

3일차 과제

1. 두 함수 $f(x)=2^x, g(x)=3^x$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $f(2x)g(2x) = \{f(x)g(x)\}^2$

ㄴ. $a < b$ 이면 $f(-3a)g(2a) < f(-3b)g(2b)$

ㄷ. $a < b$ 이면 $f(4a)g(-3a) > f(4b)g(-3b)$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ, ㄷ 옳!

ㄴ. $a < b$: $(2^{-3})^a \times (3^{-2})^a = \left(\frac{9}{8}\right)^a$
 $(2^{-3})^b \times (3^{-2})^b = \left(\frac{9}{8}\right)^b$
 $\therefore \left(\frac{9}{8}\right)^a < \left(\frac{9}{8}\right)^b$

ㄷ. $2^{4a} \times 3^{-3a} = \left(\frac{16}{27}\right)^a$
 $a < b$: $\left(\frac{16}{27}\right)^a > \left(\frac{16}{27}\right)^b \quad \therefore \textcircled{5}$

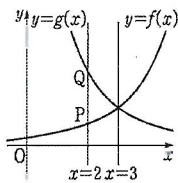
2. 오른쪽 그림과 같이 두 함수

$f(x) = a^{x-m}, g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{x-m}$ 의 그래프는

직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고, 직선 $x=2$ 와 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점을

각각 P, Q라 할 때, $PQ = \frac{3}{2}$ 이다. 이때 상

수 a, m 에 대하여 am 의 값을 구하여라. (단, $a > 1$)



$f(x)$ 를 $x=3$ 에 강제 대칭시키면 $f(6-x)$.

$f(6-x) = g(x) \Leftrightarrow a^{6-x-m} = a^{-x+m}$

$\therefore m = 3.$

$g(2) - f(2) = \frac{3}{2}$

$a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2} \quad \therefore a = 2$

$\therefore 6.$

3. 1이 아닌 양수 a, b 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^x + \log_b x}{b^x + \log_a x} = \frac{1}{4}$$

일 때, $\log_a b$ 의 값을 구하여라.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_b a + a^x}{\log_a a + b^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_b a}{\log_a a} \quad (\because \text{별산})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_a a}{\log_a b}$$

$$= \log_b a = \frac{1}{4}$$

$\therefore 4$

4. 함수 $y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 의 역함수를 $y = \sin^{-1} x$ 라 할 때,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} \frac{x}{2}}{x}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1$$

알지?!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \textcircled{2}$

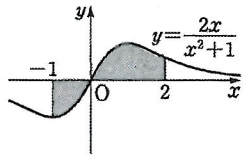
3일차 과제

5. 오른쪽 그림과 같이 곡선

$$y = \frac{2x}{x^2+1}$$

와 x축 및 두 직선

$x = -1, x = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



$$\int_{-1}^0 \frac{-2x}{x^2+1} dx + \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$2x dx = d(x^2+1)$

$$\int_{-1}^0 \frac{-1}{x^2+1} d(x^2+1) + \int_0^2 \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1)$$

$$= [-\ln|x^2+1|]_{-1}^0 + [\ln|x^2+1|]_0^2$$

$$= \ln 10$$

$$= \ln 10$$

6. 곡선 $y = \sin 2x$ 와 이 곡선 위의 점 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $-\frac{\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4}$

② $-\frac{\pi^2}{36} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{1}{2}$

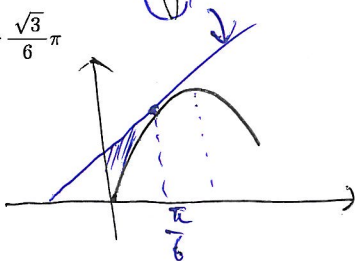
③ $-\frac{\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$

④ $-\frac{\pi^2}{36} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

⑤ $-\frac{\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x$$

$$\textcircled{4} = x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4}$$

∴ ①

7. 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_{-b}^{-a} f(x) dx + \int_a^b f(x) dx = 0$$

이 성립하는 함수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

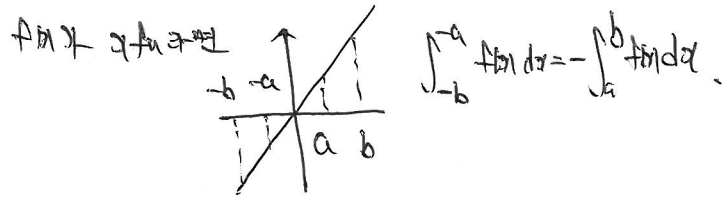
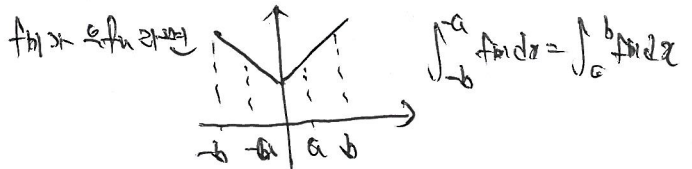
<보기>

ㄱ. $f(x) = x^6 - 1$

ㄴ. $f(x) = x^{2017} + x^{2015}$

ㄷ. $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ



∴ 보기 4)가 맞으므로 ㄹ, ㄷ

8. 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + f(-x) = x^2(e^x + \frac{1}{e^x})$ 이 성립할

때, 정적분 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 의 값은?

① $\frac{2}{e}$ ② $\frac{5}{e}$ ③ $e - 1$

④ $e - \frac{5}{e}$ ⑤ $3e - \frac{5}{e}$

강제 대입

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$= \int_a^b (f(x) + f(a+b-x)) dx$$

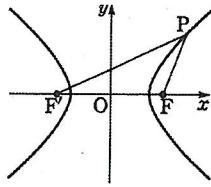
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (f(x) + f(-x)) dx = \int_{-1}^1 x^2 e^x dx + \int_0^1 x^2 e^x dx$$

잘해라, 부분적분~

∴ ④ $e - \frac{5}{e}$

3일차 과제

9. 쌍곡선 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여 세 선분 PF, FF', PF'의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때 $\overline{PF}^2 + \overline{PF}'^2$ 의 값은 (단, $\overline{PF}' > \overline{PF}$)



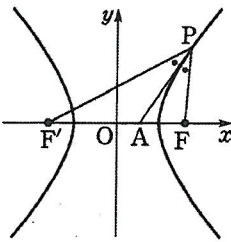
$$\overline{PF}' - \overline{PF} = 10$$

$$\overline{PF}' + \overline{PF} = 2\overline{FF}' = 24$$

$$\overline{PF}' = 17, \overline{PF} = 7$$

∴ 399

10. 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 한 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여 $\angle F'PF$ 의 이등분선이 x축과 만나는 점을 A라 하면 $\overline{F'A} : \overline{FA} = 5 : 3$ 이다. 이때 삼각형 PFF'의 둘레의 길이를 구하여라.



$$\overline{F'A} = \overline{FA} = \overline{PF}' = \overline{PF} = 5 = 3$$

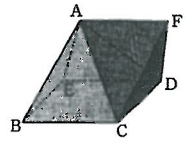
(중요 때 내각이등분선)

$$\overline{PF}' - \overline{PF} = 5a - 3a = 2a = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle PFF' = 8a + 8 = 16\sqrt{3} + 8$$

$$\therefore 8 + 16\sqrt{3}$$

11. 오른쪽 그림은 모든 모서리의 길이가 같은 사각뿔 ABCDE와 정사면체 ACDF가 면 ACD를 공유하도록 붙여 놓은 것이다. 두 면 BCDE와 CDF가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값을 구하여라.

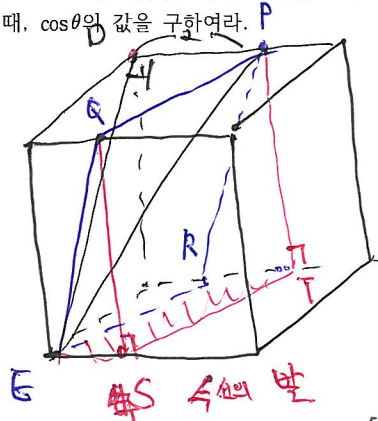
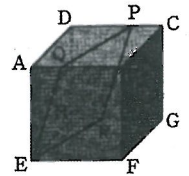


1st. 정사면체 이면각 α
 $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

2nd. 정사각뿔 이면각 β
 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cos\beta = \frac{1}{4}a^2$
 $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3rd. $\theta = \alpha + \beta$
 $\cos\theta = \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체에서 $\overline{AQ} = \overline{CP} = \overline{HR} = 1$ 이다. 평면 PQER와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값을 구하여라.



□ PQR은 바깥쪽
 한면 = $\sqrt{10}$

□ ESTR의 $S' = 3$ (평행사변형)

□ PQRER의 $S = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
 (△EPD의 빗면)

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{11}}{11}$$

3일차 과제

13. 두 구 $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2+z^2-4x+6y-12z+33=0$ 이 점 $P(a, b, c)$ 에서 서로 접할 때, $a+b-c$ 의 값은?

- ① $-\frac{33}{7}$ ② -3 ③ $-\frac{3}{7}$
- ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ 2

(0,0,0) $r_1=3$, (2,3,6) $r_2=4$

$d=7 = r_1+r_2 \therefore$ 외접

P 는 (0,0,0), (2,3,6) $r=4$ 에 붙어

$\therefore a+b-c = -3$

14. 구 $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=6$ 에 접하고 직선 $x-1=y=\frac{z+1}{2}$ 에 수직인 평면의 방정식을 모두 구하여라.

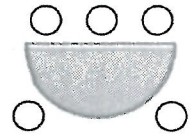
$\vec{n} = (1, 1, 2)$

$x+y+2z = C$

$\frac{|C+1|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$\therefore x+y+2z=5, x+y+2z=-7$

15. 오른쪽 그림과 같은 탁자에 5명이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



맨앞에 앉아서? 5가지

$5 \times 4!$

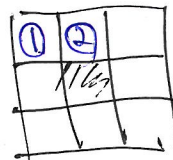
1명과 앉아도 최소열 개질

$\therefore 120$

16. 오른쪽 그림과 같이 정사각형을 9등분한 도형의 각 영역을 서로 다른 9가지 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수는 $k \times 7!$ 이다. 이때 상수 k 의 값을 구하여라.



정사각형 = 9가지



맨앞은 ① or ② 라서

2가지

$9 \times 2 \times 7!$

최소열 개질

$\therefore 18$

3일차 과제

17. 어느 음료수 회사에서 이벤트로 음료수 10명중에서 1명의 비율로 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨를 새겨, 이 뚜껑을 가져온 고객에게는 음료수 한 병을 경품으로 준다고 한다. 이 음료수를 3명 구입한 사람이 경품으로 1명의 음료수를 받을 확률이 $\frac{3^k}{10^4}$ 일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

우선 3명 중 1명에게 1병 경품 받아서 3번 더 하도록

확률이야 ---

$$\frac{1}{10} \times \binom{9}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{3^k}{10^4}$$

$$\therefore k=7$$

18. 어느 호텔을 예약한 사람 중에서 실제로 그 호텔에 투숙하는 사람은 80%라 한다. 방이 20개인 이 호텔에서 같은 날 22개의 예약을 받은 경우 실제로 방이 부족할 확률을 구하여라.
(단, $0.8^{21} = 0.009$, $0.8^{22} = 0.007$ 로 계산한다.)

2명 투숙 + 2명 투숙

$$0.8^{21} \times 0.2 \times 2 + 0.8^{22} = 0.0466$$

$$\therefore 0.0466$$

19. 확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{45}C_x \cdot \frac{2^x}{3^{45}} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 45)$$

일 때, E(X)와 V(X)는?

- ① E(X)=10, V(X)=1
- ② E(X)=10, V(X)=5
- ③ E(X)=15, V(X)=10
- ④ E(X)=30, V(X)=5
- ⑤ E(X)=30, V(X)=10

$$P(X=7) = {}_{45}C_7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{45-7}$$

이는 이항분포.

$$B(45, \frac{2}{3})$$

$$E(X) = 45 \cdot \frac{2}{3} = 30$$

$$V(X) = 45 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 10 \quad \therefore \textcircled{5}$$

20. 한 번의 타석에서 안타칠 확률이 0.2인 야구 선수가 10번의 타석에서 안타를 친 횟수를 확률변수 X라 할 때, $P(X \leq 9)$ 는?

- ① $(\frac{4}{5})^{10}$
- ② $(\frac{4}{5})^{11}$
- ③ $1 - (\frac{1}{5})^9$
- ④ $1 - (\frac{1}{5})^{10}$
- ⑤ $1 - (\frac{1}{5})^{11}$

$$P(X \leq 9) = 1 - P(X=10)$$

10번이면 리타이다 ...

$$= 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

$$\therefore \textcircled{4}$$