수는? (단, $n(\mathrm{A})$는 집합 A의 원소의 개수)

① $\sum_{k=1}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{k} 2^{n-k}$

② $\sum_{k=1}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{k} 2^{n-k-1}$

③ $\sum_{k=1}^{n} n \cdot {}_{n}\mathrm{C}_{k} 2^{n-k}$

④ $\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_{n}\mathrm{C}_{k} 2^{n-k-1}$

⑤ $\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_{n}\mathrm{C}_{k} 2^{n-k}$