3일차 과제

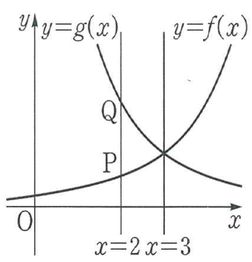
1. 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $f(2x)g(2x)=\{f(x)g(x)\}^2$
ㄴ. $a<b$이면 $f(-3a)g(2a)<f(-3b)g(2b)$
ㄷ. $a<b$이면 $f(4a)g(-3a)>f(4b)g(-3b)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $f(x)=a^{x-m}$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-m}$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, 직선 $x=2$와 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{2}$이다. 이때 상수 a, m에 대하여 am의 값을 구하여라.(단, $a>1$)



3. 1이 아닌 양수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a^x+\log_b x}{b^x+\log_a x}=\frac{1}{4}$$

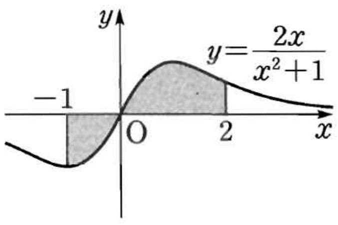
일 때, $\log_a b$의 값을 구하여라.

4. 함수 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $y=\sin^{-1}x$라 할 때,

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}\frac{x}{2}}{x}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

5. 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\frac{2x}{x^2+1}$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



6. 곡선 $y=\sin 2x$와 이 곡선 위의 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $-\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}$

② $-\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-\frac{1}{2}$

③ $-\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$

④ $-\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

⑤ $-\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

7. 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_{-b}^{-a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx=0$$

이 성립하는 함수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^6-1$

ㄴ. $f(x)=x^{2017}+x^{2015}$

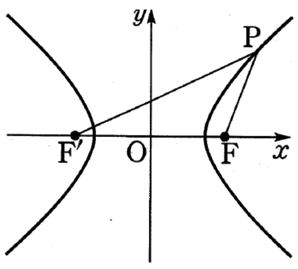
ㄷ. $f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

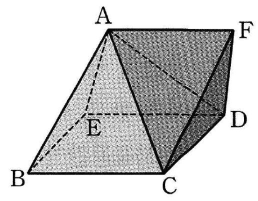
8. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)+f(-x)=x^2\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)$이 성립할 때, 정적분 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값은?

① $\frac{2}{e}$　② $\frac{5}{e}$　③ $e-1$
④ $e-\frac{5}{e}$　⑤ $3e-\frac{5}{e}$

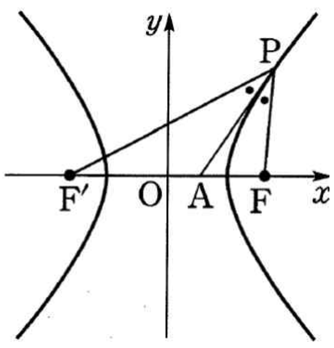
9. 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 세 선분 PF, FF′, PF′의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때 $\overline{\text{PF}}^2+\overline{\text{PF}'}^2$의 값은 (단, $\overline{\text{PF}'}>\overline{\text{PF}}$)



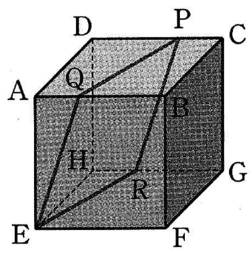
11. 오른쪽 그림은 모든 모서리의 길이가 같은 사각뿔 $ABCDE$와 정사면체 $ACDF$가 면 ACD를 공유하도록 붙여 놓은 것이다. 두 면 $BCDE$와 CDF가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



10. 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$위의 한 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 ∠F′PF의 이등분선이 x축과 만나는 점을 A라 하면 $\overline{\text{F}'\text{A}}:\overline{\text{FA}}=5:3$이다. 이때 삼각형 PFF′의 둘레의 길이를 구하여라.



12. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체에서 $\overline{AQ}=\overline{CP}=\overline{HR}=1$이다. 평면 $PQER$와 평면 $EFGH$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



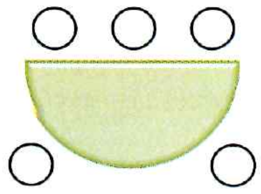
13. 두 구 $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2+z^2-4x+6y-12z+33=0$이 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 서로 접할 때, $a+b-c$의 값은?

① $-\dfrac{33}{7}$ ② -3 ③ $-\dfrac{3}{7}$

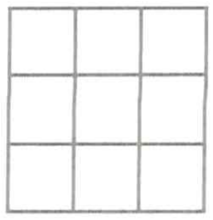
④ $\dfrac{5}{7}$ ⑤ 2

14. 구 $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=6$에 접하고 직선 $x-1=y=\dfrac{z+1}{2}$에 수직인 평면의 방정식을 모두 구하여라.

15. 오른쪽 그림과 같은 탁자에 5명이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



16. 오른쪽 그림과 같이 정사각형을 9등분한 도형의 각 영역을 서로 다른 9가지 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수는 $k\times7!$이다. 이때 상수 k의 값을 구하여라.



17. 어느 음료수 회사에서 이벤트로 음료수 10병중에서 1병의 비율로 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨를 새겨, 이 뚜껑을 가져온 고객에게는 음료수 한 병을 경품으로 준다고 한다. 이 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률이 $\frac{3^k}{10^4}$ 일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

18. 어느 호텔을 예약한 사람 중에서 실제로 그 호텔에 투숙하는 사람은 80%라 한다. 방이 20개인 이 호텔에서 같은 날 22개의 예약을 받은 경우 실제로 방이 부족할 확률을 구하여라.
(단, $0.8^{21}=0.009$, $0.8^{22}=0.007$로 계산한다.)

19. 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{45}\mathrm{C}_x \cdot \frac{2^x}{3^{45}}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45)$$

일 때, $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$는?

① $\mathrm{E}(X)=10$, $\mathrm{V}(X)=1$
② $\mathrm{E}(X)=10$, $\mathrm{V}(X)=5$
③ $\mathrm{E}(X)=15$, $\mathrm{V}(X)=10$
④ $\mathrm{E}(X)=30$, $\mathrm{V}(X)=5$
⑤ $\mathrm{E}(X)=30$, $\mathrm{V}(X)=10$

20. 한 번의 타석에서 안타칠 확률이 0.2인 야구 선수가 10번의 타석에서 안타를 친 횟수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X\le 9)$는?

① $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$ ② $\left(\frac{4}{5}\right)^{11}$ ③ $1-\left(\frac{1}{5}\right)^{9}$
④ $1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ ⑤ $1-\left(\frac{1}{5}\right)^{11}$

3일차 과제

1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8)
9) 10) 11) 12) 13) 14)
15) 16) 17) 18) 19) 20)

1) 정답 ⑤

[풀이]

ㄱ. $f(2x)g(2x)=2^{2x}\cdot 3^{2x}=(2^x)^2\cdot(3^x)^2$

$=(2^x\cdot 3^x)^2=\{f(x)g(x)\}^2$

ㄴ. $f(-3x)g(2x)=2^{-3x}\cdot 3^{2x}=\left(\frac{1}{8}\right)^x\cdot 9^x=\left(\frac{9}{8}\right)^x$

따라서 함수 $f(-3x)g(2x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $a<b$이면

$f(-3a)g(2a)<f(-3b)g(2b)$

ㄷ. $f(4x)g(-3x)=2^{4x}\cdot 3^{-3x}=16^x\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^x=\left(\frac{16}{27}\right)^x$

따라서 함수 $f(4x)g(-3x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $a<b$이면

$f(4a)g(-3a)>f(4b)g(-3b)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

2) 정답 6

[풀이]

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$m=3$

즉 두 함수 $f(x)=a^{x-3}$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}$에서

$f(2)=a^{2-3}=\frac{1}{a}$, $g(2)=\left(\frac{1}{a}\right)^{2-3}=a$

따라서 $\mathrm{P}\left(2,\ \frac{1}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(2,\ a)$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{2}$이므로

$a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$, $\quad 2a^2-3a-2=0$

$(2a+1)(a-2)=0$ $\quad\therefore\ a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

그런데 $a>1$이므로 $\quad a=2$

$\therefore\ am=6$

[참고]

$y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 직선 $x=0$(y축)에 대하여 대칭이므로 두 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 $y=a^{x-m}$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-m}$의 그래프는 직선 $x-m=0$, 즉 $x=m$에 대하여 대칭이다.

3) 정답 4

[전략] 1이 아닌 양수 a, b에 대하여 $\log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}$임을 이용하여 식을 변형한다.

[풀이] $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{a^x+\log_b x}{b^x+\log_a x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{a^x+\frac{\ln x}{\ln b}}{b^x+\frac{\ln x}{\ln a}}$ • 30 %

이때 $\lim\limits_{x\to 0+}a^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0+}b^x=1$이고, $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$이므로 위의 식의 분모, 분자를 각각 $\ln x$로 나누면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{a^x}{\ln x}+\frac{1}{\ln b}}{\frac{b^x}{\ln x}+\frac{1}{\ln a}}=\frac{\ln a}{\ln b}=\log_b a=\frac{1}{4}$$ • 50 %

$\therefore\ \log_a b=\frac{1}{\log_b a}=4$ • 20 %

4) 정답 ②

[전략]

$\sin^{-1}\frac{x}{2}=h$로 놓고 x를 h로 나타낸다.

[풀이]

$\sin^{-1}\frac{x}{2}=h$로 놓으면 $\frac{x}{2}=\sin h$ $\quad\therefore\ x=2\sin h$

또 $x\to 0$일 때 $h\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}\frac{x}{2}}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{2\sin h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{\sin h}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

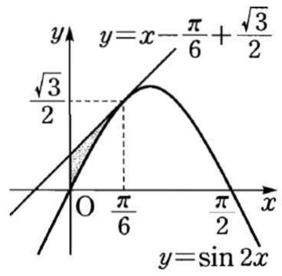
5) 정답 $\ln 10$

$\int_{-1}^{0}\left(-\frac{2x}{x^1+1}\right)dx+\int_{0}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx$

$=\left[-\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{0}+\left[\ln(x^2+1)\right]_{0}^{2}$

$=\ln 2+\ln 5=\ln 10$

6) 정답 ①



$y=\sin 2x$에서 $y'=2\cos 2x$이므로 곡선 위의 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$2\cos\frac{\pi}{3}=1$이고 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

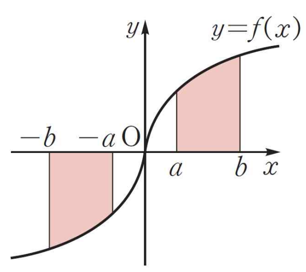
따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 2x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{\pi}{6}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}$

$=-\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}$

7) 정답 ⑤



$\int_{-b}^{-a}f(x)dx+\int_{a}^{b}f(x)dx=0$에서

$\int_{-b}^{-a}f(x)dx=-\int_{a}^{b}f(x)dx$이므로 오른쪽 그림에서 $f(x)$는 기함수이다.

ㄱ. $f(-x)=(-x)^6-1=x^6-1$

$=f(x)$

따라서 $f(x)$는 우함수이다.

ㄴ. $f(-x)=(-x)^{2017}+(-x)^{2015}$

$=-x^{2017}-x^{2015}$

$=-(x^{2017}+x^{2015})$

$=-f(x)$

따라서 $f(x)$는 기함수이다.

ㄷ. $f(-x)=\frac{2^{-x}-2^x}{2}=-\frac{2^x-2^{-x}}{2}=-f(x)$

따라서 $f(x)$는 기함수이다.

이상에서 주어진 등식이 성립하는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

8) 정답 ④

[전략] $-x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

[풀이]

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$ ⋯⋯ ㉠

이때 $-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=-1$일 때 $t=1$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{1}^{0}f(-t)\cdot(-1)dt$

$=\int_{0}^{1}f(-t)dt=\int_{0}^{1}f(-x)dx$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(-x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}\{f(-x)+f(x)\}dx$

$$=\int_0^1 x^2\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)dx=\int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})dx$$

이때 $g(x)=x^2,\ h'(x)=e^x+e^{-x}$ 으로 놓으면

$$g'(x)=2x,\ h(x)=e^x-e^{-x}$$

$$\therefore\ \int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})dx$$

$$=\left[x^2(e^x-e^{-x})\right]_0^1-2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx$$

$$=e-\frac{1}{e}-2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx$ 에서 $u(x)=x,\ v'(x)=e^x-e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u'(x)=1,\ v(x)=e^x+e^{-x}$$

$$\therefore\ \int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx=\left[x(e^x+e^{-x})\right]_0^1-\int_0^1(e^x+e^{-x})dx$$

$$=e+\frac{1}{e}-\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1$$

$$=e+\frac{1}{e}-e+\frac{1}{e}=\frac{2}{e} \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉣을 ㉢에 대입하면

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})dx$$

$$=e-\frac{1}{e}-\frac{4}{e}=e-\frac{5}{e}$$

9) 답 338

[해설] 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$에서 $\sqrt{25+11}=6$이므로 초점의 좌표는 $(6,0)$, $(-6,0)$ $\quad\therefore\ \overline{FF'}=12$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2\cdot 5=10$

$\therefore\ \overline{PF}=\overline{PF'}-10$

$\overline{PF}$, $\overline{FF'}$, $\overline{PF'}$의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\overline{FF'}$에서 $(\overline{PF'}-10)+\overline{PF'}=2\cdot 12$

$\therefore\ \overline{PF'}=17$

따라서 $\overline{PF}=17-10=7$이므로

$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=49+289=338$

[보충 학습] 등차중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라 하고– $b=\frac{a+c}{2}$이다.

10) 답 $8+16\sqrt{3}$

[전략] 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용한다.

[해설] $\overline{PA}$가 $\angle F'PF$의 이등분선이므로

$\overline{PA}:\overline{PF}=\overline{F'A}:\overline{FA}=5:3$

즉 $\overline{PF'}=5k$, $\overline{PF}=3k$ $(k>0)$로 놓으면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2k=2\cdot 2\sqrt{3}$

$\therefore\ k=2\sqrt{3}$

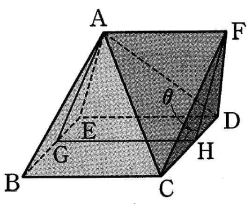
$\therefore\ \overline{PF'}=10\sqrt{3}$, $\overline{PF}=6\sqrt{3}$

한편 $\sqrt{12+4}=4$에서 $\overline{FF'}=8$이므로 $\triangle PFF'$의 둘레의 길이는

$\overline{PF'}+\overline{PF}+\overline{FF'}=8+16\sqrt{3}$

11) 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

[해설]



오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$와 $\overline{CD}$의 중점을 각각 G, H라 하면

$\overline{AG}=\overline{FH}$, $\overline{AF}=\overline{GH}$

이므로 $\square AGHF$는 평행사변형이다.

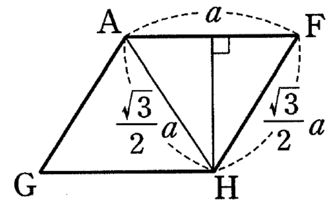
•20%

이때 두 면 $BCDE$와 CDF가 이루는 각의 크기는 $\overline{GH}$와 $\overline{FH}$가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\cos\theta=\cos(\angle GHF)=\cos(180^\circ-\angle AFH)$

$=-\cos(\angle AFH)$ •40%

각 모서리의 길이를 a라 하면



$\overline{AH}=\overline{FH}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

오른쪽 그림에서

$$\cos(\angle AFH)=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ •40%

12) 답 $\frac{\sqrt{11}}{11}$

[해설]

$\square PQER$는 마름모이고

$\overline{QR}=\overline{BG}=3\sqrt{2}$,

$\overline{PE}=\sqrt{\overline{DE}^2+\overline{DP}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$

이므로 $\square PQER$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{22}=3\sqrt{11}$

한편 두 점 P, Q에서 밑면 $EFGH$에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하면 $\square P'REQ'$은 평행사변형이므로 그 넓이는

$1\times 3=3$

이때 $\square PQER$의 평면 $EFGH$위로의 정사영이 $\square P'REQ'$이므로

$\square PQER\cos\theta=\square P'REQ'$, $\quad 3\sqrt{11}\cos\theta=3$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{11}}{11}$

13) 답 ②

[전략] 점 P가 두 구의 중심을 지나는 직선 위에 있음을 이용한다.

[해설] 점 $P(a,\ b,\ c)$는 주어진 두 구 위에 있으므로

$a^2+b^2+c^2=9$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a^2+b^2+c^2-4a+6b-12c+33=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠-㉡을 하면 $4a-6b+12c+42=0$

$\therefore 2a-3b+6c-21=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

$x^2+y^2+z^2-4x+6y-12z+33=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=16$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(2,\ -3,\ 6)$

따라서 주어진 두 구의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$, $(2,\ -3,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{6}$

점 $P(a,\ b,\ c)$가 이 직선 위에 있으므로

$\frac{a}{2}=\frac{b}{-3}=\frac{c}{6}=t$ (t는 실수)

로 놓으면 $a=2t$, $b=-3t$, $c=6t$

이를 ㉢에 대입하면

$4t+9t+36t-21=0$ $\quad\therefore t=\frac{3}{7}$

따라서 $a=\frac{6}{7}$, $b=-\frac{9}{7}$, $c=\frac{18}{7}$이므로

$a+b-c=-3$

14) 답 $x+y+2z-5=0,\ x+y+2z+7=0$

[해설] 직선 $x-1=y=\frac{z+1}{2}$에 수직인 평면의 법선벡터는 $(1,\ 1,\ 2)$이므로 구하는 평면의 방정식을

$x+y+2z+k=0$ (k는 상수)

으로 놓을 수 있다.

이 평면이 주어진 구와 접하므로 구의 중심 $(2,\ -3,\ 0)$과 평면 $x+y+2z+k=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다. 즉

$\frac{|2-3+k|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{6}$, $|k-1|=6$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=7$

따라서 구하는 평면의 방정식은

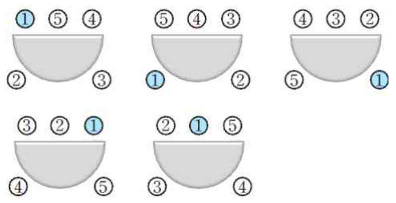
$x+y+2z-5=0,\ x+y+2z+7=0$

15) 정답 120

5명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 주어진 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $24 \cdot 5 = 120$

16) **정답** 18

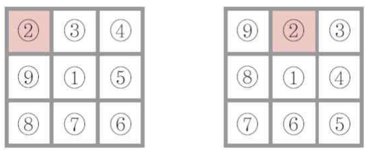
[전략] 정사각형 탁자에 둘러 앉는 방법의 수를 구한다.

[풀이]

가운데 정사각형을 칠하는 방법의 수는 9이고, 나머지 8개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는

$$(8-1)! = 7!$$

이때 8개의 정사각형을 칠하는 한 가지 방법에 대하여 주어진 도형에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $9 \cdot 7! \cdot 2 = 18 \cdot 7!$

$\therefore\ k = 18$

17) **정답** 7

경품을 받을 확률이 $\frac{1}{10}$ 이므로 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률은

$$_{3}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{10}\right)^{1}\left(\frac{9}{10}\right)^{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3 \cdot 9^3}{10^4} = \frac{3^7}{10^4}$$

따라서 $\frac{3^7}{10^4} = \frac{3^k}{10^4}$ 이므로 $k = 7$

18) **[정답]** 0.0466

실제로 호텔에 투숙하는 사람 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(22,\ 0.8)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x) = {}_{22}\mathrm{C}_{x}\, 0.8^{x} \times 0.2^{22-x}\ (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 22)$$

방이 부족하려면 $X > 20$이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X>20) &= \mathrm{P}(X=21) + \mathrm{P}(X=22) \\ &= {}_{22}\mathrm{C}_{21}\, 0.8^{21} \times 0.2 + {}_{22}\mathrm{C}_{22}\, 0.8^{22} \times 0.2^{0} \\ &= 22 \times 0.009 \times 0.2 + 1 \times 0.007 \times 1 \\ &= 0.0466 \end{aligned}$$

19) **[정답]** ⑤

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=x) &= {}_{45}\mathrm{C}_{x} \cdot \frac{2^x}{3^{45}} \\ &= {}_{45}\mathrm{C}_{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{45-x}\ (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45) \end{aligned}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X) = 45 \cdot \frac{2}{3} = 30,\ \mathrm{V}(X) = 45 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 10$$

20) **[정답]** ④

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x) = {}_{10}\mathrm{C}_{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}\ (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \le 9) &= 1 - \mathrm{P}(X=10) \\ &= 1 - {}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{0} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \end{aligned}$$