수학 영역

'삼각함수 + 도형' 풀이법

안녕하세요. 신SUN입니다.

6월 모평이 한 달도 남지 않았죠.

6월 모평 중요한 시험 맞아요. 하지만 6월 모평의 점수에 집착할 것이 아니라,

본인이 지금 무엇이 부족한지, 채워야할 점은 무엇인지 체크하고 피드백하여

그 이후에 본인의 구멍난 부분을 메꾸기 위한,
자세한 계획을 세워서 9월까지 또 달려가셔야죠!

그래서, 제가 여러분들에게 6월 모평을 보기 전 뭘 해드리면 좋을까 고민하다가,
수능에도 거의 항상 출제되고 중요하게 다루는 단원, 유형의 문제들을
정리해주면 좋겠다 라고 생각하게 되었어요ㅎㅎ

사실 제가 하는 수업에서 학생들에게 말해주는 내용들을 거의 빠짐없이 다룬다고 생각하면 될 것 같아요!!

오늘은, 삼각함수 + 도형 문제에 관한 풀이법을 제시해 드릴 거구요

각 문제 유형별로 일관적인 풀이방법을 제시할테니,
칼럼 보시고 집에서 꼭 알려드린대로 기출문제 풀어보세요!

본인이 직접 풀면서 사고과정을 확립시키고, 풀이법이 체화가 되어야 시험장에서도 아무렇지않게 써먹을 수 있답니다

오키? 아 그리고, 꼭 프린트해서 보시기 바랍니다!

자 그럼 시작해보겠습니다. 고고~

*** 제 글은 처음부터 끝까지 다 읽으셔야 도움이 됨을 미리 말씀드립니다.***

첫 번째로 다룰 단원은 바로 '삼각함수 + 도형' 문항입니다.

먼저, 도형문제를 풀 때의 기본적으로 가져야 할 관점부터 얘기해보죠

[도형문제를 다루는 기본 관점]
(이 단원 뿐 아니라 공간도형, 좌표 등등에서도 마찬가지입니다!)

1. 그림을 직접 다시 그려보기 + 길이, 각 등 도형 안에서 표시할 수 있는 것들 다 표시하기
(+문제에서 표시가 되지 않은 도형의 특징들을 자연스럽게 그리기)

-실제로 이 부분을 간과하다보면, 실수로 놓치고 가는 부분들이 은근히 많아요
예를들어, 직각삼각형 안에서 길이를 쓰지 않아서 특수각임을 놓친다거나,
직각표시를 하지 않아서 직각삼각형인줄 몰랐다거나 등 어이없게 실수할 수 있어요!

2.구하라는 것(길이, 각)을 대부분 아는 것들을 이용해서 나타낸다.
-새롭게 길이나 각을 미지수로 만들기 보단 주어진 조건들을 이용해서 표현함
(주변의 길이나 각을 살펴보고 그 놈들을 이용!)

이정도 관점은 가지고 있어야, 도형 문제를 풀면서 턱턱 막힐 때 풀어갈 길이 보인답니다.

자 그럼 본격적으로 삼각함수 + 도형 문제에서 필요한 점들에 대해 얘기해보죠

[삼각함수+ 도형 문제의 핵심]

1.길이를 θ에 대한 식으로 나타내야 한다.

2. 내가 구해야 할 길이가 어떤 것이고, 그 길이를 무슨 방법으로 θ로 표현할 것인가!

아마 , 이 부분을 모르시는 분들은 없겠죠.

이 내용만 안다면, 등비급수 + 도형에서
'첫째항, 공비!' 만 외치는 것과 다름이 없죠

저 두가지만 알아선 문제가 안풀리고 어렵게 느껴져요.

천천히 같이 학습해보죠 어떤 부분을 학습해야하고 , 어떻게 문제에 접근해야하는지~

[삼각함수 + 도형 문제에서 알아야 할 것]

기본적으로 삼각함수는 단위원에서 정의되기 때문에 **원**과 밀접한 관계가 있어요! 그래서 **원**이 나오는 문제가 대부분 이에요!
또 하나, **삼각비**와도 많은 관련이 있으므로 **직각삼각형** 요놈은 그냥 안 나오면 이상한거죠!

<u>문제에 **직각삼각형**이 없더라도 내가 직접!</u>
<u>주어진 각과 연관시켜 만들어 낼 수 있어야 해요!</u>

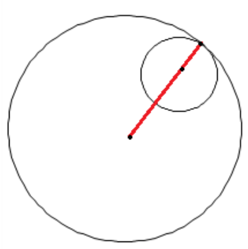
좀 더 세부적으로 쪼개 볼까요?

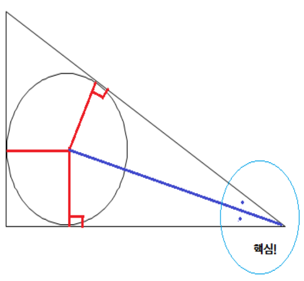
1. 직각삼각형 안에서 주어진 각 θ와 삼각비, 닮음을 이용해 길이 표현
+ 피타고라스의 정리를 통해 관계식을 만들고 θ에 대해서 정리

-직각삼각형 안에서 길이를 θ에 대해서 표현해야 하는데, 그 방법 중에서 삼각비, 닮음, 피타고라스의 정리를 가장 많이 씁니다!
포인트는 **수직**을 찾아내자! 이겠죠?

2. 문제에 원이 나올 때, 내 머릿속에 맴돌아야 할 내용들
(문제를 보고 한 번에 튀어나올 수 있을 때까지 반복 학습!)

1) 원주각 $\times 2$ = 중심각
2) 원(부채꼴) 위의 점이 있다면 , 항상 중심과 이어서 반지름까지 표시하기
3) **지름의 양 끝점과 원위의 점을 이은 삼각형은 직각삼각형! 꼭 직각 표시하기**
4) **알고있는 보조선 다 그리기**
(원과 접선이 주어질 때 **직각&보조선** 표시, 원과 할선이 주어질 때 수직이등분선 그리고 **직각&보조선** 표시)
5) **원에 내접한 또 다른 원이 존재할 때, 각 원의 중심과 접점은 한 직선위에 있음**
(각 원의 반지름을 이용해서 문제에서 구하라는 길이를 θ로 표현 가능!)
6) 외접원과 삼각형이 나오는 경우, 삼각형의 꼭지점과 원의 중심을 잇는다
7) **내접원과 삼각형이 나오는 경우 , 혹은 원에 두 접선이 접하고 있을 때는 아래의 그림과 같이 그릴 수 있어야함**
8) **삼각형의 두 변의 길이가 반지름일 때, 이등변 삼각형이 된다는 것 염두!**
(필요에 따라 수직이등분선 표시)





다 알고 계셨나요? 그래도 몇 번이고 복습복습!!

그 다음은 문제 풀이 방법 고고

['삼각함수 + 도형 문제' 풀이 방법]

STEP 1. 그림을 직접 다시 그리면서 알고있는 도형의 특징들 모두 표시 (직각, 보조선 등)
+ 주어진 길이, 각 표시

STEP 2. 직접 다시 그린 그림에서, 주어진 θ를 포함하는 직각삼각형 말고, 다른 삼각형에 θ로 표현할 수 있는 각을 모두 표시하기

- 주어진 θ를, **닮음**을 이용해서 **각을 이동 혹은 각을 나눠서**시켜서 다른 삼각형 안에 표현하기
(각의 이동: 동의각, 엇각, 맞꼭지각, 외각 등을 이용)

<u>단, 직각삼각형이 주어지지 않을 땐, 직접 만들어보고, 만든 직각삼각형이 쓸모있는 것인지 확인!</u>
<u>(문제3에서 보여드리죠)</u>

STEP 3. 어떻게 해야 구하라는 것을 θ로 만들 수 있을지 고민하기
+ θ가 포함된 직각삼각형 안에서 닮음, 삼각비, 피타고라스의 정리를 이용해서 길이를 θ로 몽땅 표현하기

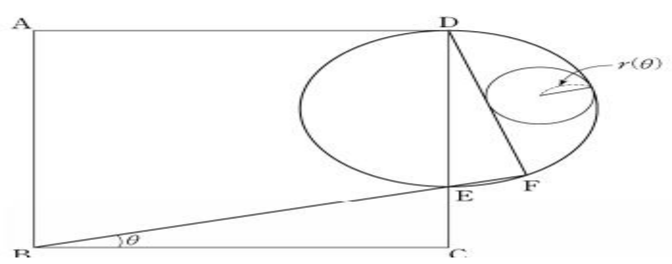
이렇게 보고서는 정확히 모르겠죠??

그럼 바로 문제로 들어가서 확인해봅시다.

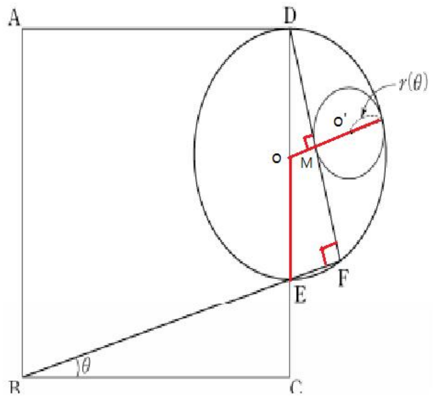
모두 최신 기출문제들입니다. GO! GO!

문제1

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC = \theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



STEP 1. 그림을 직접 다시 그리면서 알고있는 도형의 특징들 모두 표시 (직각, 보조선 등)
+ 주어진 길이, 각 표시
- 원에 내접한 원이 존재할 때, 각 원의 중심과 접점은 한 직선위에 있음
- 원과 직선이 접할 때 수직표시
- 지름의 양 끝점과 원위의 점을 이은 삼각형은 직각삼각형! 꼭 직각 표시하기
- 두 변의 길이가 반지름인 삼각형을 만든다면 ,이등변 삼각형이 된다는 것 염두!



'최소한!! 요정도는 생각할 수 있어야하고, 문제에 표시할 수 있어야 한다' 라는 겁니다

STEP 2. 직접 다시 그린 그림에서, 주어진 θ를 포함하는 직각삼각형 말고, 다른 삼각형에 θ로 표현할 수 있는 각을 모두 표시하기

맞꼭지각과, $\triangle BCE$ 와 $\triangle DEF$의 닮음을 이용해서 $\angle EDF = \theta$ 라고 표시!

STEP 3. 어떻게 해야 구하라는 것을 θ로 만들 수 있을지 고민하기 + θ가 포함된 직각삼각형 안에서 닮음, 삼각비, 피타고라스의 정리를 이용해서 길이를 θ로 몽땅 표현하기

$\overline{CE} = \tan\theta$, $\overline{DE} = 1 - \tan\theta$

$r(\theta)$를 구하기 위해선 앞서 배웠던,
'원에 내접한 원이 존재할 때, 각 원의 중심과 접점은 한 직선위에 있음'
을 이용 하면 되겠어요!

$2r(\theta) =$ 큰 원의 반지름 - $\overline{OM}$

요렇게 말이죠!!

그럼 이제 필요한 길이만 구하면 끝!

직각삼각형 DEF 에서 **삼각비**를 통해 $\overline{EF} = (1-\tan\theta)\sin\theta$ 로 표현이 가능하고,

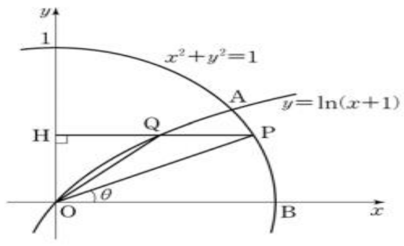
$\triangle DEF$ 와 $\triangle OMD$ 가 **닮음비가 2:1**
이기 때문에 $\overline{OM} = \frac{1}{2}(1-\tan\theta)\sin\theta$ 이겠지요!

따로 말씀드리지 않아도 $r(\theta)$ 를 구해낼 수가 있겠군요

다음 문제를 보고 한 번 더 확인해보죠!!

문제2

28. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 B$(1, 0)$에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POB}=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, O는 원점이다.) [4점]



STEP 1. 그림을 직접 다시 그리면서 알고있는 도형의 특징들 모두 표시 (직각, 보조선 등) + 주어진 길이, 각 표시

-원(부채꼴) 위의 점이 있다면 , 항상 중심과 이어서 반지름까지 표시하기

$\overline{PO} = 1$

요 문제에선 별다르게 할 게 별로 없네요!

STEP 2. 직접 다시 그린 그림에서, 주어진 θ를 포함하는 직각삼각형 말고, 다른 삼각형에 θ로 표현할 수 있는 각을 모두 표시하기

$\angle OPH$ 는 평행선과 관통직선이 있으므로, 동의각 엇각으로 표시!
$\angle OPH = \theta$

STEP 3. 어떻게 해야 구하라는 것을 θ로 만들 수 있을지 고민하기 + θ가 포함된 직각삼각형 안에서 닮음, 삼각비, 피타고라스의 정리를 이용해서 길이를 θ로 몽땅 표현하기

삼각함수의 정의에 의해
$\overline{OH} = \sin\theta$,$\overline{PH} = \cos\theta$ 로 표현 할 수 있고

구해야 하는 $S(\theta)$는 $\frac{1}{2}\times$ 밑변 $\times$ 높이 로 구할 수 있어!

따라서, $S(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{OH}$ 이고,

$\overline{PQ} = \overline{PH} - \overline{HQ}$ 이므로
(구하라는 길이를 아는 것으로 표현- 도형의 관점)

$\overline{PQ} = \cos\theta - e^{\sin\theta} + 1$ ($\overline{HQ} = e^{\sin\theta} - 1$) 이라고 표현할 수 있다.

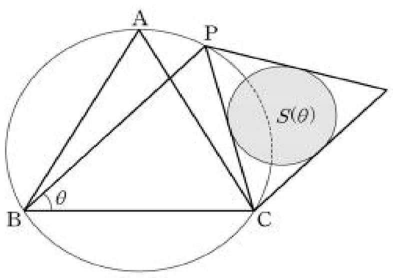
따라서, $S(\theta)=\frac{1}{2}sin\theta\,(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)$

이 문제는 여기서 끝나는 조금 간단한 문제였죠!

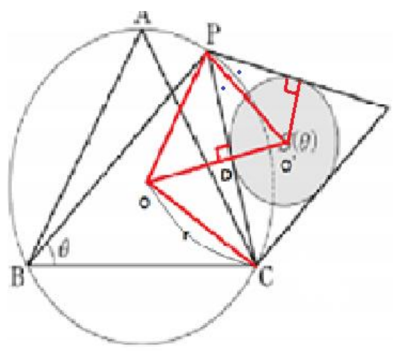
다음 문제 볼게요!

문제3

28. 그림과 같이 원에 내접하고 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC가 있다. 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P에 대하여 $\angle PBC=\theta$라 하고, 선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=a\pi$일 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]



STEP 1. 그림을 직접 다시 그리면서 알고있는 도형의 특징들 모두 표시 (직각, 보조선 등)
+ 주어진 길이, 각 표시

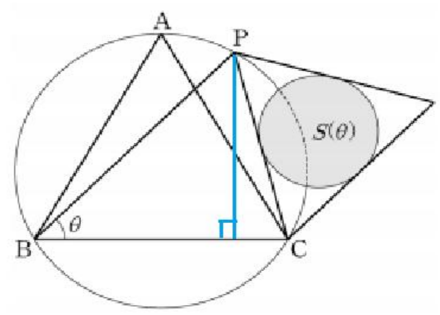


-중점과 원위의 점을 이어 반지름 표시하기
-원과 직선이 접할 때 보조선, 수직 표시
-원주각 $\times 2$ = 중심각
-외접원과 삼각형이 나오는 경우, 삼각형의 꼭지점과 원의 중심을 잇고 반지름 표시!
(단, 정삼각형일 때 무게중심=외심 이용해서 풀면됨!)

STEP 2. 직접 다시 그린 그림에서, 주어진 θ를 포함하는 직각삼각형 말고, 다른 삼각형에 θ로 표현할 수 있는 각을 모두 표시하기

단, 직각삼각형이 주어지지 않을 땐 직접 만들어보고, 만든 직각삼각형이 쓸모있는 것인지 확인! 쓸모없다면 과감하게 다른 쪽으로 생각!

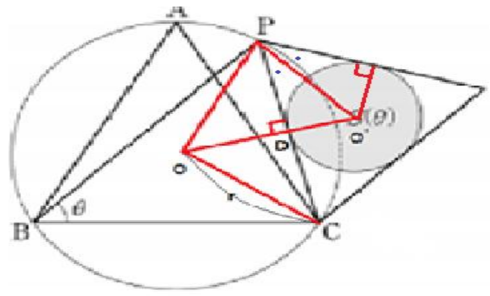
여기가 문제랍니다. 보통 처음에 학생들은 위의 그림을 떠올리는 것보다
습관적으로, 이렇게 직각삼각형 만든다는 거에요
(아닌 척 노노!)



이렇게 만든 직각삼각형 안에선 길이를 θ로 만들어 내기가 힘들어요!

아는 길이가 없으니까.

그래서 그 전에, 우리가 알고있는 원과 삼각형 사이에서 도형의 특징을 먼저 떠올려서
그 특징들을 그림으로 그릴 수 있어야 한다는 겁니다!



이 그림처럼 말이에요!!!
그럼, 원주각과 중심각의 관계에 의해

$\angle POC=2\angle PBC=2\theta$ 이고, $\angle POO'=\theta$ 임을 알 수 있어요!

($\triangle POC$ 가 이등변삼각형 이고, $\overline{OO'}$ 이 $\overline{PC}$ 의 수직이등분선이기 때문에)

처음 그렸던 직각삼각형 말고, $\triangle ODP$에서 생각해보면 되겠네요!

STEP 3. 어떻게 해야 구하라는 것을 θ로 만들 수 있을지 고민하기
+ θ가 포함된 직각삼각형 안에서 닮음, 삼각비, 피타고라스의 정리를 이용해서 길이를 θ로 몽땅 표현하기

구하는 $S(\theta)$ 의 반지름은 내접원과 정삼각형이 나왔으니 $\angle O'PD=\frac{\pi}{6}$

따라서, $\overline{O'D}=\overline{PD}\tan(\frac{\pi}{6})$ 그리고, $\overline{PD}=\overline{OP}\sin\theta$

($\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름($\overline{OP}$)은 , 무게중심=외심 이용해서 풀면됨!)

$\overline{O'D}$ 를 θ에 대해서 표현 가능하고! $S(\theta)=\overline{O'D}^2\pi$ 로 구할 수 있겠죠.

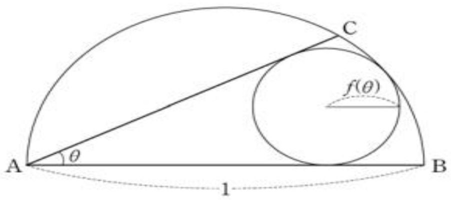
어려운 문제였어요~ 자 그럼 마지막으로 하나만 더 해봅시다!

마지막 문제4

29. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle BAC=\theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

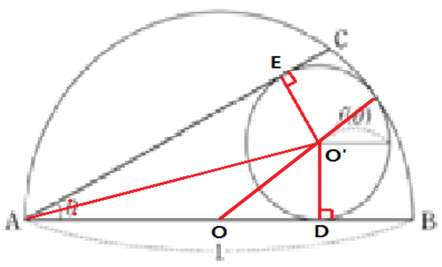
$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\alpha$$

이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



STEP 1. 그림을 직접 다시 그리면서 알고있는 도형의 특징들 모두 표시 (직각, 보조선 등)
+ 주어진 길이, 각 표시

-원위의 점을 원의 중심과 연결하기
-원과 직선이 접할 때 중심과 접점을 잇는 보조선 그리고, 수직 표시
-한 원이 다른 원의 내접할 때, 각 원의 중심과 접점은 일직선상에 있다.
-원에 접하는 두 접선이 있을 때, 두 직선의 교점과 원의 중심 연결하는 보조선 그리고 각을 이등분 시키기 (내접원과 삼각형이 주어질 때와 동일!)



STEP 2. 직접 다시 그린 그림에서, 주어진 θ를 포함하는 직각삼각형 말고, 다른 직각삼각형에 θ로 표현할 수 있는 각을 모두 표시하기

단, 직각삼각형이 주어지지 않을 땐, 직접 만들어보고,
만든 직각삼각형이 쓸모있는 것인지 확인!

$\triangle AO'D$와 $\triangle AO'E$ 가 합동이므로 $\angle AO'D=\frac{\theta}{2}$로 표현가능하고,

직각삼각형 $\triangle AO'D$ 안에서 길이들을 θ로 표현해야 겠다 라고 생각해야함!

'으잉? 근데 , $\triangle AO'D$ 에선 알 수 있는 길이들이 없는데 어쩌지.. 다른 직각삼각형도 찾아봐야하나 ?'

라고 생각했으면 굿!!

STEP 3. 어떻게 해야 구하라는 것을 θ로 만들 수 있을지 고민하기
+ θ가 포함된 직각삼각형 안에서 닮음, 삼각비, 피타고라스의 정리를 이용해서 길이를 θ로 몽땅 표현하기

우선 θ를 포함하고 있는 직각삼각형은 $\triangle AO'D$ 이므로,

이 삼각형 안에서 삼각비를 통해 길이를 θ로 표현할 수 있는 것은

$\overline{AD}=\dfrac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$ 밖에 없고,

또한 $f(\theta)$가 포함되어 있기 때문에 '$f(\theta)$를 구하기 위해선 **또 다른 관계식**이 필요하겠구나'

라는 생각이 필요합니다!

따라서,

반지름 $f(\theta)=\overline{O'D}$ 를 포함하는 또 다른 직각삼각형 $\triangle OO'D$를 써먹어야 합니다!

그 근거는, $\overline{OO'}=\frac{1}{2}-f(\theta)$

로 표현할 수 있고, $\overline{OD}=\overline{AD}-\overline{AO}=\dfrac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\dfrac{1}{2}$ 로

(원에 내접한 또 다른 원이 존재할 때, 각 원의 중심과 접점은 한 직선위에 있음)

모두 $f(\theta)$에 대해 표현 가능 하기 때문에, $\triangle OO'D$ 안에서 **피타고라스의 정리**를

사용해서 $f(\theta)$를 θ에 대해서 정리 가능한거죠!

계산은 여러분에게 맡길게요!!!

어떠세요?

문제 풀어보면서 좀 정리가 되시나요?

도형 문제를 푸는 관점을 다시 잡으시고, 위에서 정리한 삼각함수+도형 문제를 풀기위해서
알아야할 점들을 다시한 번 꼭 정리하셔요!

특히 **원의 대한 성질**은 두 번 , 세 번 꼭꼭!!

그 이 후에 되도록 알려드린 STEP대로 연습해보시면
아마 어느정도 감이 잡히실거라 생각듭니다!

잘 이해 안 되거나 질문사항 있으면 블로그에 댓글 남겨주세요!!

만약 평소에 어려운 단원이 있거나, 정리해줬으면 좋겠다 하는 단원이나 유형 있으면

댓글로 남겨주세요!

그럼 며칠 뒤에 다른 단원으로 다시 뵙죠! 그럼 이만!!!!!