촌철살인

다시 만나는 개념

〈기하와 벡터〉 2. 평면벡터



Team SPC

Orbi by move

Orbi Class 인강, 강남점

BLACK BAG



촌철살인 수학 관리자

(최 준 호)

#1-1. 다시 만나는 개념 : 시자벡 기하학적 연산

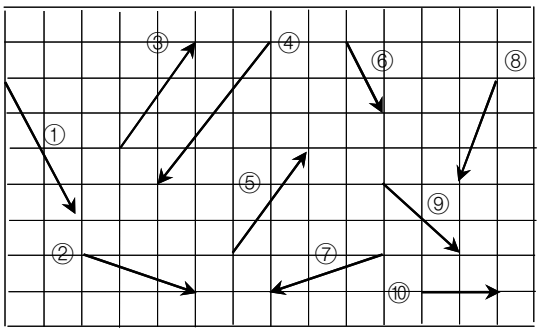
1-1. 시점이 자유로운 벡터의 기하학적인 연산 - 벡터의 합성

기본 용어와 의미

촌철살인 1)다음 주어진 그림을 참조할 때, <보기> 중 옳은 것의 개수는?

<보 기>
ㄱ. ⑦과 크기가 같은 벡터는 2개이다.
ㄴ. ③과 같은 벡터는 존재하지 않는다.
ㄷ. ①과 방향이 같은 벡터 1개이다.

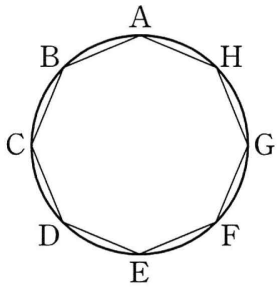
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



촌철살인 2015년 수능특강

2)반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원에 내접하는 정팔각형 ABCDEFGH가 있다. 정팔각형의 꼭짓점을 시점과 종점으로 갖는 벡터 중 서로 다른 단위벡터의 개수는?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20



〈벡터의 수식적 연산〉

촌철살인 3)다음 등식을 만족시키는 $\vec{x}$를 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$로 나타내어라.

(1) $2\vec{x}+\vec{a}=3\vec{a}-4\vec{b}+6\vec{c}$ (2) $2(\vec{x}-3\vec{a})-3(\vec{b}+\vec{x})=4\vec{c}$

촌철살인 4)임의의 네 점 P, Q, R, S에 대하여 $\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{QS}$ 와 같은 벡터는?

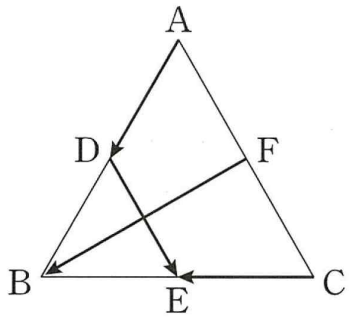
① $\overrightarrow{RQ}$ ② $\overrightarrow{PS}$ ③ $\overrightarrow{SR}$ ④ $\overrightarrow{QS}$ ⑤ $\overrightarrow{RS}$

기본 위치에서 자유로운 벡터의 기하학적인 연산

촌철살인 2015년 수능특강

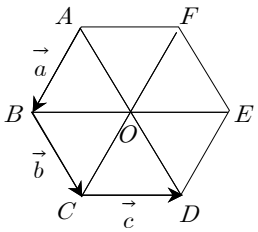
5)정삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라 하자.
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FB}$일 때,
다음 중 $\vec{a}+\vec{b}$와 같은 벡터는?

① $\overrightarrow{AF}$ ② $\overrightarrow{BD}$ ③ $\overrightarrow{CE}$ ④ $\overrightarrow{DC}$ ⑤ $\overrightarrow{EA}$

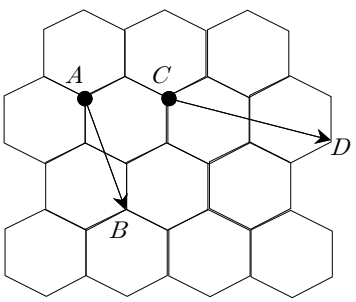


촌철살인 6)다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 $ABCDEF$ 에서
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ 라 할 때, 다음 중 $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|+|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|$은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



촌철살인 7)다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형들이 서로 붙어 있는 벌집 모양의 도형 위에 네 점 A, B, C, D가 있다. 이 때, $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$의 값을 구하여라.

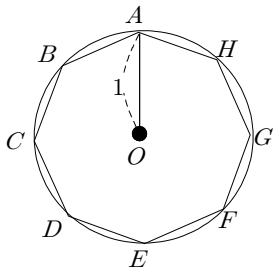


촌철살인 2006. 11. 가형(24%). 20번. 3점

8)타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 두 초점을 F, F'이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$을 만족시킬 때, 선분 PF의 길이는 k이다. $5k$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

촌철살인 9)다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O에 내접하는 정팔각형 $ABCDEFGH$에서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}|$의 값은?

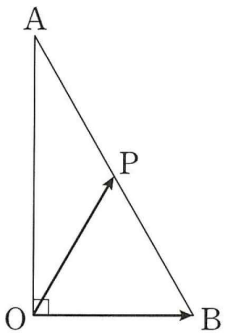
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



촌철살인 2015년 수능특강

10)그림과 같이 $\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{ABO}=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 삼각형 AOB에서 선분 AB위를 움직이는 점을 P라 하자. $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 값이 최소일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$의 값은?

① 0 ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

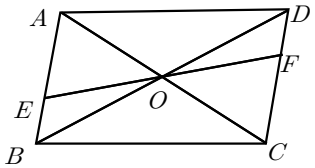


1-2. 시점이 자유로운 벡터의 기하학적인 연산 - 벡터의 분할

기본 평면의 결정조건 : 평면을 결정하라

〈벡터의 기하학적인 연산 : 벡터의 합 분할과 차 분할〉

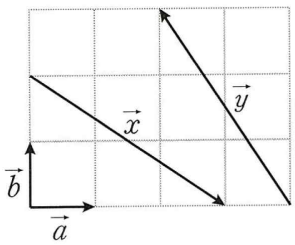
촌철살인 11)그림의 평행사변형 $ABCD$에서 O는 대각선의 교점이고, $AE=2EB$라 한다. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라 할 때, 다음 벡터 $\overrightarrow{OE}$를 $m\vec{a}+n\vec{b}$의 꼴로 나타내었을 때, $30(m-n)$의 값을 구하여라.



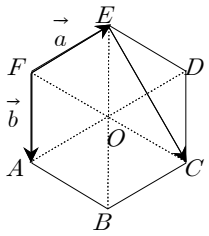
촌철살인 2015년 수능특강

12)합동인 정사각형 12개로 이루어진 모눈종이의 가로줄과 세로줄의 교점을 시점과 종점으로 갖는 네 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$가 그림과 같을 때, $\vec{x}-\vec{y}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 이용하여 나타낸 것은?

① $5\vec{a}-5\vec{b}$ ② $5\vec{a}-3\vec{b}$ ③ $5\vec{a}-\vec{b}$
④ $5\vec{a}+\vec{b}$ ⑤ $5\vec{a}+3\vec{b}$

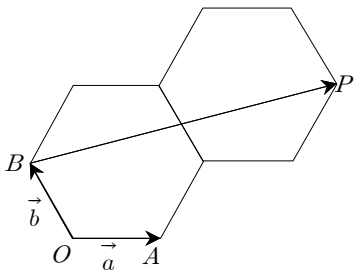


촌철살인 13)그림과 같은 정육각형 $ABCDEF$에서 $\overrightarrow{FE}=\vec{a}, \overrightarrow{FA}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{EC}=s\vec{a}+t\vec{b}$를 만족시키는 실수 s,t에 대하여 $2s-3t$의 값을 구하여라.

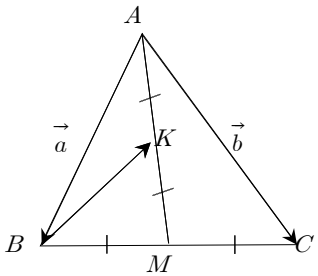


촌철살인 14)그림과 같이 정육각형 2개가 한 변을 공유하고 있다. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{BP}$를 $\vec{a},\vec{b}$로 나타낸 것은?

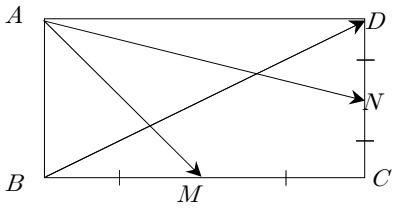
① $4\vec{a}+2\vec{b}$ ② $4\vec{a}+\vec{b}$ ③ $3\vec{a}+2\vec{b}$
④ $3\vec{a}+\vec{b}$ ⑤ $2\vec{a}+4\vec{b}$



촌철살인 15)그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}$의 중점을 M, $\overline{AM}$의 중점을 K라 한다. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{BK}$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$를 사용하여 나타내어라.



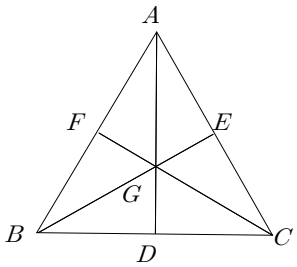
촌철살인 16)다음 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 $2:1$ 인 직사각형 $ABCD$ 에서 두변 BC와 CD의 중점을 각각 M, N 이라 하자.
$\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$ 일 때, 실수 m, n의 합 $m+n$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

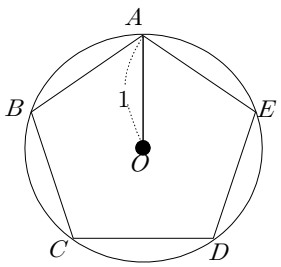
연계 정다각형의 힘의 평형

촌철살인 17)다음 그림과 같이 정삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 하고, 세 중선 AD, BE, CF의 교점을 G라 하자.
다음 중 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 위치는?



① A ② D ③ E ④ F ⑤ G

촌철살인 18)다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O에 내접하는 정오각형 $ABCDE$ 에서 $\square\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\square$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

#1-2. 시점에서 자유로운 벡터의 기하학적 연산 MAP

#2-1. 다시 만나는 개념 : 시고벡 기하학적 연산

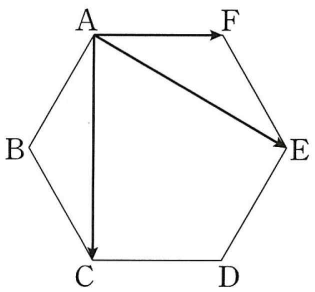
1. 시점이 고정된 벡터의 기하학적인 연산
   - 실수배와 평행
   - 일차독립
   - 분점공식
   - 일직선 위에 있을 조건

기본 실수배의 의미 = 평행

초현실인 2015년 수능특강

19) 그림과 같은 정육각형 ABCDEF에서 $k\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AF}$가 벡터 $\overrightarrow{AE}$와 평행할 때, 실수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



기본 일차독립

초현실인 20) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=k\vec{a}-2\vec{b}$에 대하여 $3\overrightarrow{AC}=m(\vec{a}-\vec{b})$일 때, 실수 k의 값은? (단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

기본 분점공식

촌철살인 2015년 수능특강

21) 서로 다른 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 하고 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하자. $\overrightarrow{PQ}=m\vec{a}+n\vec{b}$일 때, 두 실수 m, n의 곱 mn의 값은? (단, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하지 않다.)

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{16}{9}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{16}{9}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

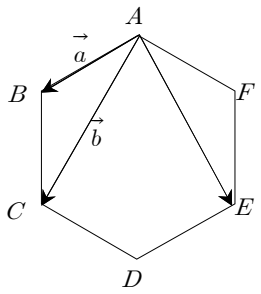
촌철살인 2015년 수능특강

22) $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CA}=4$인 삼각형 ABC의 내심을 I, 점 O를 시점으로 하는 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 하자. $\overrightarrow{OI}=\frac{m\vec{a}+n\vec{b}+2\vec{c}}{9}$일 때, $m-n$의 값은? (단, m, n은 실수이다.)

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

촌철살인 23) 다음 그림과 같은 정육각형 $ABCDEF$ 에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=x\vec{a}+y\vec{b}$ 라 할 때, 실수 x, y에 대하여 $\frac{x}{y}$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$



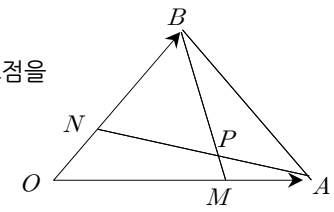
기본 일직선 위에 있을 조건

촌철살인 2015년 수능특강

24)일직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 O, A, B가 있다. 점 O를 시점으로 하는 두 점 A, B의 위치벡터가 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$일 때, 일직선 위에 있는 세 점 P, Q, R의 점 O를 시점으로 하는 위치벡터가 각각 $2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $3\vec{a}-k\vec{b}$이다. 실수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

촌철살인 25)다음 그림과 같은 삼각형 OAB에서 변 OA를 $2:1$로 내분하는 점을 M, 변 OB를 $1:2$로 내분하는 점을 N이라 하고 선분 AN과 선분 BM의 교점을 P라 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{OP}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면?



① $\vec{a}+4\vec{b}$ ② $4\vec{a}+\vec{b}$ ③ $\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$

④ $\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}$ ⑤ $\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}$

2. 시점이 고정된 벡터의 기하학적인 연산 : 벡터 방정식의 해석

촌철살인 26)삼각형 ABC와 그 내부의 한 점 P가 $9\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$을 만족한다.
선분 AP의 연장선과 변 BC의 교점을 D라 할 때, $\overline{AP}:\overline{PD}$는?

① 2 : 9 ② 1 : 3 ③ 4 : 9 ④ 5 : 9 ⑤ 2 : 3

촌철살인 2015년 수능특강 STEP 3

27)평행사변형 ABCD에서 삼각형 ABC의 내부에 있는 점 P와 삼각형 ADC의 내부에 있는 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ (나) $3\overrightarrow{AQ}+4\overrightarrow{DQ}+2\overrightarrow{CQ}=\vec{0}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\triangle PAB : \triangle PCA = 2 : 3$

ㄴ. $\triangle QAC : \triangle QCD : \triangle QDA = 4 : 3 : 1$

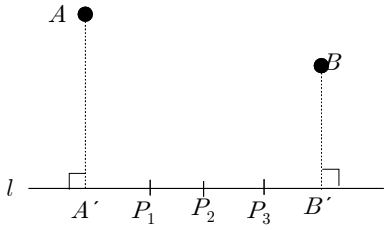
ㄷ. 평행사변형 ABCD의 넓이는 사각형 APCQ의 넓이의 $\frac{36}{17}$배이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

연계 기하학적으로 푸는 최대 · 최소

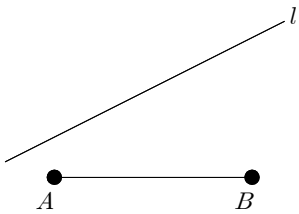
촌철살인 28)그림과 같이 정직선 l과 두 정점 A,B가 있다. 동점 P가 직선 l을 따라 움직일 때, 벡터 $\frac{1}{4}(\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB})$의 크기가 최소가 되는 동점 P의 위치는?

(단, 그림에서 $AA'\perp l$, $BB'\perp l$이고, P_1,P_2,P_3는 선분 AB의 사등분점이다.)



① A' ② P_1 ③ P_2 ④ P_3 ⑤B'

촌철살인 29)다음 그림과 같이 선분 AB와 직선 l이 있다. 직선 l 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\square\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}\square$의 값이 최소가 되는 점 P의 위치를 바르게 말한 것은?



① $\overline{AB}$에 수직이고 점 A를 지나는 직선과 직선 l이 만나는 점
② $\overline{AB}$에 수직이고 점 B를 지나는 직선과 직선 l이 만나는 점
③ $\overline{AB}$를 $1:4$로 내분하는 점에서 직선 l에 내린 수선의 발
④ $\overline{AB}$를 $4:1$로 내분하는 점에서 직선 l에 내린 수선의 발
⑤ $\overline{AB}$를 $4:1$로 내분하는 점을 지나고 $\overline{AB}$에 수직인 직선이 직선 l이 만나는 점

3. 벡터의 수식적 연산 : 벡터의 성분 표시와 기본성질

기본 성분조건에서 벡터의 합 · 차 · 곱 · 실수배 · 서로 같을 조건, 크기

초현살인 2004. 10. 가형(91%). 18번. 3점

30)세 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(x,\ -1)$, $\vec{c}=(-4,\ y)$ 에 대하여 $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$가 성립할 때, 두 실수 $x,\ y$의 곱을 구하시오.

초현살인 2015년 수능특강

31)세 벡터 $\vec{a},\ \vec{p_1},\ \vec{p_2}$가 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{p_1}=(1,\ 1)$, $\vec{p_2}=(0,\ 1)$일 때, $\vec{a}=m(\vec{p_1}+\vec{p_2})+n(\vec{p_1}-\vec{p_2})$이다. 두 실수 $m,\ n$에 대하여 $m-n$의 값은?

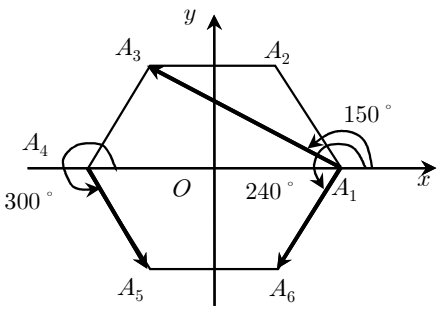
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

촌철살인 32) $\vec{a}=(-6,\ 3)$과 반대 방향인 단위벡터를 구하여라.

연계 성분으로 나타내기 1 - 좌표의 상황

촌철살인 33) $A(1,1),\ B(0,3),\ C(2,-1),\ D(-1,-2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{DE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}$일 때,
점 E의 좌표를 구하여라.

촌철살인 34) 그림은 한 변의 길이가 1인 정육각형이다.
이 때, $\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_4A_5}-2\overrightarrow{A_1A_6}$의 성분을 구하여라.



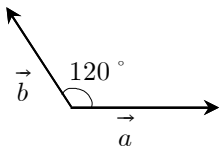
#2-2. 시점이 고정된 벡터의 기하학적인 연산 MAP

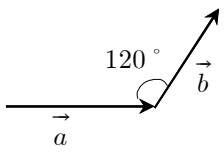
#3-1. 다시 만나는 개념 : 벡터의 내적

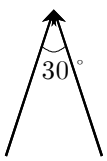
1. 벡터의 내적
   - 정의
   - 기하학적 느낌 : 정사영 길이 곱
   - 성분

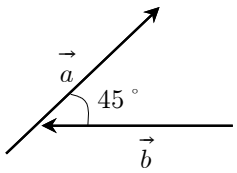
기본 두 벡터가 이루는 각

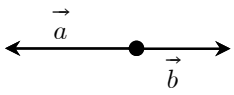
촌철살인 35) 다음 그림에서 두 벡터가 이루는 각을 구하시오,

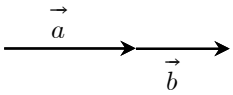
(1) 

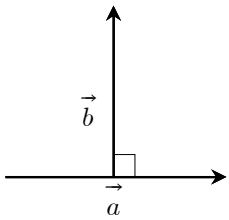
(2) 

(3) 

(4) 

(5) 

(6) 

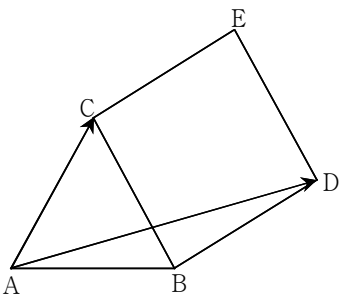
(7) 

기본 내적의 계산관점 1 : 정의

촌철살인 2007. 사관학교. 이과. 6번. 3점

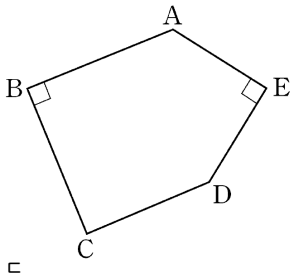
36)평면 위에 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC와 정사각형 BDEC가 그림과 같이 변 BC를 공유하고 있다. 이 때, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ 의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$



촌철살인 2009. 11. 가형(61%). 14번. 4점

37)평면에서 그림의 오각형 ABCDE 가 $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$, $\angle B=\angle E=90^o$ 를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보기>

ㄱ. 선분 BE 의 중점 M 에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ 와 $\overrightarrow{AM}$ 은 서로 평행하다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$

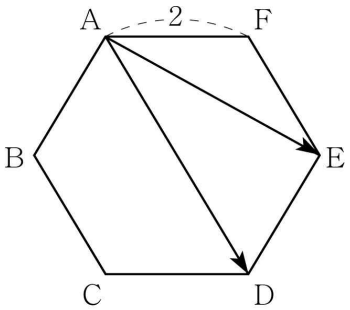
ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기본 내적의 계산관점 2 : 정사영 길이 곱

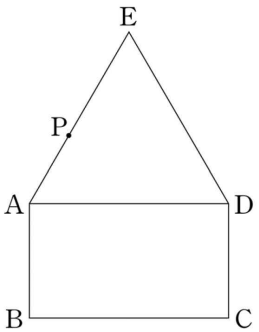
촌철살인 2009. 10. 가형(87%). 19번. 3점

38)그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정육각형 $ABCDEF$ 가 있다. 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ 의 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$ 의 값을 구하시오.



촌철살인 2010. 9. 가형(39%). 14번. 4점

39)평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 $ABCD$와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$ 의 값은 일정하다.

ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

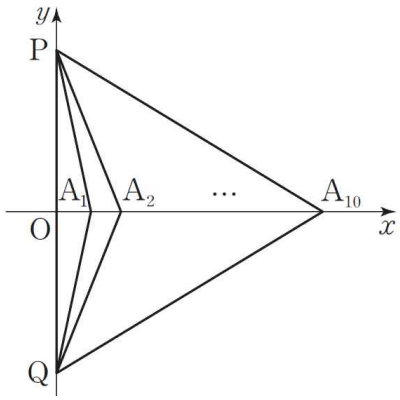
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기본 내적의 계산관점 3 : 성분을 이용한 계산

촌철살인 2014년 수능완성

40)그림과 같이 좌표평면에 두 점 $\mathrm{P}(0,\ 6)$, $\mathrm{Q}(0,\ -6)$과 10개의 점 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$이 있다.

$\sum_{k=1}^{10}\overrightarrow{\mathrm{PA}_k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QA}_k}$의 값을 구하시오.



촌철살인 2005. 11. 가형(78%). 4번. 3점

41)좌표평면 위에 원점 O를 시점으로 하는 서로 다른 임의의 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 있다. 두 벡터의 종점 P, Q를 x 축 방향으로 3만큼, y 축 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 점을 각각 P', Q'이라 할 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}|=\sqrt{10}$ ㄴ. $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}|$ ㄷ. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 내적의 연산법칙

- 크기를 제곱하여 두 벡터가 이루는 각을 구한다.
- 크기를 제곱하여 내적의 연산을 이용하여 크기를 구한다.
- 성분으로 상황이 나온 경우 연산법칙을 쓰지 않는다.

〈내적의 연산법칙 1 : 기본〉

촌철살인 42)두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이고, $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=6$일 때, $(3\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b})$의 값은?

① $12(1+\sqrt{3})$ ② $12(1+2\sqrt{3})$ ③ $12(2+\sqrt{3})$ ④ $12(2+2\sqrt{3})$ ⑤ $12(1+3\sqrt{3})$

〈내적의 연산법칙 활용 1 : 양변 제곱 - 각 구하기, 내적 값 구하기〉

촌철살인 2004. 9. 가형(89%). 3번. 2점

43)크기가 1인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$을 만족할 때, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각 θ의 크기는? (단, $0 \leq \theta \leq \pi$)

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

촌철살인 2014년 수능완성

44)영벡터가 아닌 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 $2|\vec{a}|=|\vec{b}|=2|\vec{c}|$ 이고 $2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$가 성립한다.
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{3}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{5}{8}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{8}$

촌철살인 2011. 사관학교. 이과. 3번. 2점

45)두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{a}+\vec{b}|=7$을 만족시킬 때, $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$의 값은?

① -1 ② -3 ③ -5 ④ -7 ⑤ -9

〈내적의 연산법칙 활용 2 : 양변 제곱 - 벡터의 크기 구하기〉

촌철살인 2015년 수능특강

46)삼각형 ABC와 이 삼각형의 내부에 있는 한 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\triangle APB : \triangle BPC : \triangle CPA = 1:2:3$ (나) $|\overrightarrow{AB}|=4$, $|\overrightarrow{AC}|=6$ (다) $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$

이때 $|\overrightarrow{AP}|$의 값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{15}$

3. 성분조건과 두 벡터가 이루는 각

〈내적의 활용 : 수직조건〉

촌철살인 2011. 9. 가형(93%). 2번. 2점

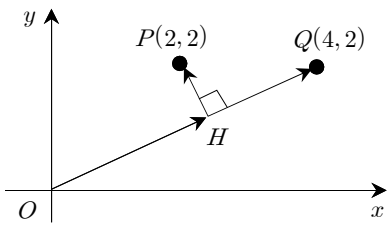
47)두 벡터 $\vec{a}=(x+1,2), \vec{b}=(1,-x)$가 서로 수직일 때, x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 48)그림과 같은 두 벡터 $\overrightarrow{HP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 서로 수직일 때, 벡터 $\overrightarrow{OH}$의 성분표시는?

① $(\frac{12}{5}, \frac{6}{5})$ ② $(\frac{12}{5},1)$ ③ $(\frac{11}{5},\frac{6}{5})$

④ $(\frac{11}{5},\frac{4}{5})$ ⑤ $(\frac{12}{5},\frac{7}{5})$

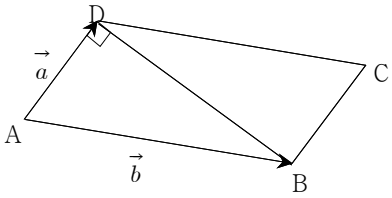


촌철살인 49) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{a}+\vec{b}|=7$이고 $\vec{a}+k\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, 실수 k의 값은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

촌철살인 2009. 사관학교. 이과. 22번. 4점

50) 그림과 같은 $\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\angle ADB=90^\circ$ 인 평행사변형 ABCD에서 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$라 놓는다. 꼭짓점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AE}=k(\vec{a}+\vec{b})$를 만족시키는 실수 k의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

4. 기하학적인 최대 · 최소

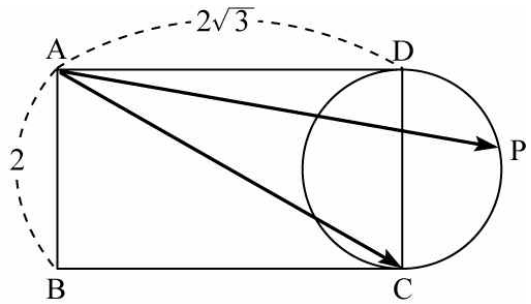
- 벡터 분할과 정사영 길이 곱

〈기하학적으로 푸는 최대 · 최소 : 정사영 길이 곱〉

촌철살인 2010. 10. 가형(58%). 11번. 4점

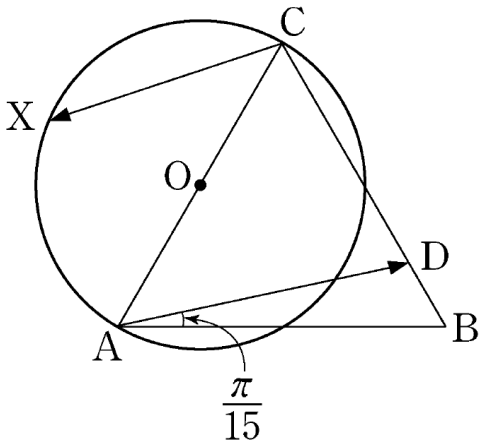
51)그림은 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD 와 이 직사각형의 한 변 CD 를 지름으로 하는 원을 나타낸 것이다. 이 원 위를 움직이는 점 P 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$ 의 내적 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 의 최댓값은? (단, 직사각형과 원은 같은 평면 위에 있다.)

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20



초현살인 2010. 11. 가형(14%). 22번. 4점

52)그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC위의 점 D를 $\angle DAB=\frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O위를 움직일 때, 두 백터 $\overline{AD}, \overline{CX}$의 내적 $\overline{AD}\cdot\overline{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP=\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



초현살인 2012. 11. 가형(63%). 26번. 4점

53)한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〈식으로 푸는 최대 · 최소〉

촌철살인 2015년 수능특강

54)원점이 O인 좌표평면에 포물선 $y^2=2x$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 시점을 O로 하는 두 점 P, Q의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$라 할 때, 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$의 내적 $\vec{p}\cdot\vec{q}$의 최솟값은?

① -4 ② -1 ③ $-\frac{1}{4}$ ④ 0 ⑤ $\frac{1}{4}$

촌철살인 2014년 수능완성

55)좌표평면에 포물선 $y^2=8x$와 한 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$이 있다. 포물선 위의 점 P와 포물선의 초점 F에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FP}}$의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

#3-2. 벡터의 내적 MAP

#4-1. 다시 만나는 개념 : 평면 위의 운동

1. 수직선 위의 운동과 평면 위의 운동

기본 수직선 위의 운동, 평면 위의 운동

촌철살인 2014. 6. 종로. B형. 3점

56) 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=e^t\ln(t+1)+\dfrac{e^t}{t+1}$ 이라고 하자. $t=1$ 일 때의 점 P 의 좌표는? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

① 1 ② e ③ e^2 ④ $e\ln 2$ ⑤ $2e\ln 2$

촌철살인 2012. 3. 가형(60%). 9번. 3점

57)원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치 x_{P}, x_{Q}는 다음과 같다.

$$x_{\mathrm{P}} = t^2 - at,\ x_{\mathrm{Q}} = \ln(t^2 - t + 1)$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 시각 t의 범위가 $\frac{1}{2} < t < 2$일 때, 실수 a의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

촌철살인 2012. 사관학교. 이과. 4번. 3점

58)좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 x, y좌표가 각각 $x = t - \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$일 때, 점 P의 속력의 최댓값은? (단, $t \geq 0$)

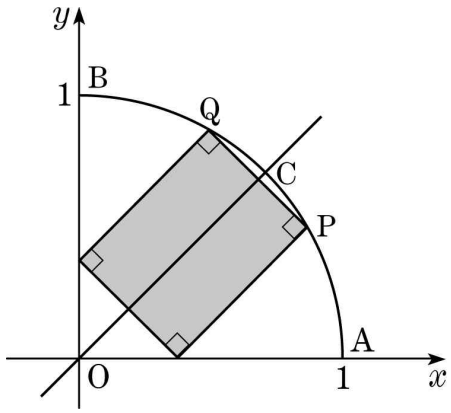
① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

〈변화율 문제〉

초현살인 2011. 3. 가형(29%). 20번. 4점

59)그림과 같이 좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 사분원 OAB에 대하여 각 AOB를 이등분하는 직선이 사분원과 만나는 점을 C라 하자. 두 점 P, Q는 점 C에서 동시에 출발하여 사분원의 둘레를 따라 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{36}$의 일정한 속력으로 움직인다.

두 점 P, Q가 점 C에서 출발하여 t초$(0<t<9)$가 되는 순간, 선분 PQ를 한 변으로 하고 사분원 OAB에 내접하는 직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하자. 출발한 지 6초가 되는 순간, 넓이 $S(t)$의 시간(초)에 대한 변화율은?

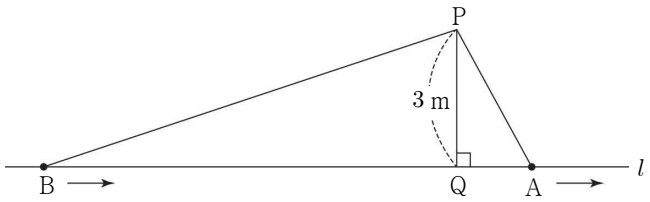


① $\frac{1-\sqrt{3}}{36}\pi$ ② $\frac{1-\sqrt{3}}{72}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}-1}{72}\pi$

④ $\frac{\sqrt{3}-1}{36}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$

초현살인 2013. 4. B형(49%). 21번. 4점

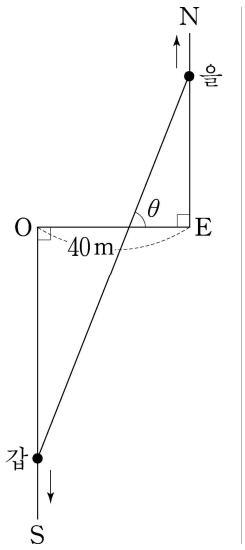
60)그림과 같이 두 정점 P, Q 사이의 거리가 3 m이고, 점 Q를 지나고 선분 PQ에 수직인 직선을 l이라 하자. 점 A가 점 Q에서 출발하여 직선 l을 따라 초속 1 m의 일정한 속력으로 움직일 때, 직선 l 위의 점 B는 $\overline{AP}+\overline{PB}=20\,(\mathrm{m})$을 만족시키며 점 Q쪽으로 움직이고 있다. $\overline{AQ}=4\,(\mathrm{m})$가 되는 순간, 선분 BQ의 길이(m)의 시간(초)에 대한 변화율은?



① $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

촌철살인 2005. 11. 가형(52%). 29번. 4점

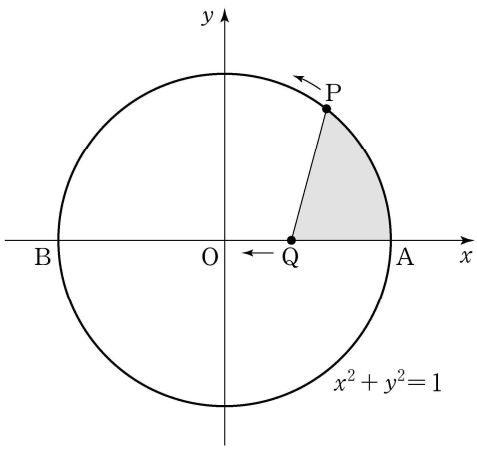
61) 지점 O와 지점 E 사이의 거리는 40m이다. 아래 그림과 같이 갑은 지점 O에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 OS를 따라 초속 3m의 일정한 속력으로 달리고, 을은 갑이 출발한 지 10초가 되는 순간 지점 E에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 EN을 따라 초속 4m의 일정한 속력으로 달리고 있다. 갑과 을의 지점을 연결하여 만든 선분과 선분OE가 만나서 이루는 각을 θ (라디안)라 할 때, 갑이 출발한 지 20초가 되는 순간 θ의 변화율은?



① $\frac{21}{290}$ 라디안/초 ② $\frac{13}{290}$ 라디안/초 ③ $\frac{7}{290}$ 라디안/초
④ $\frac{3}{290}$ 라디안/초 ⑤ $\frac{1}{290}$ 라디안/초

촌철살인 2007. 11. 가형(57%). 29번. 4점

62) 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P는 점 $A(1,0)$에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{2}$의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 Q는 점 A에서 출발하여 점 $B(-1,0)$을 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 x축 위를 움직이고 있다. 점 P와 점 Q가 동시에 점 A에서 출발하여 t초가 되는 순간, 선분 PQ, 선분 QA, 호 AP로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 출발한 지 1초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은?



① $\frac{\pi}{4}-1$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}+1$

촌철살인 2009. 10. 가형(60%). 29번. 4점

63)좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치벡터를 $\vec{p}=(x, y)$라 하면

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

이 성립한다. 이 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $t=1$에서 점 P의 속도 $\vec{v}$와 위치벡터 $\vec{p}$는 서로 수직이다.

ㄴ. 임의의 시각 t에서 점 P의 가속도 $\vec{a}$와 위치벡터 $\vec{p}$는 서로 같다.

ㄷ. 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리는 1 이상이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 2009. 11. 가형(41%). 30번. 4점

64)좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치 $(x,\ y)$ 가

$\begin{cases}x=4(\cos t+\sin t)\\ y=\cos 2t\end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ 이다. 점 P 가 $t=0$ 에서 $t=2\pi$ 까지 움직인 거리 (경과 거리)를 $a\pi$ 라 할 때, a^2 의 값을 구하시오.

기본 곡선의 길이

촌철살인 2007. 11. 가형(38%). 30번. 4점

65) $x=0$에서 $x=6$까지 곡선 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$의 길이를 구하시오.

촌철살인 2007. 9. 가형(57%). 27번. 3점

66) 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고

$$f(0)=0,\quad f(1)=\sqrt{3}$$

을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $1+\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

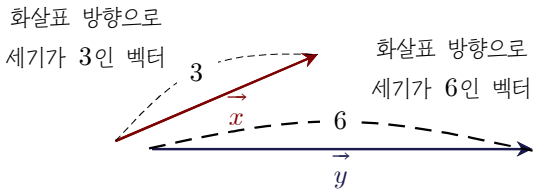
촌철살인 67) 함수 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 에 대하여 $\int_0^1 \sqrt{1+\{f(x)\}^2}\,dx$ 의 값은?

① $2\left(e+\frac{1}{e}\right)$ ② $e+\frac{1}{e}$ ③ $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$ ④ $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ ⑤ $e-\frac{1}{e}$

Ⅲ-1. 수직선 위의 운동과 벡터

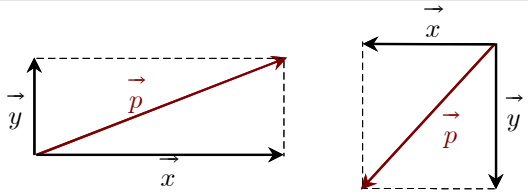
1) 벡터 기본 : 어떤 움직임을 분석하기 위해서 두 가지 물리량이 필요하다. 벡터는 **방향**과 **세기**를 동시에 표현하는 물리량으로 매우 실용적이고 직관적이다. 벡터는 기본적으로 화살표로 표시한다.

1-1) 벡터의 화살표 표시



매우 직관적이고 현실적인 좋은 표현이다.
화살표의 길이를 벡터의 크기라 하고 〈절댓값의 표현〉을 이용한다. 즉, $|\vec{x}| = 3$, $|\vec{y}| = 6$

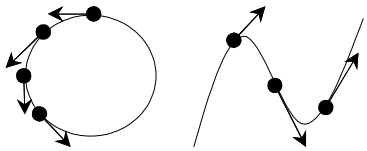
1-2) 벡터의 분석



평면에서 벡터는 x축에 평행한 방향과 y축에 평행한 방향 **두 방향의 힘의 합으로 분석**된다.
$\vec{x} + \vec{y} = \vec{p}$임을 받아들이자. 어차피 응용하지 않는다.

1-3) 방향이 일정하지 않은 운동

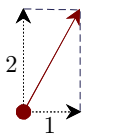
방향이 일정하지 않은 운동에서 물체가 움직이는 방향은 순간에서의 접선의 방향이다.



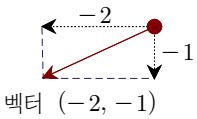
1-4) 벡터로 표시하는 양

우리가 벡터로 분석하는 양은 변위, 속도, 가속도이다.
이 중에서 우리가 주로 다루는 양은 〈속도〉이다.
속도는 우리가 일상생활에서도 많이 쓰이므로 생소하지 않을 것이다. 어떤 물체의 속도(방향과 빠르기)를 분석하기 위해서 탄생한 함수가 바로 매개변수 함수이다.
빠르기를 다른 말로 속력이라고 한다.

참고 1 우리가 앞으로 나타내는 좌표는 그 자체로 벡터이다. 이것은 **벡터의 성분표시**에서 배우지만 지금은 그냥 자체로 받아들이도록 한다.
좌표로 표현된 벡터는 어떤 기준점으로부터 x축과 평행한 벡터와 y축과 평행한 벡터의 합이다.

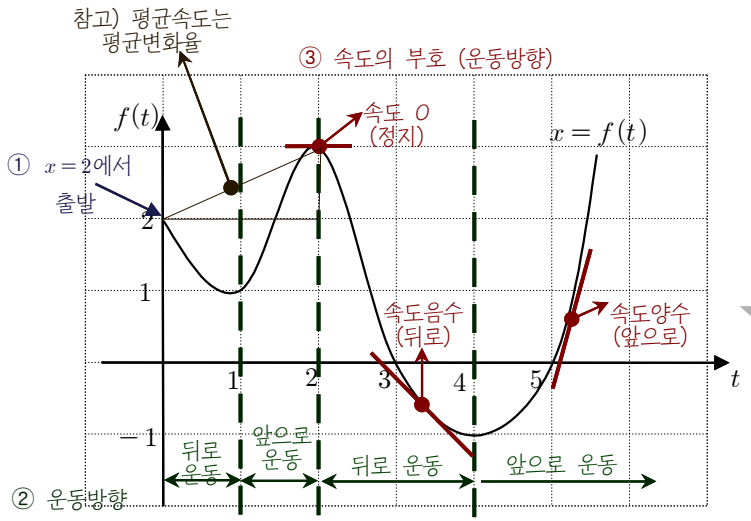


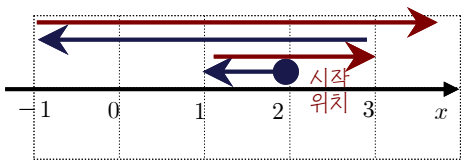
벡터 $(1,2)$



벡터 $(-2,-1)$
시작하는 위치는 상관없다.

2) 시간 - 위치 그래프의 해석

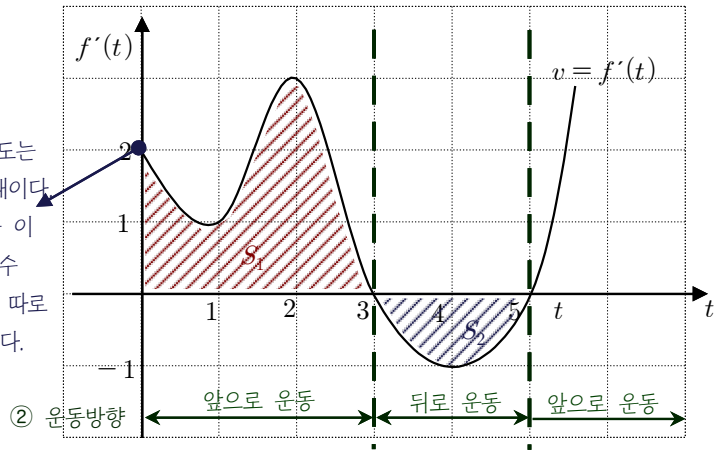




이 그림에서는 시간이 표시되지 않는다.
그러므로 속력(빠르기) 또한 예측되지 않는다.
위의 그래프는 그것을 알 수 있다. 위의 그래프로 이 그림으로 상상 되어야 한다.

실제로는 앞뒤로 움직일 뿐

3) 시간 - 속도 그래프의 해석



① 출발할 때 속도는 이미 2(m/s)인 상태이다. 출발할 때 위치는 이 그래프로는 알 수 없으므로 문제에서 따로 조건으로 주어진다.

② 운동방향

③ 가속도는 중요한 주제가 아니고, 물리적 성향이 강하다. 그냥 눈에 보이는 함수에서 접선의 기울기가 가속도이다. 이 정도로 넘어간다.

④ 보이는 부분의 면적의 이동거리

운동방향은 철저하게 함숫값을 본다. 이 함수가 속도함수임을 잊지 말자.

★ a초에서 b초 동안 위치변화량은 $\int_a^b v(t)dt$이다.

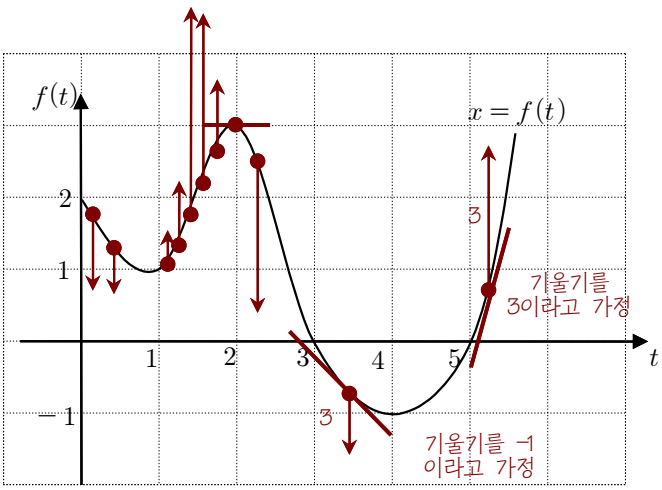
★ 출발하여 a초가 지난 후 위치는 $f(0)+\int_0^a v(t)dt$이다.

★ 출발하여 t_1초 동안의 이동거리는 $\int_0^{t_1} |v(t)|dt$이다.

4) 기울기 ➡ 벡터 : 표현의 진화

오른쪽과 같이 기울기를 벡터의 표현으로 바꿈으로서 우리는 실제 움직임을 훨씬 직관적으로 표현할 수 있다.

실제로 오른쪽 그래프에서 어떤 순간에 물체는
〈화살표의 방향〉으로
〈화살표의 길이만큼의 속도〉로 움직인다.



Ⅲ-2. 평면 위의 운동과 벡터

1) 매개변수 함수 (예시를 통한 이해)

(그림 1)

위치 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$: $t=1$(초)일 때 $(1,1)$ ➡ $t=2$(초)일 때 $(2,4)$

속도 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=1 \\ \dfrac{dy}{dt}=2t \end{cases}$: $t=1$(초)일 때 $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=1}=1$, $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=1}=2$

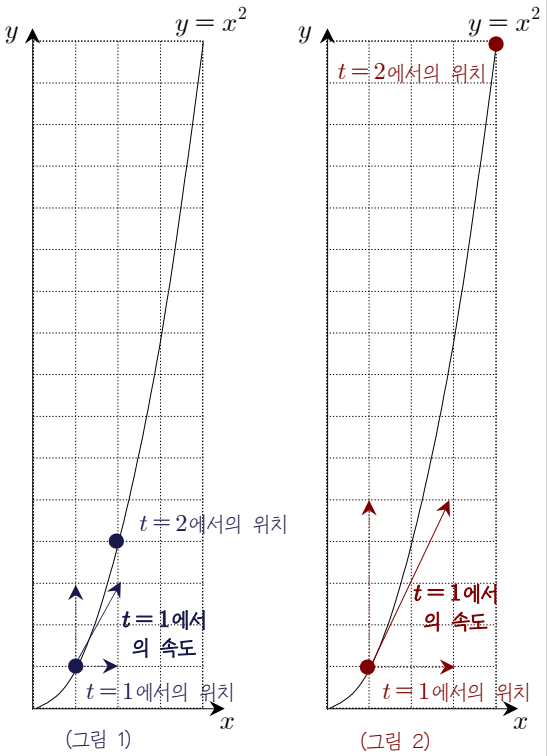
$t=1$인 **순간의 속력(빠르기)**은 오른쪽 푸른색 화살표의 길이와 같으므로 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ 이다.

(그림 2)

위치 $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^4 \end{cases}$: $t=1$(초)일 때 $(1,1)$ ➡ $t=2$(초)일 때 $(4,16)$

속도 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2t \\ \dfrac{dy}{dt}=4t^3 \end{cases}$: $t=1$(초)일 때 $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=1}=2$, $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=1}=4$

$t=1$인 **순간의 속력(빠르기)**은 오른쪽 붉은색 화살표의 길이와 같으므로 $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$ 이다.



2) 일반화

2-1) 눈에 보이는 그대로 움직인다.

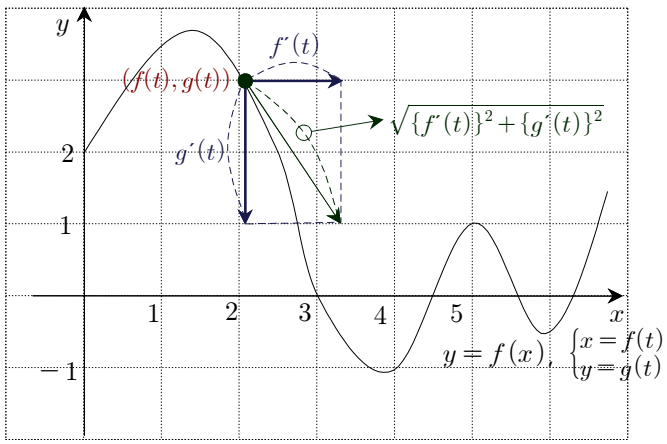
: 우리가 하늘에서 땅을 볼 때 실제 어떤 물체가 구불구불한 오솔길을 따라 가는 것을 상상하면 된다. 여기에는 t축은 눈에 보이지 않는다.

2-2) 위치는 좌표로 속도는 벡터로 표현.

즉, 시간이 t일 때의 위치는 $(f(t),g(t))$

시간이 t일 때의 속도는 $(f'(t),g'(t))$

시간이 t일 때의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$



2-3) 이동거리 : 멋진 식.... 의미를 있는 그대로 읽어주기

$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 의 매개변수로 표현된 <위치함수>에서 속도는 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (f'(t), g'(t))$

속력은 $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}$

속력에 아주 작은 찰나의 시간(무한소를 기호화 시킨 것) dt를 곱해주면 찰나의 이동거리가 나온다.
거기에 실수계의 시그마를 취해주면 시간의 연속적 변화에 따른 찰나의 이동거리의 합이 나온다.

t초인 순간의 찰나의 이동거리 ➡ $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

즉, $t=a$에서 $t=b$까지 이동거리는 ➡ $\int_a^b |\vec{v}|dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt$

Ⅲ-3. 곡선의 길이 ; $y=f(x)$라는 함수에서 $x=a$에서 $x=b$까지 의 곡선의 길이는 <평면 위에서의 운동>의 내용을 활용

$y=f(x)$라는 함수에서 $x=a$에서 $x=b$까지의 곡선의 길이는

1 단계 ➡ $\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}$ 라고 두어 매개변수로 식을 표현하면 <속도>처럼 식을 해석할 수 있다.

2 단계 ➡ 그러면 <속도>는 $\vec{v}=\left(1, \frac{dy}{dt}\right)=(1, f'(t))$이고, <속력>은 $|\vec{v}| = \sqrt{1^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1+(f'(t))^2}$이다.

3 단계 ➡ $x=t$이므로 $x=a$이면 $t=a$이고, $x=b$이면 $t=b$이다.

즉, $t=a$에서 $t=b$까지 이동거리라고 생각하면 $\int_a^b |\vec{v}|dt = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$

4 단계 ➡ $x=t$이므로 t 대신 x로 표현할 수도 있다. 즉, $x=a$에서 $x=b$까지의 곡선의 길이는

$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

참고 1 매개변수 함수에서 우리가 배운 $\frac{dy}{dx}$의 의미 : $\frac{dy}{dx}$는 속도가 아니다. 속도는 위에서도 언급했듯이 $(f'(t), g'(t))$

앞에서도 언급했듯이 어떤 곡선궤도를 움직이는 물체는 순간순간 방향이 바뀌는 운동을 하고 어떤 순간의 움직이는 방향은 그 순간의 접선의 기울기이다. $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$은 위에 그래프에서 보이는 것과 같이 초록색 직선의 기울기이고 이것을 속도의 방향이라고 한다.

이것은 정확히 $y=f(x)$ 위의 점 $(f(t), g(t))$에서의 접선의 기울기와 일치한다.

참고 2 가속도는 두 번 미분하여 좌표(벡터)로 표현한다. 속도처럼 의미를 자세히 알기보다는 계산법과 용어만 안다. $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$로 표현되는 함수의 가속도는 $\vec{a} = (f''(t), g''(t)) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$이다.

가속도의 크기 역시 각 좌표를 제곱해서 더한다. 즉. $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{(f''(t))^2+(g''(t))^2}$

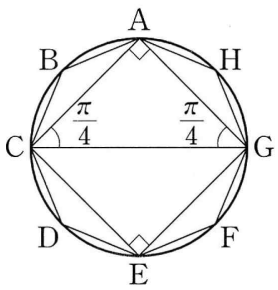
참고 3 매개변수 함수의 이계도함수가 중요도가 떨어지는 이유

함수가 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$로 주어져 있을 때, 이계도함수는 $\frac{d^2y}{dx^2}$이다. 만약 잘못 생각해서 $\frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}$이라고 하게 된다면 이것은 계산해보면 $\frac{d^2y}{dx^2}$이 아니라 $\frac{d^2y}{d^2x}$이 된다. 그래서 우리는 t로 표현된 매개변수 함수의 도함수에서 이계도함수를 구할 때는 약간의 테크닉을 이용하여 $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\times\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\times\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$과 같이 구하게 된다는 사실을 이미 앞에서 언급한 바 있다. 하지만 사실 $\frac{d^2y}{dx^2}$은 매개변수로 표현된 함수에서는 많이 구하는 식이 아니다, 어떤 중요한 의미를 담지 않기 때문이다. 사실 $y=f(x)$함수 입장에서는 이계도함수가 아니지만 $\frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}$은 〈가속도의 방향〉이라는 중요한 의미를 가지고 있기 때문에 웃기게도 우리가 이계도함수라고 잘못 생각한 식이 사실은 훨씬 중요한 식이었다.

#4-2. 평면 위의 운동 MAP

1) 답. ③

2) **정답** ②



선분 CG는 원의 지름이므로 지름에 대한 원주각 $\angle CAG=\frac{\pi}{2}$이다. 이때 $\overline{AC}=\overline{GA}$이므로 삼각형 ACG는 직각이등변삼각형이다. $\overline{CG}=\sqrt{2}$에서 $\overline{AC}=\overline{GA}=\overline{CG}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

삼각형 ECG에서도 같은 방법으로 생각하면

$\overline{CE}=\overline{EG}=1$

이므로 사각형 ACEG는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다.

이때 네 벡터 $\overrightarrow{AC}(=\overrightarrow{GE}), \overrightarrow{CE}(=\overrightarrow{AG}), \overrightarrow{EG}(=\overrightarrow{CA}), \overrightarrow{GA}(=\overrightarrow{EC})$가 단위벡터이다.

마찬가지로 사각형 BDFH도 한 변의 길이가 1인 정사각형이다.

이때, 네 벡터 $\overrightarrow{BD}(=\overrightarrow{HF}), \overrightarrow{DF}(=\overrightarrow{BH}), \overrightarrow{FH}(=\overrightarrow{DB}), \overrightarrow{HB}(=\overrightarrow{FD})$가 단위벡터이다. 따라서 서로 다른 단위벡터의 개수는 8이다.

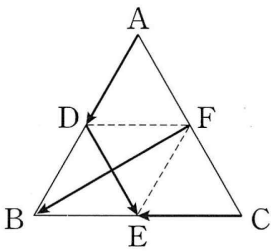
3) 답. (1) $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ (2) $-6\vec{a}-3\vec{b}-4\vec{c}$

4) 답. ②

$\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{RQ}+(\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SR})+\overrightarrow{QS}$

$=\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QS}=(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ})+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$

5) **정답** ①



그림에서 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{CE}=\overrightarrow{FD}$이므로 $\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FB}$

또 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FC}$이므로 $\vec{b}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{BC}$

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AF}$

[다른 풀이]

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE})+(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FB})$

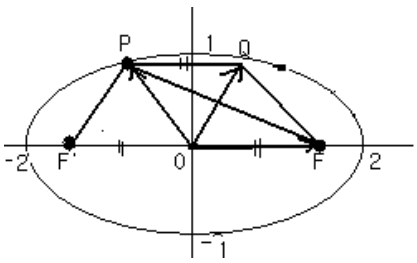
$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}$ ($\because \overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EB}, -\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{BF}$)

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}$

6) 답. ④

7) 답. 3

8) 답 : 15



장축의 길이가 $2\times2=4$이므로 타원의 정의에 의해 $\overline{PF'}+\overline{PF}=4$

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OQ}$라 하면 위의 그림에서 사각형 OFQP가 평행사변형이다. $\therefore |\overrightarrow{OQ}|=1$

이 때, $\overline{OF'}=\overline{OF}=\overline{PQ}$이고 $\overline{OF'}//\overline{PQ}$이므로 사각형 PF'OQ도 평행사변형이다.

$\therefore \overline{PF'}=\overline{OQ}=1 \quad \therefore \overline{PF}=(\overline{PF}+\overline{PF'})-\overline{PF'}=4-1=3 \quad =k$

$\therefore 5k=15$

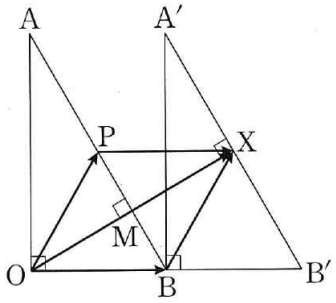
9) 답. ②

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF})-2\overrightarrow{OA}=(-\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF})-2\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OA} \quad \therefore \square\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}\square=\square-2\overrightarrow{OA}\square=2$

<다른 풀이>
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE}$이므로 $\therefore\ \square\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}\square=\square\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\square=\square\overrightarrow{AE}\square=2$

10) **정답** ②

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OX}$라 하면 사각형 POBX는 평행사변형이므로 점 P가 선분 AB위의 점일 때, 점 X는 선분 AB를 그림과 같이 오른쪽으로 선분 OB의 길이만큼 평행이동한 선분 A′B′위의 점이다.($\because\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PX}$)
선분 PB의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$
이므로 $|\overrightarrow{OM}|$의 값이 최소일 때, $|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}|$의 값도 최소이다. $|\overrightarrow{OM}|$의 값이 최소일 때는 두 벡터 $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{AB}$가 수직인 경우이다. 이때 삼각형 MOB는 직각삼각형이고, $\angle OBM=\frac{\pi}{3}$이므로



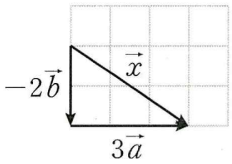
$\overline{BM}=\overline{OB}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\overline{AB}\cos\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\frac{\pi}{3}=\left(2\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

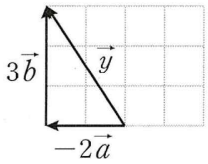
$\overline{BP}=2\overline{BM}=2\times\frac{1}{2}=1\quad\therefore\ |\overrightarrow{AP}|=\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{BP}=2-1=1$

11) 답. 20

12) **정답** ①
그림에서 $\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{y}=-2\vec{a}+3\vec{b}$

$\therefore\ \vec{x}-\vec{y}=(3\vec{a}-2\vec{b})-(-2\vec{a}+3\vec{b})=5\vec{a}-5\vec{b}$





13) 답. -4

14) 답. ②

15) 답. $-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

16) 답. ③
$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b}$라 하면 $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a},\ \overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$
이것을 $\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$에 대입하면 $\vec{b}-\vec{a}=m\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+n\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(m+\frac{n}{2}\right)\vec{a}+\left(\frac{m}{2}+n\right)\vec{b}$이므로 $m+\frac{n}{2}=-1,\ \frac{m}{2}+n=1$
두 식을 연립하여 풀면 $m=-2,\ n=2\ \therefore\ m+n=0$

<다른 풀이>
$\triangle BCD$에서 삼각형의 중점연결 정리에 의하여 $\overline{BD}//\overline{MN},\ \overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BD}$
$\therefore\ \overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}=2(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})=-2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AN}$
따라서 $m=-2,\ n=2$이므로 $m+n=0$

메모 : 중점연결정리의 논리를 안다면 간단히 풀 수 있다.

17) 답. ①

삼각형 ABC 의 무게중심이 점 G이므로 $\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}$ $\therefore\ |\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3|\overrightarrow{PG}|$

따라서 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$의 값이 최대가 되려면 점 P가 점 G로부터 가장 먼 거리에 있어야 하므로 점 P가 삼각형 ABC의 꼭짓점일 때 최대이다.

18) 답. ⑤

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA})$

$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})-4\overrightarrow{OA}$

$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})-5\overrightarrow{OA}$

$=-5\overrightarrow{OA}\ \ (\because\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})=\vec{0})$

$\therefore\ \square\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\square=\square-5\overrightarrow{OA}\square=5$

19) **정답** ②

$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AF}=\vec{b}$라 하고, 정육각형의 외접원의 중심을 O라 하면 $\overrightarrow{AO}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AF}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$

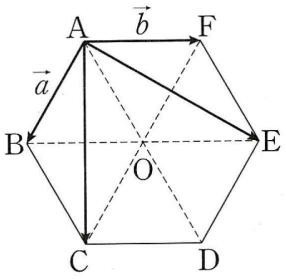
이때 $(k\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AF})\square\overrightarrow{AE}$이므로 실수 t에 대하여

$k\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AF}=t\overrightarrow{AE}$에서

$k(2\vec{a}+\vec{b})+6\vec{b}=t(\vec{a}+2\vec{b})$

$2k\vec{a}+(k+6)\vec{b}=t\vec{a}+2t\vec{b}$

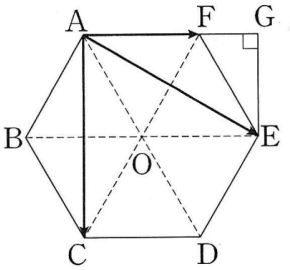
따라서 $2k=t,\ k+6=2t$이므로 $t=4,\ k=2$



[다른 풀이]

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

따라서 $4\overrightarrow{AE}=6\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AC}$이므로 $k=2$



20) 답. ③

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k\vec{a}-2\vec{b}-\vec{a}=(k-1)\vec{a}-2\vec{b}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$

$3\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{BA}$에서 $3(k-1)\vec{a}-6\vec{b}=m\vec{a}-m\vec{b}$

따라서 $3(k-1)=m,\ -6=-m$이므로 $m=6,\ k=3$

21) **정답** ②

두 점 P, Q의 위치벡터를 각각 $\vec{p},\ \vec{q}$로 놓으면 $\vec{p}=\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{2+1}=\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}$, $\vec{q}=\frac{2\vec{b}-\vec{a}}{2-1}=2\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$이므로 $\overrightarrow{PQ}=(2\vec{b}-\vec{a})-\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}=\frac{4\vec{b}-4\vec{a}}{3}$

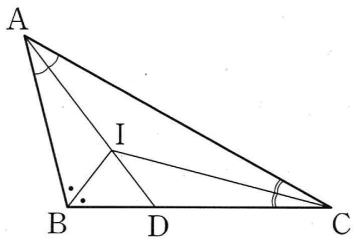
따라서 $m=-\frac{4}{3},\ n=\frac{4}{3}$이므로 $mn=-\frac{16}{9}$

[참고]

네 위치벡터 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{p},\ \vec{q}$의 시점에 대한 특별한 언급이 없으므로 모든 벡터의 시점이 일치하는 것으로 간주하고 문제를 해결한다. 일반적으로 특별한 언급이 없는 경우 원점 O가 시점인 위치벡터로 간주한다. 그러므로 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\vec{q}-\vec{p}$이다.

22) **정답** ④

그림과 같이 내심 I는 세 내각의 이등분선의 교점이므로 ∠A의 이등분선 위에 있다. 선분 AI의 연장선과 선분 BC의 교점을 D라 하면



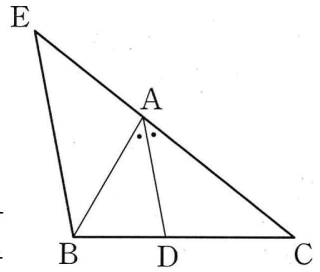
$\overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 4 = 1 : 2$이므로 점 D는 선분 BC를 $1 : 2$로 내분하는 점이다. 그런데 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$이므로 점 O를 시점으로 하는 점 D의 위치벡터 $\overrightarrow{OD}$는 $\overrightarrow{OD} = \dfrac{\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}}{1+2} = \dfrac{2\vec{b} + \vec{c}}{3}$

또 선분 BC에서 $\overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$이고 $\overline{BC} = 3$이므로 $\overline{BD} = \dfrac{1}{3} \times 3 = 1$

∠B의 이등분선이 선분 BI이므로 $\overline{AI} : \overline{ID} = \overline{AB} : \overline{BD} = 2 : 1$

그러므로 $\overrightarrow{OI} = \dfrac{2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}}{2+1} = \dfrac{2 \times \dfrac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} + \vec{a}}{3} = \dfrac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{9}$

따라서 $m = 3,\ n = 4$이므로 $m - n = -1$



[참고] 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AD가 ∠A를 이등분하면

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$가 성립한다. 이 성질을 증명해보자. 점 B를 지나고 선분 AD와 평행한 직선과 직선 AC가 만나는 점을 E라 하면 삼각형 CAD와 삼각형 CEB는 닮음이므로 $\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$이다.

그런데 삼각형 ABE는 이등변삼각형(∠ABE = ∠DAB = ∠CAD = ∠AEB)이므로 $\overline{AE} = \overline{AB}$이다. 따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$이다.

23) 답. ③

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$

다라서 $x = -3,\ y = 2$이므로 $\dfrac{x}{y} = -\dfrac{3}{2}$

24) **정답** ②

세 점 P, Q, R가 일직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{PR} = m\overrightarrow{PQ}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재한다.

그런데 세 점 P, Q, R의 위치벡터가 각각 $2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{a} - \vec{b},\ 3\vec{a} - k\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (3\vec{a} - k\vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} - (k+1)\vec{b}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (\vec{a} - \vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - 2\vec{b}$

$\vec{a} - (k+1)\vec{b} = m(-\vec{a} - 2\vec{b})$

$\vec{a} - (k+1)\vec{b} = -m\vec{a} - 2m\vec{b}$

따라서 $1 = -m,\ k+1 = 2m$ 이므로 $k = -3$

25) 답. ④

26) 답. ④

$9\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$에서 $9(-\overrightarrow{AP}) + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = \vec{0}$

$\therefore\ -14\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

즉, $14\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$에서 $\overrightarrow{AP} = \dfrac{5}{14} \cdot \dfrac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5}$이므로 선분 AP의 연장선과 변 BC의 교점 D는 선분 BC 를 $3:2$로 내분하는 점이다. 따라서 $\overrightarrow{AP} = \dfrac{5}{14}\overrightarrow{AD}$이므로 $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PD} = \dfrac{5}{14} : \dfrac{9}{14} = 5 : 9$

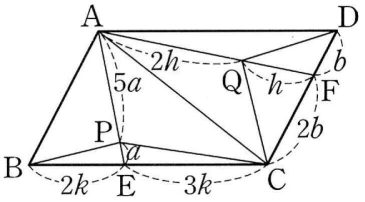
27) **정답** ④

주어진 조건을 모두 점 A를 시점으로 하는 위치벡터로 나타내면

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}$이므로

$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=6\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{6}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$



같은 방법으로 $3\overrightarrow{AQ}+4\overrightarrow{DQ}+2\overrightarrow{CQ}=9\overrightarrow{AQ}-4\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{4\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AC}}{9}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{3}$

ㄱ. 선분 AP의 연장선과 선분 BC가 만나는 점을 E라 하면 $\overline{BE}:\overline{CE}=2:3$이므로 $\triangle PAB:\triangle PCA=2:3$ (참)

ㄴ. 선분 AQ의 연장선과 선분 CD가 만나는 점을 F라 하면 $\overline{CF}:\overline{FD}=2:1$이고 $\overline{AQ}:\overline{QF}=2:1$이므로
$\triangle QAC:\triangle QCD:\triangle QDA=4:3:2$ (거짓)

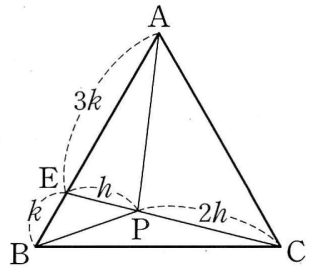
ㄷ. 평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면 사각형 APCQ의 넓이는

$\triangle APC+\triangle AQC=\dfrac{1}{2}S\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}S\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}S\times\dfrac{17}{18}=\dfrac{17}{36}S$

그러므로 평행사변형 ABCD의 넓이는 사각형 APCQ의 넓이의 $\dfrac{36}{17}$배이다. (참) 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[참고]

$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=-2\overrightarrow{PC}$, $\dfrac{\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}}{4}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PC}$



28) 답. ④

29) 답. ④

30) 답 : 32

$2\vec{a}-2\vec{b}=\vec{c}$ 이므로 $(4-2x,\ 8)=(-4,\ y)$

따라서 $x=4,\ y=8$ 이므로 $xy=32$

31) **정답** ①

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(1,\ 2),\ \overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2}=(1,\ 0)$

$\vec{a}=(3,\ 1)$

$=m(1,\ 2)+n(1,\ 0)$

$=(m+n,\ 2m)$

그러므로 $m+n=3,\ 2m=1$에서

$m=\dfrac{1}{2},\ n=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ m-n=-2$

다른 풀이

$\vec{a}=m(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2})+n(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2})$

$=(m+n)\overrightarrow{p_1}+(m-n)\overrightarrow{p_2}$

$=(m+n)(1,\ 1)+(m-n)(0,\ 1)$

$=(m+n,\ 2m)$

$m+n=3,\ 2m=1$에서 $\quad m=\frac{1}{2},\ n=\frac{5}{2}$

$\therefore\ m-n=-2$

[참고]

모든 평면벡터는 기본벡터인

$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$의 합을 이용하여 성분으로 나타낼수 있다.

마찬가지로 모든 공간벡터도 기본벡터인

$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$의 합을 이용하여 성분으로 나타낼수 있다.

32) 답. $(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$

33) 답. $E(3,-3)$

34) 답. $(0,\sqrt{3})$

35) 답. (1) 120° (2) 60° (3) 30° (4) 135°
(5) 180° (6) 0° (7) 90°

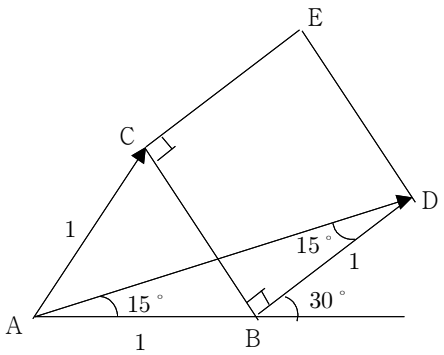
36) 정답 : ⑤

$\triangle ABD$에 코사인 제 2 법칙을 적용하면

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BD}\cos 150^\circ=1+1-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

따라서, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos 45^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

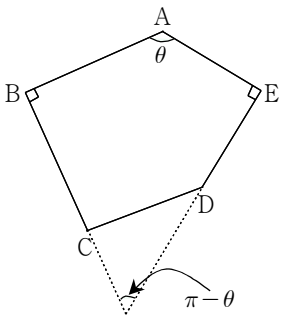


37) 답 : ⑤

ㄱ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$이므로 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 평행하다. (참)

ㄴ. $\angle B=\angle E=90°$이므로 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각을 θ라 하면 $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{ED}$가 이루는 각은 $\pi-\theta$이다.
따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta$
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos(\pi-\theta)=-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos\theta$
이때, $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$ (참)

ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}+|\overrightarrow{ED}|^2$
$|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2-2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$ 이때, $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$이고 'ㄴ'에 의해
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$이 성립하므로 $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{BE}|^2$ 따라서 $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$이 성립한다. (참)



38) 답 : 12

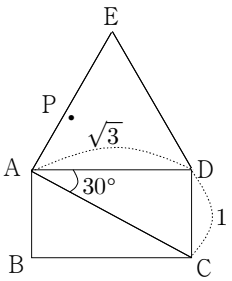
$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$이므로 $|\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}|^2=4$

따라서 $|\overrightarrow{AD}|^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+|\overrightarrow{AE}|^2=4$이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=12$

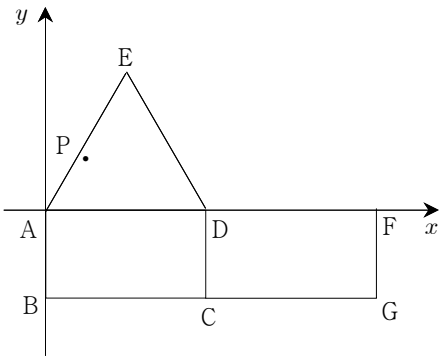
39) 답 : ⑤

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|=\overline{PB}$ 이므로 선분 PB의 길이는 점 P가 점 A와 일치할 때 최소이다.
따라서, 최솟값은 $\overline{AB}=1$ 이다. (참)

ㄴ. △ACD에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{DC}=1$ 이므로 $\angle CAD=30°$
△EAD가 정삼각형이므로 $\angle EAD=60°$
$\therefore\ \angle EAC=\angle PAC=90°$ $\therefore\ \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$
$\therefore\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{CA}|^2+0=2^2=4$ (참)



ㄷ. 점 A를 원점, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.
$\overline{AD}=\overline{DF}$ 인 x축 위의 점을 F라 하고 직사각형 DCGF를 그리면
$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$ 이므로 $|\overrightarrow{GP}|$의 최솟값은
점 $G(2\sqrt{3},-1)$에서 직선 AE에 이르는 거리와 같다.
직선 AE의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$ 즉, $\sqrt{3}x-y=0$ 이므로 구하는 최솟값은
$\dfrac{|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{2}$ (참) 따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



40) [정답] 9 25

$\overrightarrow{PA_k}=\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OP}=(k,0)-(0,6)=(k,-6)$, $\overrightarrow{QA_k}=\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OQ}=(k,0)-(0,-6)=(k,6)$ 이므로
$\overrightarrow{PA_k}\cdot\overrightarrow{QA_k}=(k,-6)\cdot(k,6)=k^2-36$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}\overrightarrow{PA_k}\cdot\overrightarrow{QA_k}=\sum_{k=1}^{10}(k^2-36)=\dfrac{10\times11\times21}{6}-360=385-360=25$

41) 답 : ③
$\overrightarrow{OP}=(a,b)$, $\overrightarrow{OQ}=(c,d)$ 로 놓으면 $\overrightarrow{OP'}=(a+3,b+1)$, $\overrightarrow{OQ'}=(c+3,d+1)$
(i) $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}=(-3,-1)$에서 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}|=\sqrt{10}$
(ii) $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(a-c,b-d)$, $\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}=(a-c,b-d)$ $\therefore\ |\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}|$
(iii) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=ac+bd$, $\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}=(a+3)(c+3)+(b+1)(d+1)$ $\therefore\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\neq\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}$

42) 답. ②
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{6}=4\square6\square\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$
$(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=3|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=3\square4^2+2\square12\sqrt{3}-6^2=12(1+2\sqrt{3})$

43) 답 : ③
$|\vec{a}-\vec{b}|=1$의 양변을 제곱하면 $|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로 $1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=1$ $\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$

따라서, $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ 이므로 $\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{1\square1}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}(\because\ 0\leqq\theta\leqq\pi)$

44) [정답] 1 ⑤

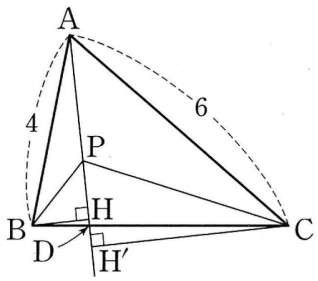
$2\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$에서 $|2\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$ 이므로 $4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{c}|^2$
$4|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=4|\vec{c}|^2$ 이므로 위 식에 대입하면 $|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2$

$4\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{7}{4}|\vec{b}|^2 \quad \therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{7}{16}|\vec{b}|^2$

두 벡터 $\vec{a},\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ이므로 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-\frac{7}{16}|\vec{b}|^2}{\frac{1}{2}|\vec{b}|^2}=-\frac{14}{16}=-\frac{7}{8}$

45) 정답 : ⑤
$|\vec{a}+\vec{b}|^2=7^2$
$|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=49,\ 2(\vec{a}\cdot\vec{b})=15$
준식$=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=4|\vec{a}|^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2=36+30-75=-9$

46) **정답** ①
그림과 같이 선분 AP의 연장선과 변 BC가 만나는 점을 D라 하자.
두 삼각형 APB와 APC의 밑변 AP가 공통이고 넓이의 비가 1 : 3이므로 높이의 비도 1 : 3이다.
그러므로 점 B와 점 C에서 선분 AD와 그 연장선에 수선의 발을 내려 각각 H, H′이라 하자.
그러면 삼각형 BHD와 삼각형 CH′D는 닮음이다.
그런데 $\overline{BH}:\overline{CH'}=1:3$이므로 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:3$이다.
또 두 삼각형 ABC와 BPC의 넓이의 비도 $6:2=3:1$이므로 $\overline{AD}:\overline{AP}=3:2$



그러므로 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$이고 $\overrightarrow{AD}=\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3+1}=\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

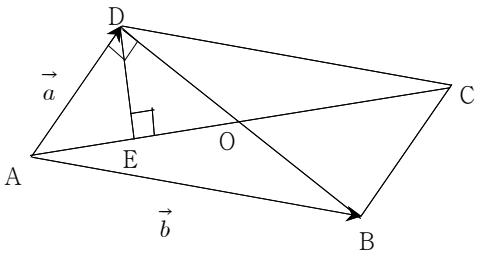
$|\overrightarrow{AP}|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{36}|\overrightarrow{AC}|^2=4+\frac{1}{6}\times4\times6\times\cos\frac{\pi}{3}+1=7 \quad \therefore\ |\overrightarrow{AP}|=\sqrt{7}$

47) 답 : ①
$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x+1)\times1+2(-x)=-x+1=0 \quad \therefore\ x=1$

48) 답. ①

49) 답. ④
$|\vec{a}+\vec{b}|=7$의 양변을 제곱하면 $|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=49, \quad 4^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2=49 \quad \therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=4$
또, $\vec{a}+k\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로
$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0, \quad |\vec{a}|^2+(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-k|\vec{b}|^2=0, \quad 16+4(k-1)-25k=0$
$-21k+12=0 \quad \therefore\ k=\frac{4}{7}$

50) 정답 : ②
$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ 이므로 $(-\vec{a})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})=0,\ |\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$
또한, 그림에서 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ 이다. $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}=k(\vec{a}+\vec{b})$ 라 놓으면
$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}+k(\vec{a}+\vec{b})=(k-1)\vec{a}+k\vec{b}$ 이므로
$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AE}=\{(k-1)\vec{a}+k\vec{b})\}\cdot k(\vec{a}+\vec{b})=k(k-1)|\vec{a}|^2+k(2k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2$
$=k(k-1)+k(2k-1)+6k^2=0$



$9k^2-2k=0 \quad \therefore\ k=\frac{2}{9}$

【다른 풀이】

피타고라스 정리를 이용하면 선분 BD는 $\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{OD}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

삼각형 ABD에서 중선 정리를 이용하면 $\overline{AD}^2+\overline{AB}^2=2(\overline{AO}^2+\overline{OD}^2)$ 에서 $1+6=2\left(\overline{AO}^2+\frac{5}{4}\right)$ $\therefore$ $\overline{AO}=\frac{3}{2}$

삼각형 ADH에서 $\overline{AH}=x$ 라 하면 $\overline{AD}^2=\overline{AH}\cdot\overline{AO}$ 이므로 $1=x\cdot\frac{3}{2}$ $\therefore$ $x=\frac{2}{3}$

따라서 $k=\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{2}{3}}{3}=\frac{2}{9}$

51) 답. ④

점 A를 원점, 직선 AD를 x축, 직선 AB를 y축으로 하면 점 C의 좌표는 $C(2\sqrt{3},-2)$이다.

원 $(x-2\sqrt{3})^2+(y+1)^2=1$ 위의 점 $P(x,y)$에 대하여

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=2\sqrt{3}x-2y$

$2\sqrt{3}x-2y=k$라 하면 $10\le k\le 18$일 때, 직선과 원이 만나므로 k의 최댓값은 18이다.

메모 : 길이의 정보를 통해서 특수 각을 찾는 것은 매우 중요.

52) 답. 17

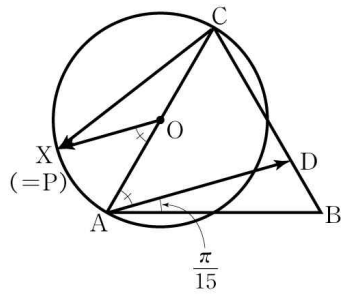
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}$

이고, 네 점 A, C, D, O는 모두 정점이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}$는 상수이다. 즉, 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되기 위해서는 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}$의 값이 최소가 되어야 한다.

이제, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{OX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{OX}|\cdot\cos\theta$이고, $|\overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{OX}|$의 값은 상수이므로 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되기 위해서는 $\cos\theta$의 값이 최소가 되어야 한다.

그러므로 $\theta=-\pi$일 때 즉, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{OX}$가 반대 방향일 때, 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 된다. 따라서 다음 그림에서 $\angle AOP=\angle CAD=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$이고, $\angle ACP=\frac{1}{2}\angle AOP$이므로



$\angle ACP=\frac{2}{15}\pi$ $\therefore$ $p=15$, $q=2$ $\therefore$ $p+q=17$

메모 : 평행선과 동위각, 엇각을 활용. 원과 이등변삼각형의 성질을 잘 활용.

53) 답. 7

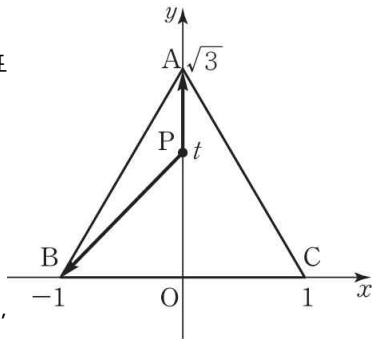
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC를 변 BC는 x축 위, 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발 H는 원점이 되도록 좌표평면 위에 두자. 선분 AO 위를 움직이는 점 P의 좌표를 $(0,\ t)(0\le t\le\sqrt{3})$라 하면 점 A의 좌표는 $(0,\ \sqrt{3})$, 점 B의 좌표는 $(-1,\ 0)$이므로

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=(0,\ \sqrt{3}-t)$ $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=(-1,\ -t)$

$|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|=|\ t(\sqrt{3}-t)|=\sqrt{t^2(\sqrt{3}-t)^2}$

산술평균과 기하평균의 관계 $t^2+(\sqrt{3}-t)^2\ge 2\sqrt{t^2(\sqrt{3}-t)^2}$에 의하여

$t^2=(\sqrt{3}-t)^2$일 때, $|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|=\sqrt{t^2(\sqrt{3}-t)^2}$의 값이 최대가 되므로 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때,



$|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|=\frac{3}{4}$가 된다. $\frac{q}{p}=\frac{3}{4}$이므로 $p=4$, $q=3$ $\therefore p+q=7$

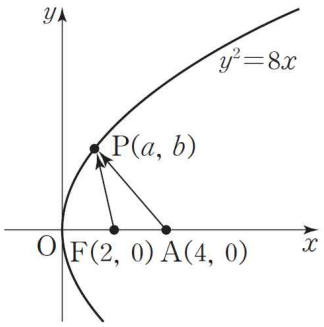
54) **정답** ②

두 점 P, Q의 y좌표를 각각 a, b라 하면 $P\left(\frac{a^2}{2},\ a\right)$, $Q\left(\frac{b^2}{2},\ b\right)$이다.

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{a^2}{2}\times\frac{b^2}{2}+a\times b=\frac{1}{4}(ab+2)^2-1$$

따라서 $\vec{p}\cdot\vec{q}$의 최솟값은 -1이다.

55) [정답] 13 ④



포물선 $y^2=8x$의 초점은 $\mathrm{F}(2,0)$이다.

포물선 위의 점 P의 좌표를 (a,b)라 하면$b^2=8a$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FP}}=(a-4,b)\cdot(a-2,b)=a^2-6a+8+b^2=a^2-6a+8+8a=(a+1)^2+7$

그런데 점 $\mathrm{P}(a,b)$는 포물선 위의 점이므로 $b^2=8a$에서 $a\geq 0$

따라서 $a=0$일 때 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FP}}$의 최솟값은 8이다.

56) 정답 ④

원점에서 출발하였으므로 $t=1$일 때의 점 P의 좌표는

$$\int_0^1\left\{e^t\ln(t+1)+\frac{e^t}{t+1}\right\}dt$$

$$=\left[e^t\ln(t+1)\right]_0^1$$

$$=e\ln 2$$

57) 답.⑤

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면 $v_{\mathrm{P}}=\frac{dx_{\mathrm{P}}}{dt}=2t-a$, $v_{\mathrm{Q}}=\frac{dx_{\mathrm{Q}}}{dt}=\frac{2t-1}{t^2-t+1}$

두 점 P, Q가 움직이는 방향이 서로 반대 방향이 되려면 $v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}}<0$이어야 한다.

$v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}}=\frac{(2t-a)(2t-1)}{t^2-t+1}<0$

$\therefore\ (2t-a)(2t-1)<0\cdots$ ㉠ $(\because\ t^2-t+1>0)$

㉠의 해가 $\frac{1}{2}<t<2$이므로 $\frac{a}{2}=2\quad\therefore\ a=4$

메모 : 미분의 속도와 가속도 + 분수부등식 : $x_p'\times x_q'<0$

58) 정답 : ①

$\frac{dx}{dt}=1-2\cos 2t$, $\frac{dy}{dt}=2\sin 2t$이므로

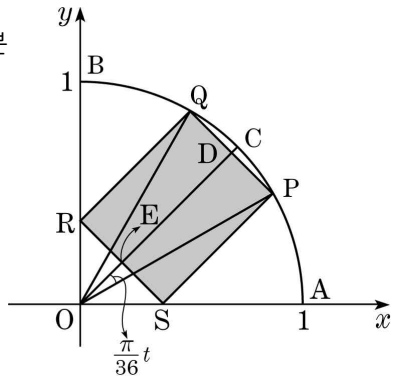
점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(1-2\cos 2t)^2+4\sin^2 2t}\quad=\sqrt{5-4\cos 2t}\ \leq 3\ (\because\ -4\leq 4\cos 2t\leq 4)$$

이므로 구하는 속력의 최댓값은 3이다.

59) 답. ①

내접하는 사각형의 x축, y축 위의 두 꼭짓점을 각각 S, R라 하고 선분 OC와 선분 PQ, 선분 RS의 교점을 각각 D, E라 하자.



삼각형 DOP에서 $\overline{DP}=\overline{OP}\sin\frac{\pi}{36}t=\sin\frac{\pi}{36}t$, $\overline{OD}=\overline{OP}\cos\frac{\pi}{36}t=\cos\frac{\pi}{36}t$

$\angle EOS=\frac{\pi}{4}$이므로 $\overline{OE}=\overline{ES}(=\overline{DP})$이다. 그러므로 □PQRS의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\overline{PQ}\cdot\overline{PS}=2\overline{DP}\cdot(\overline{OD}-\overline{OE})=2\sin\frac{\pi}{36}t\left(\cos\frac{\pi}{36}t-\sin\frac{\pi}{36}t\right)$$

$$=2\sin\frac{\pi}{36}t\cos\frac{\pi}{36}t-2\sin^2\frac{\pi}{36}t=\sin\frac{\pi}{18}t-2\sin^2\frac{\pi}{36}t$$

$$S'(t)=\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{18}t-2\sin\frac{\pi}{36}t\cos\frac{\pi}{36}t\right)=\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{18}t-\sin\frac{\pi}{18}t\right)$$

$$S'(6)=\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{36}\pi$$

60) 정답 ①

$\overline{BQ}=x$, $\overline{AQ}=y$라 하면 $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=20$ …… ㉠

㉠의 양변을 시간 t에 대하여 미분하면

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{2y}{2\sqrt{y^2+9}}\cdot\frac{dy}{dt}=0$$

$y=4$일 때 $x=6\sqrt{6}$이고, $\frac{dy}{dt}=1$이므로

$$\frac{6\sqrt{6}}{15}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{4}{5}=0\text{에서 }\frac{dx}{dt}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 구하는 변화율은 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

61)

(풀이 1) 등속도 운동에서는 〈이동거리 = 속력×시간〉을 공식처럼 이용해도 된다.

갑은 지점 O에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 OS를 따라 초속 3m의 일정한 속력 - 이동거리 $3t$

을은 갑이 출발한 지 10초가 되는 순간 지점 E에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 EN을 따라 초속 4m의 일정한 속력 - 이동거리 $4(t-10)$ 물론 거꾸로 달리지는 않으므로 이 식은 $t\geq 10$인 범위에서 성립한다.

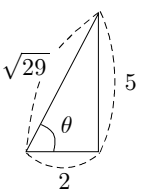
굳이 식을 정확히 세우고 싶다면 $\text{이동거리}_{\text{을}}=\begin{cases}0 & (0\leq t\leq 10)\\ 4(t-10) & (t\geq 10)\end{cases}$라고 세운다.

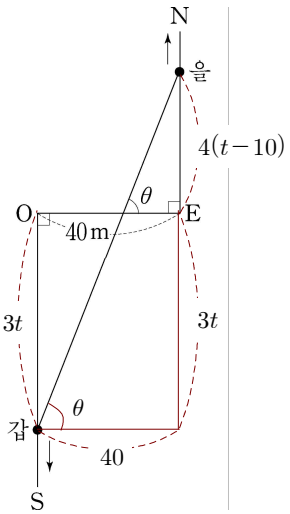
우리는 θ를 t에 대한 식으로 세우기 위해서 삼각비를 이용한다.

즉, 오른쪽 그림에서 $\tan\theta=\frac{3t+4(t-10)}{40}=\frac{7t-40}{40}$이고 양변을 t에 대해 미분하면

$$\frac{d}{dt}\tan\theta=\frac{d}{dt}\frac{7t-40}{40}\Leftrightarrow\sec^2\theta\times\frac{d\theta}{dt}=\frac{7}{40}\Leftrightarrow\frac{d\theta}{dt}=\frac{7}{40}\times\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{7}{40}\cos^2\theta$$

이다. $t=20$인 순간 $\tan\theta=\frac{5}{2}$이다. θ가 예각이므로 함수변형 테크닉에 의하여 $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{29}}$이다.





〈θ를 구할 수 없으므로 $\tan\theta=\frac{5}{2}$를 통째로 이용하는 것은 삼각함수에서 흔히 쓰는 테크닉이다.〉

그러므로 $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=20}=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\tan\theta=\frac{5}{2}}=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{29}}}=\frac{7}{40}\times\frac{4}{29}=\frac{7}{290}$이다.

정답은 ③

(풀이 2) 문자를 여러 개로 두어 음함수 미분법을 이용한다.

갑은 지점 O에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 OS를 따라 초속 3m의 일정한 속력 - 이동거리 x라 두면 $\frac{dx}{dt}$는 t에 상관없이 항상 3이다. 즉, $\frac{dx}{dt}=3$

을은 갑이 출발한 지 10초가 되는 순간 지점 E에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 EN을 따라 초속 4m의 일정한 속력 - $t\geq 10$인 범위에서 이동거리를 y라 두면 $\frac{dy}{dt}$는 t에 상관없이 항상 4이다. 즉, $\frac{dy}{dt}=4$

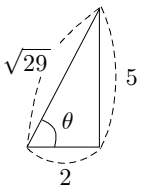
우리는 θ, x, y 에 대한 식으로 세우기 위해서 삼각비를 이용한다.

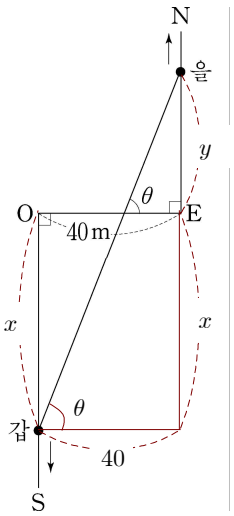
즉, 오른쪽 그림에서 $\tan\theta = \frac{x+y}{40} = \frac{1}{40}(x+y)$이고 양변을 t에 대해 미분하면

$$\frac{d}{dt}\tan\theta = \frac{d}{dt}\frac{1}{40}(x+y) \Leftrightarrow \sec^2\theta\times\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{40}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sec^2\theta\times\frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{40} \Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{40}\times\frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{7}{40}\cos^2\theta$$

이다. $t=20$인 순간 $\tan\theta=\frac{5}{2}$이다. θ가 예각이므로 함수변형 테크닉에 의하여 $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{29}}$이다.





<θ를 구할 수 없으므로 $\tan\theta=\frac{5}{2}$을 통째로 이용하는 것은 삼각함수에서 흔히 쓰는 테크닉이다.>

그러므로 $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=20} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\tan\theta=\frac{5}{2}} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{7}{40}\times\frac{4}{29} = \frac{7}{290}$이다.

정답은 ③

62)

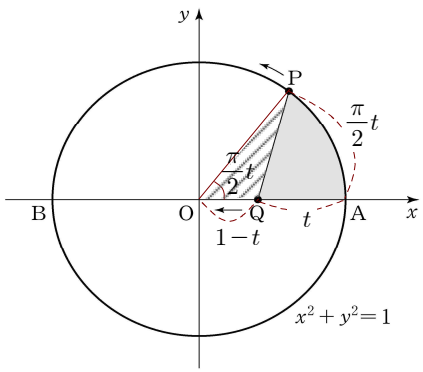
(풀이 1) 등속도 운동에서는 <이동거리 = 속력×시간>을 공식처럼 이용해도 된다.

점 P는 점 $A(1,0)$에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{2}$의 일정한 속력 - 이동거리는 $\frac{\pi}{2}t$

점 Q는 점 A에서 출발하여 점 $B(-1,0)$을 향하여 매초 1의 일정한 속력 - 이동거리는 t

부채꼴의 일부의 넓이를 표현하려면 중심각이 필요하다. 즉, 오른쪽 그림과 같이

$l=r\theta$공식에서 $r=1$이므로 $\theta=\frac{\pi}{2}t$이다.



선분 PQ, 선분 QA, 호 AP로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자.

- S를 우리가 정한 문자에 대한 관계식으로 세운다.

$$S = (\text{부채꼴 } OAP) - (\Delta\ OPQ) = \frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{2}\times 1\times(1-t)\times\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$= \frac{\pi}{4}t - \frac{1}{2}(1-t)\sin\frac{\pi}{2}t$$

양변을 t에 대해 미분하면

$$\frac{d}{dt}S = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\pi}{4}t-\frac{1}{2}(1-t)\sin\frac{\pi}{2}t\right\} \Leftrightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left\{(-1)\sin\frac{\pi}{2}t+(1-t)\cos\frac{\pi}{2}t\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

1초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율 - $\left(\frac{dS}{dt}\right)_{t=1} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left\{(-1)\sin\frac{\pi}{2}\right\} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ 정답은 ④

(풀이 2) 문자를 여러 개로 두어 음함수 미분법을 이용한다.

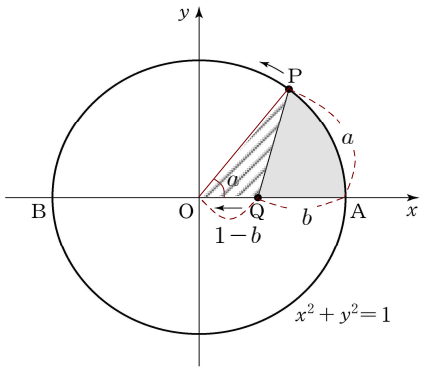
점 P는 점 $A(1,0)$에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{2}$의 일정한 속력

- 호 $\overset{\frown}{AP}$의 길이를 a라 두면 $\frac{da}{dt}$는 t에 상관없이 항상 $\frac{\pi}{2}$이다. 즉, $\frac{da}{dt}=\frac{\pi}{2}$

점 Q는 점 A에서 출발하여 점 $B(-1,0)$을 향하여 매초 1의 일정한 속력

- 선분 $\overline{AQ}$의 길이를 b라 두면 $\frac{db}{dt}$는 t에 상관없이 항상 1이다. 즉, $\frac{db}{dt}=1$

부채꼴의 일부의 넓이를 표현하려면 중심각이 필요하다. 즉, 오른쪽 그림과 같이 $l=r\theta$공식에서 $r=1$이므로 $\theta=a$이다.



선분 PQ, 선분 QA, 호 AP로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자.

- S를 우리가 정한 문자에 대한 관계식으로 세운다.

$S=(\text{부채꼴 }OAP)-(\triangle OPQ)=\frac{1}{2}\times1^2\times a-\frac{1}{2}\times1\times(1-b)\times\sin a=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}(1-b)\sin a$

양변을 t에 대해 미분하면 $\frac{d}{dt}S=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\{a+(b-1)\sin a\}\Leftrightarrow\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left\{\frac{da}{dt}+\left(\frac{db}{dt}\right)\sin a+(b-1)\cos a\left(\frac{da}{dt}\right)\right\}$

$\Leftrightarrow\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}+\sin a+\frac{\pi}{2}(b-1)\cos a\right\}$

1초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율 - $t=1$인 순간에 $a=\frac{\pi}{2}$, $b=1$이므로

$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{t=1}=\left(\frac{dS}{dt}\right)_{a=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}+\sin a+\frac{\pi}{2}(b-1)\cos a\right\}_{a=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

정답은 ④

63) 답 : ④

ㄱ. $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2},\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$

$t=1$일 때 $\vec{v}\cdot\vec{p}=\frac{e^2-e^{-2}}{2}\neq0$ (거짓)

ㄴ. $\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2},\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)=\vec{p}$ (참)

ㄷ. $\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^1\sqrt{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}}\,dt\geqq\int_0^1 1dt=1$ (참)

64) 답 : 64

점 P가 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리는

$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\{4(-\sin t+\cos t)\}^2+(-2\sin 2t)^2}\,dt$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{16(1-\sin 2t)+4\sin^2 2t}\,dt$

$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{4(1-\sin 2t)+\sin^2 2t}\,dt$

$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{(2-\sin 2t)^2}\,dt=2\int_0^{2\pi}|2-\sin 2t|\,dt$

$= 2\int_0^{2\pi}(2-\sin 2t)\,dt = 2\left[2t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{2\pi} = 2\times 4\pi = 8\pi$

$a=8$이므로 $a^2=64$이다.

65) 답 : 78

$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$라 하면 구하는 길이는

$\int_0^6 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

$= \int_0^6 \sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}2x\right\}^2}\,dx$ $= \int_0^6 \sqrt{1+\{x^2(x^2+2)\}}\,dx = \int_0^6 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$

$= \int_0^6 (x^2+1)\,dx = [\frac{1}{3}x^3+x]_0^6 = 72+6 = 78$

66) 답 : ②

$\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$는 곡선 $y=f(x)\,(0\leqq x\leqq 1)$의 길이를 의미하므로 이 길이의 최소값은 두 점 $(0,0)$, $(1,\sqrt{3})$을 잇는 선분의 길이와 같다.

따라서 구하는 최소값은 $\sqrt{(1-0)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=2$

67) 정답 ④

해설

[출제의도]

$$1+\{f(x)\}^2 = 1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

이때 $\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0$ 이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1+\{f(x)\}^2}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$= \left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

촌철살인

다시 만나는 개념