6일차 과제

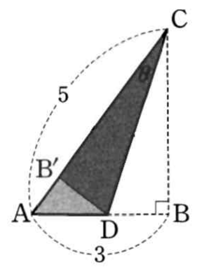
1. 함수 $f(x)=\log_5 x+2$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음 중 a의 값에 관계없이 항상 일정한 값을 갖는 것은? (단, $a\neq 0$)

① $g(a)+g(-a)$ ② $g(a)-g(-a)$ ③ $g(a)+g\left(\frac{1}{a}\right)$

④ $g(a)g\left(\frac{1}{a}\right)$ ⑤ $g(a)g(-a)$

2. 함수 $f(x)=\begin{cases} 24-2x & (x<12) \\ 1-\log_3(x-9) & (x\geq 12) \end{cases}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $(g\circ g\circ g)(k)=3$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하여라.

3. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$, $\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 모양의 종이를 변 AB 위에 한 점 D를 잡고 선분 CD를 접는 선으로 하여 접었더니 꼭짓점 B가 변 AC위의 한 점 B′과 겹쳐졌다. $\angle\mathrm{ACD}=\theta$라 하면 $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$일 때, $p-q$의 값을 구하여라.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



4. 직선 $x\sin\theta+y\cos\theta=6$과 점 $\mathrm{P}(4\sin\theta,\ 2\sin\theta)$사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

5. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. 치역은 $\left\{y \,\middle|\, y \le \dfrac{1}{e}\right\}$이다.

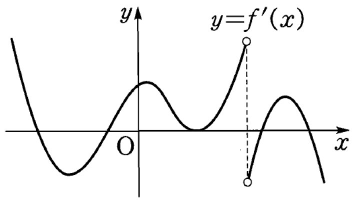
ㄴ. $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$이다.

ㄷ. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(e,\ \dfrac{1}{e}\right)$에 대하여 선분 AB는 부등식 $y \ge f(x)$의 영역에 있다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

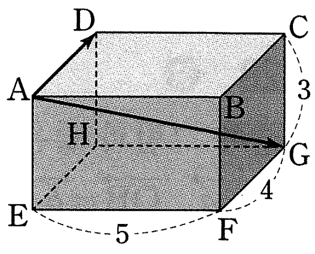
6. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$의 최댓값을 구하여라.

7. 연속함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수를 구하여라.



8. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 등식 $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{10}x^2-\cos x$를 만족시킬 때, 방정식 $\dfrac{g'(x)}{f'(x)}+\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=2$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라. (단, $f'(x)g'(x)\neq 0$)

9. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{EF}=5, \overline{FG}=4, \overline{CG}=3$ 인 직육면체에서 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{AG}$를 만족시키는 점 P의 자취의 길이는?
(단, $0 \le k \le 1$)



① 4 ② 5 ③ $\sqrt{34}$
④ $\sqrt{41}$ ⑤ 6

10. 좌표공간의 세 점 A,B,C의 위치벡터가 각각 $\overrightarrow{OA}=(5,\ -2,\ 3)$, $\overrightarrow{OB}=(6,\ 2,\ 1)$, $\overrightarrow{OC}=(4,\ 0,\ 2)$이다. $\angle ACB$의 크기는 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값을 구하여라.

11. 네 점 $A(-1,\ 3,\ 3), B(1,1,2), P(1,0,-1), Q(x,y,z)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{PQ}$는 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 평행한 단위벡터이다. 이 때 xyz의 값을 구하여라. (단, $xyz>0$)

12. 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$가 평면 $2x+y+2z=11$과 만날 때 생기는 원의 넓이는?

① 3π ② 4π ③ 9π
④ 16π ⑤ 25π

13. 구 $(x-4)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$이 평면 $x+2y+2z-5=0$과 만날 때 생기는 원의 중심의 좌표를 A(a, b, c)라 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14. 두 점 $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $(0, 0, 2)$를 지나는 평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$에 접할 때, 점 $(\sqrt{3}, 0, 4)$와 평면 α 사이의 거리를 구하여라.

15. 7개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4를 일렬로 나열할 때, 짝수 번째에는 짝수를 나열하는 방법의 수를 구하여라.

16. 좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x, y)\,|\,x, y$는 정수$\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

점 P에서 한 번의 점프로 점 Q로 이동할 때, 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$이다.

점 A$(-3, 0)$에서 점 B$(3, 0)$까지 6번만 점프하여 이동하는 방법의 수를 구하여라.
(단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.)

17. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$에 대하여 함수 $f:X \to Y$중에서 $f(2) \neq 2$인 함수의 개수는?

① 64 ② 96 ③ 100
④ 124 ⑤ 125

18. 빨간색, 파란색, 흰색의 세 깃발이 있다. 이 깃발들을 다섯 번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는? (단, 깃발은 한 번 이상 올려야 하고, 두 개 이상의 깃발을 동시에 올리지 않는다.)

① 351 ② 354 ③ 357
④ 360 ⑤ 363

19. 집합 $A=\{x|x$는 한 자리의 자연수$\}$에 대하여 집합 A의 부분집합 중에서 2를 원소로 갖고 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수를 구하여라.

20. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f:X \to Y$ 중에서 치역의 원소가 3개인 함수의 개수를 구하여라.

6일차 과제

1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8)
9) 10) 11) 12) 13) 14)
15) 16) 17) 18) 19) 20)

1) 정답 ⑤

$y=\log_5 x+2$ 로 놓으면 $y-2=\log_5 x$ $\quad\therefore\ x=5^{y-2}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=5^{x-2}$ $\quad\therefore\ g(x)=5^{x-2}$

① $g(a)+g(-a)=5^{a-2}+5^{-a-2}=5^{-2}(5^a+5^{-a})$

② $g(a)-g(-a)=5^{a-2}-5^{-a-2}=5^{-2}(5^a-5^{-a})$

③ $g(a)+g\left(\dfrac{1}{a}\right)=5^{a-2}+5^{\frac{1}{a}-2}=5^{-2}\left(5^a+5^{\frac{1}{a}}\right)$

④ $g(a)g\left(\dfrac{1}{a}\right)=5^{a-2}\cdot 5^{\frac{1}{a}-2}=5^{a+\frac{1}{a}-4}$

⑤ $g(a)g(-a)=5^{a-2}\cdot 5^{-a-2}=5^{-4}=\dfrac{1}{625}$

2) 정답 26

[전략] $f(a)$ **이면** $f^{-1}(b)=a$ **임을 이용한다.**

[풀이]

$(g\circ g\circ g)(k)=3$ 에서 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이므로

$(f\circ f\circ f)(3)=k$ $\quad$ •40%

이때 $f(3)=24-2\cdot 3=18$, $f(18)=1-\log_3(18-9)=-1$,

$f(-1)=24-2\cdot(-1)=26$ 이므로

$$k=(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(18))$$
$$=f(-1)=26 \qquad \text{• 60\%}$$

3) 정답 1

$\triangle BCD\equiv\triangle B'CD$ 에서 $\angle ACB=2\theta$ 이고, $\overline{BC}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ 이므로

$$\cos 2\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{4}{5} \qquad \text{• 50 \%}$$

$$\therefore\ \cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}=\frac{1+\frac{4}{5}}{2}=\frac{9}{10} \qquad \text{• 30 \%}$$

따라서 $p=10$, $q=9$ 이므로

$$p-q=1 \qquad \text{• 20 \%}$$

4) 정답 8

[전략] 점 $(x_1,\ y_1)$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이다.

점 $P(4\sin\theta,\ 2\sin\theta)$ 와 직선 $x\sin\theta+y\cos\theta-6=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=|4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6|$

$f(\theta)=4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6$ 으로 놓으면

$$f(\theta)=4\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\sin 2\theta-6$$
$$=\sin 2\theta-2\cos 2\theta-4$$
$$=\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)-4$$

(단, $\sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$)

이때 $-1\le\sin(2\theta+\alpha)\le 1$ 이므로

$$-\sqrt{5}-4\le\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)-4\le\sqrt{5}-4$$

즉 $-\sqrt{5}-4\le f(\theta)\le\sqrt{5}-4$ 이므로

$$4-\sqrt{5}\le|f(\theta)|\le 4+\sqrt{5}$$

따라서 $M=4+\sqrt{5}$, $m=4-\sqrt{5}$ 이므로

$$M+m=8$$

5) 정답 ③

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$f'(x)=0$ 에서 $1-\ln x=0$

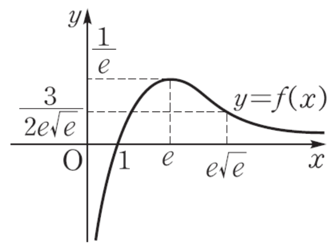
$\ln x=1$ $\quad\therefore\ x=e$

$f''(x)=0$ 에서 $2\ln x-3=0$

$\ln x=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore\ x=e\sqrt{e}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

또 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 치역은 $\left\{y\ \middle|\ y\le\dfrac{1}{e}\right\}$ 이다.

ㄴ. 점근선의 방정식은 x 축, y 축, 즉 $y=0$, $x=0$ 이다.

ㄷ. $f(1)=0$, $f(e)=\dfrac{1}{e}$ 이므로 두 점 A, B 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다.

이때 $x\le e\sqrt{e}$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록한 모양이므로 $\overline{AB}$ 는 $y=f(x)$ 의 그래프의 아래쪽에 있다.

즉, $\overline{AB}$ 는 부등식 $y\le f(x)$ 의 영역에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

6) 정답 $\dfrac{1}{2e}$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

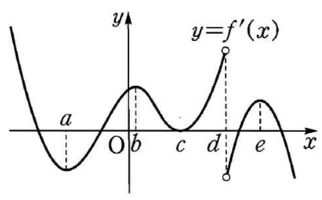
$f'(x)=0$ 에서 $\ln x=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ x=\sqrt{e}$

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$ 이다.

7) 정답 4

오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d, e 를 정하고 $f''(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=e$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4 이다.

8) 정답 5

[전략] 주어진 방정식의 양변에 $f'(x)g'(x)$ **를 곱하여 식을 변형한다.**

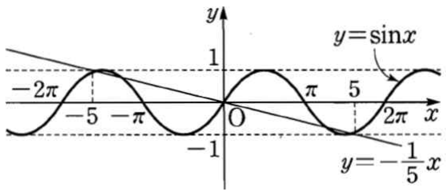
방정식 $\dfrac{g'(x)}{f'(x)}+\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=2$ 의 양변에 $f'(x)g'(x)$ 를 곱하여 정리하면

$$\{f'(x)\}^2-2f'(x)g'(x)+\{g'(x)\}^2=0$$
$$\{f'(x)-g'(x)\}^2=0$$
$$\therefore\ f'(x)-g'(x)=0 \quad\cdots\cdots\ ㉠ \qquad \text{• 30 \%}$$

$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{10}x^2-\cos x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)-g'(x)=\frac{1}{5}x+\sin x\cdots\cdots\ ㉡ \qquad \text{• 20 \%}$$

㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{5}x+\sin x=0$ 이고, 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=\sin x$ 와 직선 $y=-\dfrac{1}{5}x$ 의 교점의 개수와 같으므로 다음 그림에서 5 개다. $\quad$ • 50 %



9) 답 ③

[해설] $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{AG}$에서

$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}=k(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG})$

$\therefore \overrightarrow{GP}=k\overrightarrow{GD}$

$0\le k\le 1$에서 점 P의 자취는 선분 GD이므로

$\overline{GD}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

10) 답 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

[해설]

$\overrightarrow{CA}=(1,-2,1),\ \overrightarrow{CB}=(2,2,-1)$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{1\times2+(-2)\times2+1\times(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{-3}{3\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{30}}{6}\ (\because 0\le\theta\le\pi)$$

11) 답 $\dfrac{40}{27}$

[해설] $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2,\ -1),\ \overrightarrow{PQ}=(x-1,\ y,\ z+1)$

두 벡터 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{PQ}$가 서로 평행하므로

$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{AB}(k\ne0)$

$(x-1,\ y,\ z+1)=k(2,\ -2,\ -1)$

$\therefore x-1=2k,\ y=-2k,\ z+1=-k$

$\therefore x=2k+1,\ y=-2k,\ z=-k-1$

이때 $\overrightarrow{PQ}$는 단위벡터이므로

$|\overrightarrow{PQ}|=1$

$\sqrt{(2k)^2+(-2k)^2+(-k)^2}=1$

$|3k|=1,\qquad \therefore k=\pm\dfrac{1}{3}$

㉠에 $\therefore k=\pm\dfrac{1}{3}$를 대입하면

$x=\dfrac{5}{3},\ y=-\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{2}{3}$

이때 $xyz>0$이므로

$x=\dfrac{5}{3},\ y=-\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore xyz=\dfrac{40}{27}$

12) 답 ④

[해설] 구의 중심 $(1,\ 2,\ -1)$과 평면 $2x+y+2z-11=0$ 사이의

거리는 $\dfrac{|2+2-2-11|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{9}{3}=3$

구의 반지름의 길이는 5이므로 평면과 구가 만날 때 생기는 원의

반지름의 길이는 $\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 구하는 원의 넓이는 16π이다.

13) 답 ④

[해설] 구의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(4,\ 2,\ 3)$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a-4,\ b-2,\ c-3)$

주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(1,\ 2,\ 2)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}/\!/\vec{n}$

이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=k\vec{n}\ (k\ne0)$

즉 $a-4=k,\ b-2=2k,\ c-3=2k$이므로

$a=k+4,\ b=2k+2,\ c=2k+3$

이때 점 A가 주어진 평면 위에 있으므로

$a+2b+2c-5=0$

$k+4+2(2k+2)+2(2k+3)-5=0$

$\therefore k=-1$

따라서 $a=3,\ b=0,\ c=1$이므로

$a+b+c=4$

14) 답 1

[전략] 평면이 구와 접하면 구의 중심과 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

[해설] 평면 α의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하면 평면 α가

점 $\left(0,\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}b+d=0\qquad \therefore b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}d$

또 평면 α가 점 $(0,\ 0,\ 2)$를 지나므로

$2c+d=0\qquad \therefore c=-\dfrac{1}{2}d$

구 $x^2+y^2+z^2=1$과 평면 α가 접하면 구의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$과 평면 α 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1$

$\therefore d^2=a^2+b^2+c^2$

㉠, ㉡을 위의 식에 대입하면

$d^2=a^2+\dfrac{3}{4}d^2+\dfrac{1}{4}d^2,\ a^2=0$

$\therefore a=0$

따라서 평면 α의 방정식은

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}dy-\dfrac{1}{2}dz+d=0$, 즉 $\sqrt{3}y+z-2=0$

이므로 점 $(\sqrt{3},\ 0,\ 4)$와 평면 α 사이의 거리는

$\dfrac{|4-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=1$

15) **정답** 12

다음 그림에서 짝수 2, 2, 4는 △에, 홀수 1, 3, 3, 3은 ○에 놓이게 된다.

○ △ ○ △ ○ △ ○

이때 3개의 숫자 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

4개의 숫자 1, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

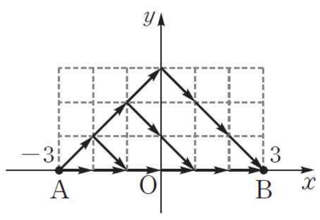
따라서 구하는 방법의 수는 $3\cdot4=12$

16) **정답** 141

[전략] 점프하는 방향을 정한 다음 점프하는 방향의 개수로 경우를 나누어 생각한다.

[풀이]

점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$까지 6번만 점프하여 이동하려면 오른쪽 그림과 같이 길이가 1인 점프의 방향은 →, 길이가 $\sqrt{2}$인 점프의 방향은 ↗ 또는 ↘이어야 한다. • 10 %



이때 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$까지 이동하는 방법은 다음과 같다.

(ⅰ) →, →, →, →, →, →로 점프하는 경우의 수는

1 • 20 %

(ⅱ) ↗, ↘, →, →, →, →로 점프하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!}=30$ • 20 %

(ⅲ) ↗, ↗, ↘, ↘, →, →로 점프하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot2!\cdot2!}=90$ • 20 %

(ⅳ) ↗, ↗, ↗, ↘, ↘, ↘로 점프하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\cdot3!}=20$ • 20 %

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+30+90+20=141$ • 10 %

17) **정답** ③

X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

X에서 Y로의 함수 중 $f(2)=2$인 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는 $125-25=100$

[다른 풀이]

$f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 5개, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 2를 제외한 4개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 5개이므로 구하는 함수의 개수는

$5\cdot 4\cdot 5=100$

18) **정답** ⑤

깃발을 한 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_1=3$

깃발을 두 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2$

같은 방법으로 깃발을 세 번, 네 번, 다섯 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_3$, ${}_3\Pi_4$, ${}_3\Pi_5$이므로 구하는 신호의 개수는

$$3+3^2+3^3+3^4+3^5=\frac{3(3^5-1)}{3-1}=363$$

19) **정답** (1) 28

(1) 2를 제외한 8개의 수 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_8C_2=28$ • 40%

20) **정답** 1500

[전략] 치역의 원소가 3개이려면 함숫값이 같은 X의 원소가 2개 또는 3개 존재해야 함을 이용한다.

[풀이]

집합 X의 5개의 원소 중에서 치역의 원소가 되는 3개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_3=10$ • 20 %

이때 치역의 원소를 a, b, c라 하면 a, b, c 중에서 함숫값을 택하는 경우는

a, a, a, b, c 또는 a, a, b, b, c

의 2가지이다.

(ⅰ) 함숫값이 a, a, a, b, c인 함수의 개수는

${}_3C_1\cdot\frac{5!}{3!}=60$ • 30 %

(ⅱ) 함숫값이 a, a, b, b, c인 함수의 개수는

${}_3C_2\cdot\frac{5!}{2!2!}=90$ • 30 %

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$10\cdot(60+90)=1500$