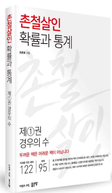
촌철살인

다시 만나는 개념

<미적분I> 3. 극한의 논리



Orbi Class 인강, 강남점

저자 미친한 수학자

(블랙백 준T)

#1-1. 다시 만나는 개념 : 수열의 극한과 무한급수

1. 무한대와 무한소의 이해 + 극한의 성질

: 관찰하는 연습 - 생각보다 오래 걸림

기본 극한의 상태 확인

촌철살인 1)다음 극한값이 존재하는 경우 극한값을 표시하고, 알 수 없는 경우에는 ?, 발산하는 경우에는 $\pm\infty$로 표시하시오.

∞와 상수	① $\infty \pm 3 = \square$ ② $3\times\infty = \square$ ③ $-3\times\infty = \square$ ④ $\dfrac{3}{\pm\infty} = \square$ ⑤ $\dfrac{\infty}{3} = \square$ ⑥ $\dfrac{\infty}{-3} = \square$
∞와 ∞	① $\infty+\infty = \square$ ② $\infty-\infty = \square$ ③ $\infty\times\infty = \square$ ④ $-\infty\times\infty = \square$ ⑤ $-\infty\times-\infty = \square$ ⑥ $\dfrac{\infty}{\infty} = \square$
∞와 ± 0	① $\dfrac{\pm 0}{\infty} = \square$ ② $\dfrac{\infty}{+0} = \square$ ③ $\dfrac{\infty}{-0} = \square$ ④ $\pm 0\times\infty = \square$
∞와 0	① $\dfrac{0}{\infty} = \square$ ② $\dfrac{\infty}{0} = \square$ ③ $0\times\infty = \square$
± 0와 ± 0	① $(\pm 0)+(\pm 0) = \square$ ② $(\pm 0)-(\pm 0) = \square$ ③ $(\pm 0)\times(\pm 0) = \square$ ④ $\dfrac{\pm 0}{\pm 0} = \square$
± 0와 상수	① $\pm 0\times$상수 $= \square$ ② $\dfrac{\pm 0}{\text{상수}} = \square$ ③ $\dfrac{2}{+0} = \square$ ④ $\dfrac{2}{-0} = \square$
± 0와 0	① $\dfrac{0}{\pm 0} = \square$ ① $\dfrac{\pm 0}{0} = \square$
진동하는 경우	수열 $\{a_n\}$이 $\begin{cases} a_{2n} = f(n) \\ a_{2n-1} = g(n) \end{cases}$와 같이 정의된 경우 $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$과 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$을 각각 따로 관찰하여 같은지 확인한다.

촌철살인 2)다음 보기의 수열 중 양의 무한대로 발산하는 것을 모두 고르면?

〈보기〉

ㄱ. $\{1000n-n^2\}$ ㄴ. $\left\{n-\dfrac{100}{n^2}\right\}$ ㄷ. $\left\{\dfrac{n^2+4}{-2n}\right\}$ ㄹ. $\left\{\dfrac{n+4}{2n^2}\right\}$ ㅁ. $\left\{\dfrac{3}{\left(\dfrac{1}{n}\right)}\right\}$

촌철살인 3)다음 중 수열의 극한값이 옳지 않은 것은?

□ $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^3}\right)=0$ □ $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+3}-\dfrac{2}{5-n}\right)=0$ □ $\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)=2$

□ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{n}-1}{2+\dfrac{1}{n}}=-\dfrac{1}{2}$ □ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=1$

연계 진동하는 수열의 수렴과 발산 판단 - 식보단 규칙

촌철살인 4)다음 수열의 수렴과 발산을 조사하여라.

(1) $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{2}{6},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{3}{8},\ \dfrac{5}{9},\ \cdots$ (2) $-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ -\dfrac{5}{6},\ \dfrac{6}{7},\ \cdots$

기본 극한의 꼴!값! - 부정형의 계산 1

촌철살인 2004. 4. 나형(83%). 20번. 3점

5)두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = -2$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n - b_n}{a_n b_n + 1}$의 값을 구하시오.

촌철살인 6)다음 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^2+n+2}$의 값을 구하여라.

촌철살인 7)다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1}\right)n$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}}$

촌철살인 2010. 3. 가형(86%). 나형(80%). 3번. 2점

8) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ 의 값은?

촌철살인 2009. 3. 나형(62%). 3번. 2점

9) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ 의 값은?

촌철살인 2008. 3. 나형(64%). 3번. 2점

10) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ 의 값은?

촌철살인 11) $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n-2}{bn^2-3n+3}=\frac{2}{3}$ 가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{bn+a}{an-b}$ 의 값을 구하여라.

연계 $\sqrt{\text{이차식}}$ 과 다항근사

촌철살인 12) $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+4n+a}-(bn+1)\right\}$이 수렴할 조건과 그 때의 값을 구하시오.

촌철살인 13) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}+\cdots+\sqrt{n^2+10n}-10n)$의 값을 구하여라.

촌철살인 14) $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+4n}-(an+b)\right\}=3$ 일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

촌철살인 15) 다음 등식 $\lim_{n\to\infty}n\left\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\right\}=c$이 성립하도록 상수 a,b,c의 값을 정하여라.

기본 극한의 꼴!값! - 부정형의 계산 2 : 결과가 주어진 극한

촌철살인 16)수열 $\{a_n\},\{b_n\}$이 모두 양의 무한대로 발산하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-2}{a_n-2}$의 값은?

촌철살인 2008. 4. 나형(42%). 23번. 4점

17)두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}(n^2+3n+2)b_n=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n+1)^3a_nb_n$의 값을 구하시오.

연계 극한의 오류 피하기

촌철살인 18)다음 계산과정의 틀린 부분을 찾아라.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n} \underset{①}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\times n \underset{②}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\times\lim_{n\to\infty}n \underset{③}{=} 0\times\lim_{n\to\infty}n \underset{④}{=} 0$$

촌철살인 19)다음 계산과정의 틀린 부분을 찾아라.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right) \underset{①}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right) \underset{②}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$\underset{③}{=} 0+0+0+\cdots+0 \underset{④}{=} 0$$

촌철살인 2009. 4. 나형(32%). 11번. 3점

20) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2+\cdots+(4n)^2}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

촌철살인 2011. 4. 가형(88%). 나형(78%). 13번. 3점

21)자연수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{5}{12}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{7}{12}$

촌철살인 2009. 7. 나형(25%). 19번. 3점

22)공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 $b_n=a_{3n-2}+2a_{3n-1}+a_{3n}$이다.

$\sum_{k=1}^{n}a_k=A_n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=B_n$일 때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{B_n}{A_n}$의 값을 구하시오.

촌철살인 2010. 10. 나형(58%). 24번. 4점

23)자연수 n에 대하여, $S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}(n+k)(n+k+1)$일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{S_n}$의 값을 구하시오.

기본 극한의 꼴!값! - 부정형의 계산 3 : 부등식과 극한

촌철살인 24) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos n\pi$의 값을 구하여라.

촌철살인 2007. 4. 가형(91%) 나형(75%). 18번. 3점

25)수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $3n^2-5n-1<a_n<3n^2+n+2$를 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2n+2}$의 값을 구하시오.

촌철살인 2005. 11. 나형(67%). 7번. 3점

26)수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n<a_n<n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$의 값은?

촌철살인 27)수열 $\{a_n\}$에서 $\frac{n(n+1)}{6}<a_n<\frac{(n+1)^2}{6}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}$의 값을 구하여라.

2. 수렴하는 수열조건 + 점화식과 극한

1) 수렴하는 수열조건

2) 점화식과 극한 (수능만 준비하는 학생들은 등차 등비만 익혀도 무방하다.)

기본 수렴하는 수열조건

촌철살인 2005. 10. 가형(90%) 나형(70%). 19번. 3점

28)수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}+20}{a_{n+1}-14}=2$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$ 의 값을 구하시오.

촌철살인 2005. 7. 나형(58%). 24번. 4점

29)수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}-2a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$이 성립할 때,

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 이다. 30α 의 값을 구하시오.

기본 점화식과 극한

촌철살인 2009. 3. 나형(43%). 28번. 4점

30)수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $pa_{n+1}=qa_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, p, q는 0이 아닌 실수이다.)

<보 기>

ㄱ. $p=q$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

ㄴ. $p\neq q$일 때, 수열 $\left\{a_n-\dfrac{1}{p-q}\right\}$은 등비수열이다.

ㄷ. $-1<\dfrac{q}{p}<1$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 31)$a_1=4,\ 3a_{n+1}=a_n+6\ \ (n=1,2,3,\cdots)$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$을 구하여라.

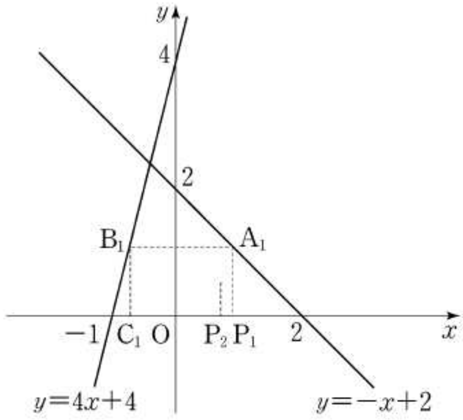
촌철살인 2009. 3. 나형(59%). 7번. 3점

32)수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n+2<3a_{n+1}<2a_n+1\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 성립할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값은?

춘천살인 2010. 6. 나형(62%). 16번. 4점

33)자연수 n에 대하여 점 P_n이 x축 위의 점일 때, 점 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(a_1, 0)$ $(0 < a_1 < 2)$이다.
(나) (1) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+2$와 만나는 점을 A_n이라 한다.
(2) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=4x+4$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
(3) 점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C_n이라 한다.
(4) 점 C_n을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_{n+1}이라 한다.



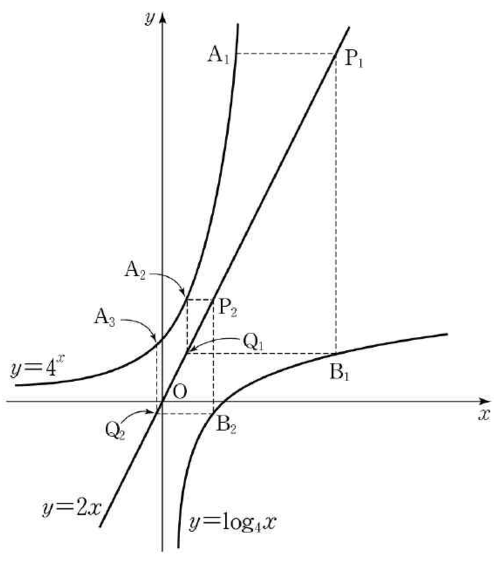
점 P_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

춘천살인 2009. 9. 가형(50%). 나형(31%). 17번. 4점

34)자연수 n에 대하여 점 A_n이 함수 $y=4^x$의 그래프 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

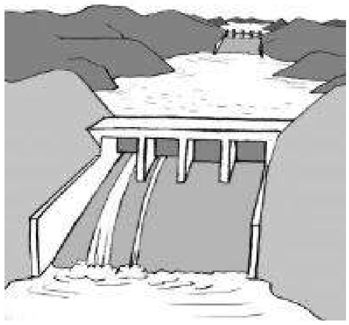
(가) 점 A_1의 좌표는 $(a,\ 4^a)$이다.
(나) (1) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 P_n이라 한다.
(2) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
(3) 점 B_n을 지나고 x에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 Q_n이라 한다.
(4) 점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 A_{n+1}이라 한다.



점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{11}{16}$ ③ $-\frac{5}{8}$ ④ $-\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

촌철살인 2005. 3. 가형(66%). 나형(49%). 16번. 4점



35)어느 강 상류와 하류에 각각 위치한 1호 댐과 2호 댐이 있다. 강 상류의 1호 댐으로부터 2호 댐으로 매일 100만톤의 물이 유입되고, 정오에 2호 댐의 저수량을 측정한다. 정오부터는 측정된 저수량의 2%를 농업용수와 생활용수 등을 위하여 강 하류로 방류한다고 한다. 매일 이와 같은 과정이 한없이 반복된다고 할 때, 정오에 측정되는 2호 댐의 저수량은 어떤 값에 한없이 가까워지는가?
(단, 방류는 그날 중으로 이루어지고 자연 증발 및 기타 유실량은 무시한다.)

① 4400만톤 ② 4600만톤 ③ 4800만톤
④ 5000만톤 ⑤ 5200만톤

3. 무한등비수열의 극한

1) 수렴조건

2) 등비수열의 극한 계산 패턴

기본 무한등비수열의 극한의 수렴조건

촌철살인 36)다음 수열의 수렴 또는 발산을 조사하여라.

(1) $\{1.5^n\}$ (2) $\{(-0.9)^n\}$ (3) $\left\{\cos^n \dfrac{3}{4}\pi\right\}$

촌철살인 2006. 11. 나형(55%). 20번. 3점

37)수열 $\left\{\left(\dfrac{2x-1}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하기 위한 정수 x의 개수를 k라 할 때, $10k$의 값을 구하시오.

촌철살인 38)무한등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 때, 다음 보기의 수열 중 항상 수렴하는 것을 모두 고르면?

<보기>

ㄱ. $\{(-r)^n\}$ ㄴ. $\left\{\left(\dfrac{1-r}{2}\right)^n\right\}$ ㄷ. $\{r^{2n}\}$

촌철살인 39)두 수열 $\{x^{2n}\}$, $\{(x+1)(x-1)^{n-1}\}$이 동시에 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는?

기본 등비수열의 극한 계산 패턴

촌철살인 40)$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n-1}+2^{n+10}-1}{2^{2n-2}+(-2)^{n+1}}$의 극한을 계산하시오.

촌철살인 2007. 3. 나형(73%). 26번. 3점

41) $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{2^{2n}+3^n}$ 의 값은?

촌철살인 42)두 수열 $\left\{\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{\sqrt{9^n-2^n}}\right\}$, $\left\{\frac{\sqrt{2^{n+1}}+\sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n}+\sqrt{3^{n+1}}}\right\}$의 극한값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

촌철살인 43) $\lim_{n\to\infty}\{\log(3^n-2^n+3)-\log 3^{n-1}\}$ 의 값은?

촌철살인 44) $\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n+3)\times\frac{2}{3^{n+1}}$ 의 값은?

촌철살인 45) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5^n}+3\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{4^n}-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$ 의 값은?

촌철살인 46) $|a|>|b|$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a^n-2ab^{n-1}}{2a^{n-1}b-3b^n}=2$ 를 만족하는 실수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $b\neq0$)

촌철살인 47) $\lim_{n\to\infty}(5^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$ 의 값은?

4. 무한급수 부분합의 극한

1) 부분합의 극한 (수렴과 발산, 합)

2) 급수의 극한의 관계에 대한 논리 (1차 판단) - 2차 판단은 부분합의 극한

3) 무한등비급수 (수렴과 발산, 합 공식)

기본 부분합의 극한

촌철살인 48)무한수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\dfrac{3n+1}{2n-1}$일 때, 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

촌철살인 2008. 4. 나형(60%). 9번. 3점

49)무한급수 $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{2}{3\times7}+\dfrac{3}{7\times13}+\dfrac{4}{13\times21}+\cdots$의 합은?

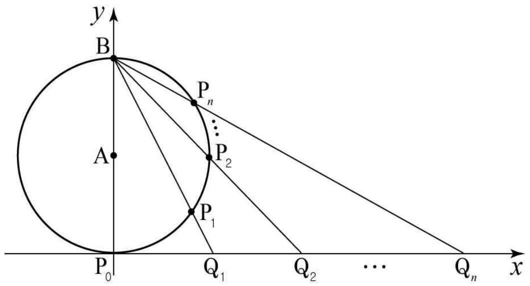
① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\dfrac{5}{4}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

촌철살인 2006. 4. 나형(59%). 21번. 3점

50)정수 a, b에 대하여 $2^a\times3^b=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$가 성립할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

촌철살인 2011. 7. 가형(69%). 나형(44%) 16번. 3점

51)그림과 같이 중심이 $\mathrm{A}(0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P_n과 x축 위의 점 Q_n은 다음 규칙을 만족한다.



(가) 점 P_0은 원점이고, 점 P_n은 제 1사분면의 점이다.
(나) 호 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $l_{n+1}=r\,l_n$ 이다.
(다) 점 Q_n은 점 $\mathrm{B}(0,\ 2)$와 점 P_n을 이은 직선이 x축과 만나는 점이다.

$\mathrm{Q}_2(2,\ 0)$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{8}{15}\pi$일 때, 상수 r의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

연계 진동하는 수열의 합 - 나열과 추론

촌철살인 52)다음 무한급수 중 발산하는 것은?

① $\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\cdots$ ② $2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$ ③ $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots$

④ $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$ ⑤ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots$

기본 급수의 극한의 관계에 대한 논리 (1차 판단) - 2차 판단은 부분합의 극한

촌철살인 2006. 4. 나형(60%). 29번. 4점

53)수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 무한급수 $\left(a_1-\frac{2}{1^2}\right)+\left(a_2-\frac{2+4}{3^2}\right)+\cdots+\left\{a_n-\frac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2}\right\}+\cdots$ 이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

촌철살인 2012. 4. 가형(77%). 나형(64%). 8번. 3점

54)모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

(가) $3n^2+1<(2+4+6+\cdots+2n)a_n$
(나) $b_n<6-2a_n$
(다) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴한다.

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

촌철살인 2007. 11. 나형(42%). 21번. 3점

55)수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4^{n+1}-3^{n-1}}{4^{n-1}+3^{n+1}}$의 값을 구하시오.

촌철살인 56)다음 참 거짓을 판단하여라.

(1) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이다

(2) 무한급수 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

(3) 무한급수 $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

촌철살인 2006. 4. 가형(66%) 나형(51%). 12번. 4점

57) $a_1 = 1$, $2a_{n+1} + a_n = 2$ (단, $n = 1$, 2, 3, $\cdots$)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

<보 기>

ㄱ. 수열 $\left\{a_n - \frac{2}{3}\right\}$는 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

ㄴ. $\lim_{n \to \infty} a_n$은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 2011. 4. 나형(38%). 20번. 4점

58)두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

ㄴ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이다.

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기본 무한등비급수의 수렴과 발산

촌철살인 2006. 9. 나형(66%). 12번. 3점

59)수열 $\{a_n\}$은 첫째항 1, 공비 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항 1, 공비 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

수렴하지 않는 무한급수는?

① $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nb_n$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ ⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$

촌철살인 60)무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2x-5}{3}\right)^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{2}\right)^{n-1}$ 이 모두 수렴하기 위한 x의 값의 범위를 구하여라.

촌철살인 61)무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 다음 중 반드시 수렴한다고 할 수 없는 것은?

□ $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+r^{2n})$ □ $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-2r^{2n})$ □ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}$ □ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r-1}{2})^n$ □ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{2}-1)^n$

촌철살인 2008. 4. 나형(29%). 21번. 3점

62)무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)\left(1-\frac{x}{4}\right)^{n-1}$의 합이 존재하도록 하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

기본 무한등비급수의 합 공식

촌철살인 2009. 3. 가형(76%). 3번. 2점

63) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

촌철살인 2011. 3. 나형(67%). 12번. 3점

64)첫째항이 1 인 무한등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{3n-2} - a_{3n-1}\right)$ 의 값은?

① $\frac{7}{19}$ ② $\frac{8}{19}$ ③ $\frac{9}{19}$ ④ $\frac{10}{19}$ ⑤ $\frac{11}{19}$

관계식으로 관계식을 구한다.

촌철살인 2007. 10. 나형(21%). 21번. 4점

65)이차방정식 $9x^2-6x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(\beta^n-\alpha^n)=\frac{q}{p}$ 이다.

이때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

촌철살인 2005. 4. 가형(81%). 나형(57%). 8번. 4점

66)무한수열 $\{a_n\}$을 $a_n = \begin{cases} 0 & (n=3k-2) \\ 1 & (n=3k-1) \\ 2 & (n=3k) \end{cases}$ (단, k는 자연수)로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{2}{21}$ ③ $\frac{13}{32}$ ④ $\frac{17}{54}$ ⑤ $\frac{29}{63}$

춘쳐살인 2010. 3. 가형(46%). 24번. 4점

67)수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

(가) $a_1 = 2$
(나) $a_{n+1} = (a_n^2 + a_n$을 5로 나눈 나머지) $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

춘쳐살인 2010. 6. 가형(56%). 12번. 4점

68)수열 $\{a_n\}$이 $7a_1 + 7^2 a_2 + \cdots + 7^n a_n = 3^n - 1$을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

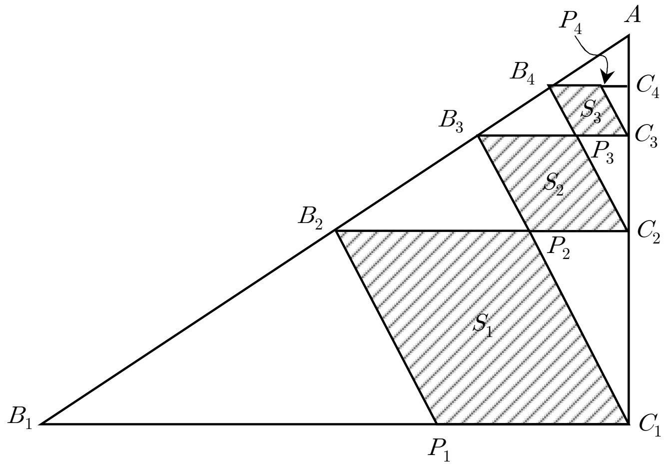
춘쳐살인 2008. 11. 나형(45%). 20번. 3점

69)공비가 같은 두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 - b_1 = 1$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 6$일 때,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$의 값을 구하시오.

춘천살인 2009. 3. 가형(78%). 11번. 3점

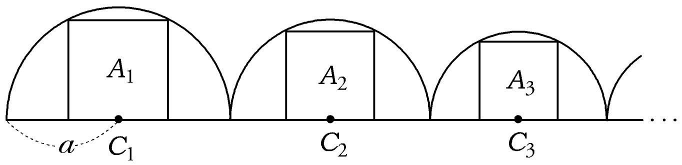
70) $\angle \mathrm{A}=60^\circ$, $\angle \mathrm{B}_1=30^\circ$, $\overline{\mathrm{AC}_1}=6$인 직각삼각형 $\mathrm{AB}_1\mathrm{C}_1$이 있다. 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$을 $2:1$로 내분하는 점을 P_1이라 하자. 두 선분 AB_1, AC_1의 중점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$를 $2:1$로 내분하는 점을 P_2라 할 때, 네 점 B_2, P_1, C_1, P_2를 꼭짓점으로 하는 사각형 $\mathrm{B}_2\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1\mathrm{P}_2$를 만든다. 두 선분 AB_2, AC_2의 중점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 $\mathrm{B}_3\mathrm{C}_3$을 $2:1$로 내분하는 점을 P_3이라 할 때, 네 점 B_3, P_2, C_2, P_3을 꼭짓점으로 하는 사각형 $\mathrm{B}_3\mathrm{P}_2\mathrm{C}_2\mathrm{P}_3$을 만든다. 두 선분 AB_3, AC_3의 중점을 각각 B_4, C_4라 하고, 선분 $\mathrm{B}_4\mathrm{C}_4$를 $2:1$로 내분하는 점을 P_4라 할 때, 네 점 B_4, P_3, C_3, P_4를 꼭짓점으로 하는 사각형 $\mathrm{B}_4\mathrm{P}_3\mathrm{C}_3\mathrm{P}_4$를 만든다. 이와 같은 과정을 계속할 때, 사각형 $\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{C}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 S_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $8\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

춘천살인 2005. 4. 가형(55%). 나형(34%). 11번. 4점

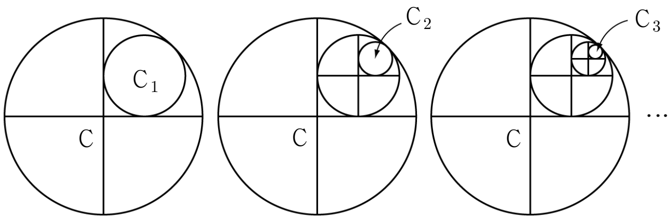
71) 그림과 같이 반지름의 길이가 a인 반원 C_1에 내접하는 정사각형을 A_1이라 하자. A_1의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_2에 내접하는 정사각형을 A_2라 하자. A_2의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_3에 내접하는 정사각형을 A_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 정사각형을 만들어 나갈 때, 이들 정사각형의 넓이의 합은?



① a^2 ② $2a^2$ ③ $3a^2$ ④ $4a^2$ ⑤ $5a^2$

춘천살인 2007. 4. 가형(55%). 나형(31%). 17번. 4점

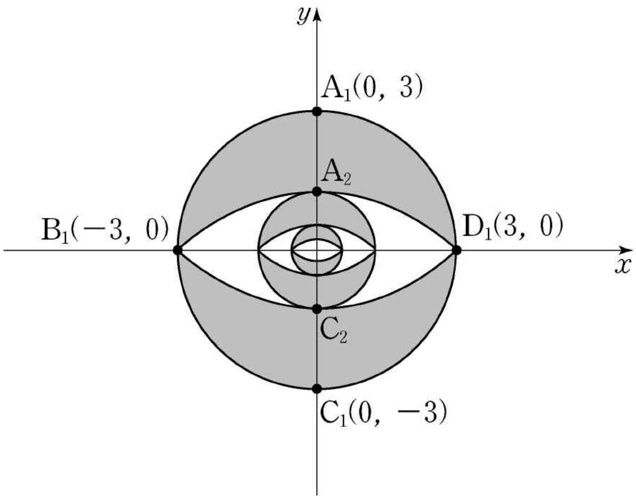
72)반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1, 원 C_1을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2, 원C_2를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_3, $\cdots$이와 같은 과정을 계속하여 얻어진 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ ⑤ 1

촌철살인 2009. 11. 가형(67%). 나형(42%). 15번. 4점

73) 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3 인 원 O_1 을 그리고, 원 O_1 이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $A_1(0,\ 3)$, $B_1(-3,\ 0)$, $C_1(0,\ -3)$, $D_1(3,\ 0)$ 이라 하자. 두 점 $B_1,\ D_1$ 을 모두 지나고 두 점 $A_1,\ C_1$ 을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_1 의 내부에서 y 축과 만나는 점을 각각 $C_2,\ A_2$ 라 하자. 호 $B_1A_1D_1$ 과 호 $B_1A_2D_1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $B_1C_1D_1$ 과 호 $B_1C_2D_1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1 이라 하자. 선분 A_2C_2 를 지름으로 하는 원 O_2 를 그리고, 원 O_2 가 x 축과 만나는 두 점을 각각 $B_2,\ D_2$ 라 하자. 두 점 $B_2,\ D_2$ 을 모두 지나고 두 점 $A_2,\ C_2$ 을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2 의 내부에서 y 축과 만나는 점을 각각 $C_3,\ A_3$ 라 하자. 호 $B_2A_2D_2$ 와 호 $B_2A_3D_2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $B_2C_2D_2$ 와 호 $B_2C_3D_2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 호 $B_nA_nD_n$ 과 호 $B_nA_{n+1}D_n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $B_nC_nD_n$ 과 호 $B_nC_{n+1}D_n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$ 의 값은?



① $6(\sqrt{2}+1)$ ② $6(\sqrt{3}+1)$ ③ $6(\sqrt{5}+1)$ ④ $9(\sqrt{2}+1)$ ⑤ $9(\sqrt{3}+1)$

#1-2. 수열의 극한과 무한급수 MAP

#2-1. 다시 만나는 개념 : 함수의 극한과 연속성

1. 함수의 극한 - 좌극한과 우극한
 1) 좌극한과 우극한
 2) 극한(값)의 존재성
 3) 극한의 성질
 4) 부정형의 계산
 5) 합성함수의 극한

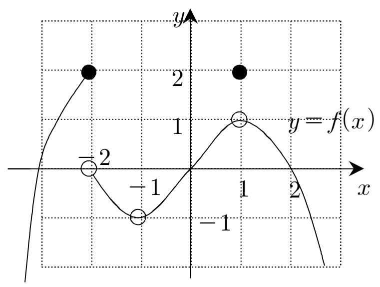
기본 좌극한과 우극한

촌철살인 74)함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to-2-} f(x)$ (2) $\lim_{x\to-2+} f(x)$

(3) $\lim_{x\to-1-} f(x)$ (4) $\lim_{x\to-1+} f(x)$

(5) $\lim_{x\to1-} f(x)$ (6) $\lim_{x\to1+} f(x)$



촌철살인 2005. 7. 가형(83%). 5번 3점

75)$a>1$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{|x-a|-(a-1)}{x-1}$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

촌철살인 76)실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} 3 & (x \neq n,\ n\text{은 정수}) \\ n & (x=n,\ n\text{은 정수}) \end{cases}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{30} \lim_{x \to n} f(x)$의 값은?

기본 극한(값)의 존재성

촌철살인 77)$\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$의 극한을 조사하고, 극한이 존재한다면 그 값을 구하여라.

촌철살인 78)$\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$의 극한을 조사하여라.

촌철살인 79)다음 $\lim_{x \to 2} \dfrac{[x]}{x}$의 극한을 조사하고, 극한이 존재한다면 그 값을 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

춘천살인 80)함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+x-k & (x>3) \\ 2x+k & (x\leq 3)\end{cases}$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$의 값이 존재하기 위한 실수 k의 값은?

기본 극한의 성질

춘천살인 81)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$가 0이 아닌 값일 때, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-f(x)}{x^2+f(x)}$를 구하여라.

춘천살인 82)$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$의 극한값을 구하여라.

춘천살인 83)함수의 극한에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

〈보기〉

ㄱ. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$와 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$의 값이 각각 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$의 값도 존재한다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$와 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 값이 각각 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$의 값도 존재한다. (단, $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to a}g(x)$와 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 값이 각각 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값도 존재한다. (단, $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$)

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

부분적인 그래프 + 상태확인

촌철살인 84)다음 보기의 a,b,c 사이의 대소 관계로 옳은 것은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

<보기>

$a = \lim_{x \to 0-} \frac{x}{[x]}$　　$b = \lim_{x \to 0-} \frac{[x-1]}{x-1}$　　$c = \lim_{x \to 0+} \frac{[x+1]}{x+1}$

① $a < b < c$　② $a < c < b$　③ $c < a < b$　④ $c < b < a$　⑤ $b < a < c$

촌철살인 85)다음 극한의 상태를 표시하여라.

(1) $\lim_{x \to 1+} \frac{1}{x-1}$　(2) $\lim_{x \to 2-} \frac{x}{x-2}$　(3) $\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{(x-3)^2}$　(4) $\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{(x+1)^2}$

기본 부정형의 계산

촌철살인 86)다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$　(2) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

촌철살인 87)다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$　(2) $\lim_{x \to -2}\left\{\frac{x-2}{x+2}-\frac{3x-2}{(x+2)(x+4)}\right\}$　(3) $\lim_{x \to 0}\left\{\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}}\right\}$

촌철살인 88)다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to -2} \frac{f(x)-1}{x+2}=4$일 때, $\lim_{x \to -2} \frac{\{f(x)\}^2-f(x)}{x^2 f(x)-4f(x)}$의 값은? (단, $f(x) \neq 0$)

① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

촌철살인 89)$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$가 성립할 때, a^2+b^2의 값은?

촌철살인 90)$\lim_{x \to 2} \frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=1$가 성립할 때, a,b의 값을 각각 구하시오.

촌철살인 91)다음 두 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$를 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=4$, $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2}=3$ (2) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x(x-1)}=1$, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x(x-1)}=2$

촌철살인 92)다음 조건 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=-3$을 만족하는 다항식 $f(x)$를 구하여라.

식 변형 마지막 기술 : 치환

촌철살인 93) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)}=4$일 때, 실수 α의 값을 구하여라.

촌철살인 94) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{4x^2-5x+6}+3x\right)$의 값을 구하여라.

촌철살인 2009. 6. 가형(29%). 19번 3점

95)다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$ 을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

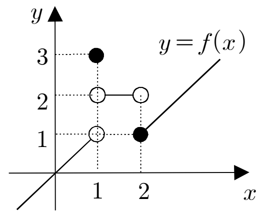
촌철살인 96) $\lim_{x\to-1}\frac{f(x+1)}{x+1}=3$일 때, $\lim_{x\to0}\frac{x^2-f(x)}{x^2+f(x)}$ 를 구하여라.

기본 합성함수의 극한 : 과정과 결과의 차이

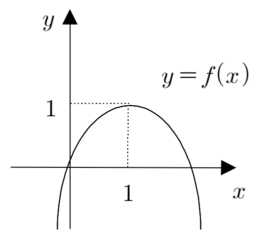
춘천살인 97) $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\lim_{x\to1}f(f(x))$을 조사하시오.

(2) $\lim_{x\to2}f(f(x))$을 조사하시오.



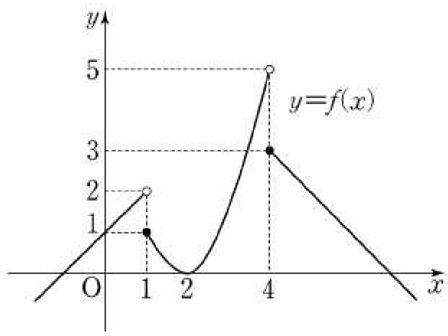
춘천살인 98)그림과 같이 이차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 최댓값 1을 가질 때, $\lim_{x\to1}[f(x)]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)



춘천살인 2010. 6. 가형(56%). 7번 3점

99)실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7



2. 함수의 연속성

1) 한 점에서의 연속성 판단

2) 합성함수의 연속성

기본 한 점에서의 연속성 판단

촌철살인 100)다음 함수가 연속인 x의 값의 범위를 구간의 기호를 써서 나타내어라.

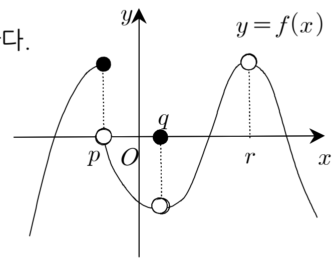
(1) $y=x^2-4x$ (2) $y=\sqrt{5-x}$ (3) $y=3$

촌철살인 101)함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위해서는 다음 보기를 모두 만족해야 한다.

<보기>

ㄱ $f(a)$가 정의되고 ㄴ $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하며

ㄷ $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립하여야 한다.

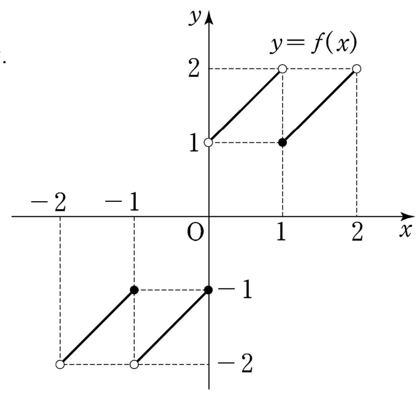


함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $f(x)$가 $x=p,q,r$에서 불연속인 이유는 ㄱ,ㄴ,ㄷ중 무엇이 성립하지 않는 것인지 순서대로 적으면?

① ㄱ,ㄴ,ㄷ ② ㄴ,ㄱ,ㄷ ③ ㄴ,ㄷ,ㄱ ④ ㄷ,ㄱ,ㄴ ⑤ ㄷ,ㄴ,ㄱ

춘첩살인 2007. 11. 가형(70%). 8번 4점

102)개구간 $(-2, 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.
개구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+f(-x)$로 정의할 때,
<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$가 존재한다.　　ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

춘첩살인 2005. 9. 가형(82%). 4번 3점

103)함수 $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (|x|>1) \\ -x^2+ax+b & (|x|\le 1)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

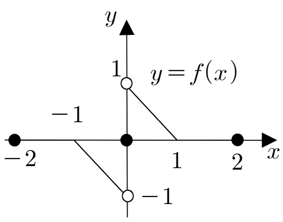
① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

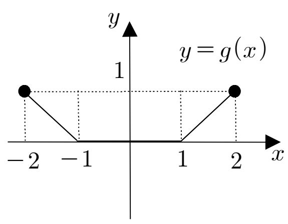
춘첩살인 104)함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1} & (x\neq 1) \\ 3 & (x=1)\end{cases}$이 연속함수일 때, a,b의 값을 구하여라.

초철살인 105)함수 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수 x에서 연속이고 등식 $(\sqrt{x}-2)f(x)=x\sqrt{x}-8$을 만족할 때, $f(4)$의 값은?

기본 합성함수의 연속성

초철살인 106)$-2 \leqq x \leqq 2$에서 정의된 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 보기의 함수 중 $x=0$에서 연속인 것을 모두 고르면?





〈보기〉

ㄱ. $f(x)g(x)$ ㄴ. $f(g(x))$ ㄷ. $g(f(x))$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

3. 연속함수의 성질

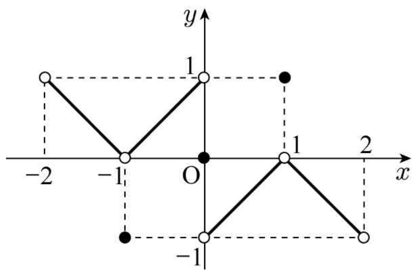
촌철살인 107)다음 조건을 만족하는 함수의 연속성에 대해서 <연속>, <불연속>, <확인>으로 표시하여라.
(단, f_1, f_2는 $x=\alpha$에서 연속이고, g_1, g_2는 $x=\alpha$에서 불연속이다.)

□ $f_1(x)\pm f_2(x)$	□ $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$ (단, $f_1(\alpha)\neq 0$)
□ $f_1(x)\pm g_1(x)$	□ $\dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}$ (단, $g_1(\alpha)\neq 0$)
□ $g_1(x)\pm g_2(x)$	□ $\dfrac{g_1(x)}{f_1(x)}$ (단, $f_1(\alpha)\neq 0$)
□ $f_1(x)\times f_2(x)$	□ $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ (단, $g_1(\alpha)\neq 0$)
□ $f_1(x)\times g_1(x)$	
□ $g_1(x)\times g_2(x)$	

촌철살인 108)주어진 구간에서 함수 $y=x-[x]$의 불연속점을 모두 구하시오.

(1) 구간 $(0,4)$ (2) 구간 $[0,4)$ (3) 구간 $(0,4]$

촌철살인 109)개구간 $(-2,\ 2)$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같고, $g(x)=2^{x}$ 일 때, 개구간 $(-2,\ 2)$ 에서 $h(x)=g(x)-|f(x)|$라고 하자.
이 때, $h(x)$가 불연속이 되는 점의 개수는?



촌철살인 110)함수 $f(x)=[x]+[-x]$에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

〈보기〉

ㄱ. 치역은 $\{0,\ -1\}$이다.

ㄴ. 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재한다.

ㄷ. 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n} f(x)=f(n)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

촌철살인 2009. 6. 가형(46%). 23번 4점

111)최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}$, $h(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일 때, $f(10)$의 값을 구하시오.

〈연속함수의 성질 2 : 논계스 9 - 함수의 합성〉

촌철살인 112)$f(x)$와 $g(x)$는 실수전체에서 정의되는 함수이다. $f(x)$는 $x=\alpha$에서 연속이고, $g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속일 때, 주어진 명제의 참 · 거짓을 판단하기 위해 조사해야 하는 점을 설명하라.

□ $f(g(x))$는 $x=\alpha$에서 불연속이다. ⇨
□ $g(f(x))$는 $x=\alpha$에서 불연속이다. ⇨
□ $f(f(x))$는 $x=\alpha$에서 연속이다. ⇨
□ $g(g(x))$는 $x=\alpha$에서 연속이다. ⇨
□ $f((x-\alpha)g(x))$는 $x=\alpha$에서 연속이다. ⇨

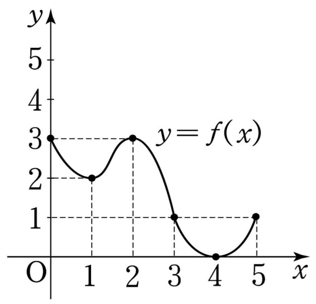
촌철살인 2008. 11. 가형(47%). 9번 4점

113)폐구간 $[0, 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} \{f(x)\}^2 & (0 \le x \le 3) \\ (f \circ f)(x) & (3 < x \le 5) \end{cases}$라 하자.

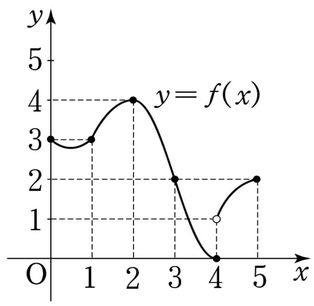
함수 $g(x)$가 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=f(x)$의 그래프로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

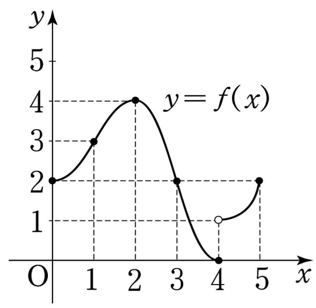
ㄱ.



ㄴ.



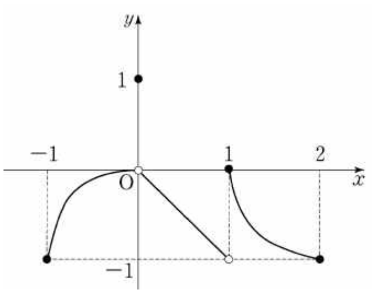
ㄷ.



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

촌철살인 2009. 6. 가형(38%). 10번 4점

114)폐구간 $[-1, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



폐구간 $[-1, 2]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 $g(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$,

$h(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$는 존재한다.

ㄴ. 함수 $(h \circ g)(x)$는 폐구간 $[-1, 2]$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x \to 0} (g \circ h)(x) = (g \circ h)(0)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄴ,ㄷ

〈사잇값 정리〉

촌철살인 115)방정식 $2^x - 3x = 0$은 개구간 $(3,4)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

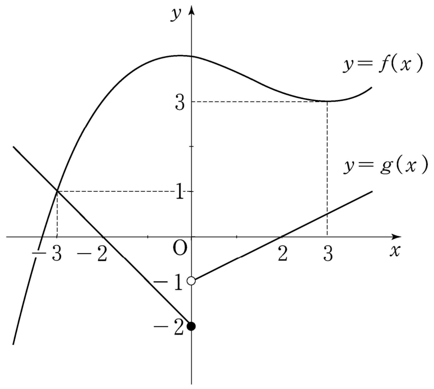
촌철살인 116)다음 중 $x\cos x = \sin x$가 적어도 한 개의 실근을 갖는 구간은?

① $(0,1)$ ② $(1,\frac{\pi}{2})$ ③ $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ④ $(\pi,\frac{3}{2}\pi)$ ⑤ $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$

촌철살인 2006. 6. 가형(77%). 7번 3점

117)삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x-1 & (x>0) \\ -x-2 & (x \le 0) \end{cases}$ 의 그래프가 그림과 같을 때,

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 0+} g(x) = -2$

ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 방정식 $g(f(x))=0$은 폐구간 $[-3,\ 3]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) 해설참조

∞와 상수	① $\infty \pm 3 = \infty$ ② $3\times\infty = \infty$ ③ $-3\times\infty = -\infty$ ④ $\frac{3}{\pm\infty} = 0$ ⑤ $\frac{\infty}{3} = \infty$ ⑥ $\frac{\infty}{-3} = -\infty$
∞와 ∞	① $\infty+\infty = \infty$ ② $\infty-\infty = ?$ ③ $\infty\times\infty = \infty$ ④ $-\infty\times\infty = -\infty$ ⑤ $-\infty\times-\infty = \infty$ ⑥ $\frac{\infty}{\infty} = ?$
∞와 ± 0	① $\frac{\pm 0}{\infty} = 0$ ② $\frac{\infty}{+0} = \infty$ ③ $\frac{\infty}{-0} = -\infty$ ④ $\pm 0\times\infty = ?$
∞와 0	① $\frac{0}{\infty} = 0$ ② $\frac{\infty}{0} =$ 정의하지 않음 ③ $0\times\infty = 0$
± 0와 ± 0	① $(\pm 0)+(\pm 0) = 0$ ② $(\pm 0)-(\pm 0) = 0$ ③ $(\pm 0)\times(\pm 0) = 0$ ④ $\frac{\pm 0}{\pm 0} = ?$
± 0와 상수	① $\pm 0\times$상수 $= 0$ ② $\frac{\pm 0}{상수} = 0$ ③ $\frac{2}{+0} = \infty$ ④ $\frac{2}{-0} = -\infty$
± 0와 0	① $\frac{0}{\pm 0} = 0$ ① $\frac{\pm 0}{0} =$ 정의하지 않음
진동하는 경우	수열 $\{a_n\}$이 $\begin{cases} a_{2n} = f(n) \\ a_{2n-1} = g(n) \end{cases}$와 같이 정의된 경우 $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$과 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$을 각각 따로 관찰하여 같은지 확인한다.

2) $\boxed{ㄴ, ㅁ}$

$(+0)$는 양의 무한소이고, (-0)은 음의 무한소라고 읽기로 한다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(1000n-n^2)$은 $\infty-\infty$꼴이므로 적당히 식을 변형해야 한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}(1000n-n^2) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1000}{n}-1\right) \Rightarrow \infty((+0)-1) \Rightarrow \infty(-1) \Rightarrow -\infty$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{100}{n^2}\right) \Rightarrow \infty-(+0) \Rightarrow \infty$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{-2n}$은 $\frac{\infty}{\infty}$꼴이므로 적당히 식을 변형해야 한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{-2n} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}n-\frac{4}{2n}\right) \Rightarrow -\infty-(+0) \Rightarrow -\infty$

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{2n^2}$은 $\frac{\infty}{\infty}$꼴이므로 적당히 식을 변형해야 한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{2}{n^2}\right) \Rightarrow (+0)+(+0) \Rightarrow 0$

ㅁ. $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\frac{1}{n}\right)} \Rightarrow \frac{3}{+0} \Rightarrow \infty$ $\boxed{ㄴ, ㅁ}$

3) $\boxed{\square}$

극한은 먼저 꼴을 확인하고 그 다음에 식을 적절히 변형하여 값을 추론한다.

□ $\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{n}-\frac{3}{n^3}) = 0$은 $(+0)-(+0)$이므로 0 (참)

□ $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+3}-\frac{2}{5-n}) = 0$은 $(+0)-(-0)$이므로 0 (참)

□ $\lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) = 2$은 $(2+0)\times(1-0)$이므로 2(참)

☐ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n}-1}{2+\frac{1}{n}}=-\dfrac{1}{2}$은 $\dfrac{+0-1}{2+0}$이므로 $-\dfrac{1}{2}$ (참)

☐ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=1$은 $\dfrac{+0}{1+0}$이므로 0 (거짓) 즉, 정답은 $\boxed{☐}$

4)

해설 (한 칸씩 건너뛰는) 간격수열 임을 느낄 수 있다면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}$과 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$을 각각 확인한다.

$\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{2}{6},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{3}{8},\ \dfrac{5}{9},\ \cdots$

(1) 오른쪽에서 ○의 일반항은 $a_{2n-1}=\dfrac{n+1}{2n+1}$이고,

△의 일반항은 $a_{2n}=\dfrac{n}{2n+2}$이다. 이 수열에 각각 극한을 취하면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\dfrac{1}{2}$

이다. 진동하는 것처럼 보이지만 극한으로 가면 결국에는 $\boxed{\text{수렴}}$한다.

$-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ -\dfrac{5}{6},\ \dfrac{6}{7},\ \cdots$

(2) 오른쪽에서 ○의 일반항은 $a_{2n-1}=-\dfrac{2n-1}{2n}$이고,

△의 일반항은 $a_{2n}=\dfrac{2n}{2n+1}$이다.

이 수열에 각각 극한을 취하면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=-1\ \neq\ \lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=1$이다. 결국 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$은 $\boxed{\text{발산}}$한다.

5)

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하기 때문에 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-b_n}{a_nb_n+1}$에서 $\lim$는 분배가 가능하다.

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-b_n}{a_nb_n+1}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n+1}=\dfrac{2\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}b_n+1}=\dfrac{2\times(-2)-2}{(-2)\times2+1}=\dfrac{-6}{-3}=2$

6)

먼저 꼴을 확인하고 <부정형>이면 lim내부 식을 변형하여 극한을 분배한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+1}{3n^2+n+2}$은 $\dfrac{\infty}{\infty}$의 꼴이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^2+n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{3n^2+n+2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{3}\text{이다.}$$

7)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{n}{n+1}\right)n$의 꼴을 확인하면 $(1-1)\times\infty$의 형태이므로 $\pm0\times\infty$의 꼴이다.

통분하고 분배하면 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{n}{n+1}\right)\times n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\right)\times n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{n^2+n}=2$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}}$의 꼴을 확인하면 $\dfrac{(+0)+(-0)}{(+0)+(+0)}$이므로 결국에는 $\dfrac{0}{0}$꼴이다.

번분수만 간단히 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)\times n^2}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\right)\times n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{1+2n} = \frac{3}{2}$이다.

참고) (2)은 <꼴 확인 논리의 중요성>을 피력하기 위해서 억지로 만든 유형일 뿐 실제로 계산문제는

<수열의 극한>에서는 주로 $\frac{\infty}{\infty}$와 $\infty-\infty$이 나오고, 종종 어려운 문제로 $0\times\infty$꼴이 나온다.

$\frac{0}{0}$꼴은 주로 <함수의 극한>과 <미분>에 나온다.

8)

$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ 꼴부터 확인하면 $\infty\times(\infty-\infty)$이므로 $\infty-\infty$부터 간단히 한다.

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)}{1}\times\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) \quad (\infty\times 0\text{의 꼴})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{꼴}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

9)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ 은 $\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$에서 $\infty-\infty$가 두 번 있기 때문에 식 변형도 두 번해야 한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}}{\boxed{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}\times\frac{\boxed{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}\times\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\boxed{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{꼴}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} = 2$$

10) 여기에서 합·차 공식 쓰고 있으면 또 부정형이 된다. 정답률을 보면 역대 2점짜리 중 가장 낮다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \rightarrow \frac{\infty+\infty}{\infty+\infty} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$꼴이므로 결국 $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{1}}=\sqrt{2}$ 이다.

11) 논개s **1** (꼴 확인) $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n-2}{bn^2-3n+3}$: $a=0, b\neq 0$이라면 0, $a\neq 0, b=0$이라면 ∞ 또는 $-\infty$,

또한 $a=0, b=0$이라면 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{-3n+3}$이므로 $-\frac{2}{3}$가 나와야 한다.

결국 조건에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n-2}{bn^2-3n+3}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ 즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{bn+a}{an-b}=\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$

12) 교과서 방식을 통해 스킬을 써도 되는 이유를 알고, 스킬이 편함을 느낀다.

논개s **1**은 그냥 사용하기로 한다.

교과서) 준 식에서 $b<0$라면 $\infty+\infty$이므로 수렴하기 위해서는 $b>0$이어야 한다.

즉, $\infty-\infty$이므로 합 · 차 공식을 이용하여 식을 변형한다.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+4n+a}-(bn+1)\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\sqrt{n^2+4n+a}-(bn+1)\right\}}{1}\times\frac{\left\{\sqrt{n^2+4n+a}+(bn+1)\right\}}{\left\{\sqrt{n^2+4n+a}+(bn+1)\right\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+a-(bn+1)^2}{\sqrt{n^2+4n+a}+(bn+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+a-(b^2n^2+2bn+1)}{\sqrt{n^2+4n+a}+(bn+1)}$$

꼴 확인 논리 : $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+a-(b^2n^2+2bn+1)}{\sqrt{n^2+4n+a}+(bn+1)}$ 에서 $b^2\neq 1$이라면 최고차는 $\lim_{n\to\infty}\frac{\text{이차}}{\text{일차}}$이므로 발산한다.

결국 $b^2=1 \Leftrightarrow b=1$이어야 한다. 즉, 처음 준 식에서 최고차항의 계수끼리 같아야 수렴한다.

값 구하기 : $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+a-(b^2n^2+2bn+1)}{\sqrt{n^2+4n+a}+(bn+1)}$ $(b=1$이므로$)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n+a-(2n+1)}{\sqrt{n^2+4n+a}+(n+1)} \left(\frac{\infty}{\infty}\text{이므로}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-2n}{\sqrt{n^2}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n} = 1$$

결국 처음 준 식에서 a는 극한 값에 영향을 주지 못한다. (완전제곱식이 되도록 마음대로 바꿔도 상관없다.)

13) $\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{n^2+n}-n)+(\sqrt{n^2+2n}-n)+\cdots+(\sqrt{n^2+10n}-n)\}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)+\left(\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right)+\cdots+\left(\frac{10n}{\sqrt{n^2+10n}+n}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{10}{\sqrt{1+\frac{10}{n}}+1}\right)\right\} = \frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{10}{2} = \frac{55}{2}$$

논개s 1 근호 안에 이차식이 있으므로 $\sqrt{n^2+an+b}$ 를 $n+\frac{a}{2}$으로 바꾸어 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}+\cdots+\sqrt{n^2+10n}-10n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)+\left(n+\frac{2}{2}\right)+\cdots+\left(n+\frac{10}{2}\right)-10n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{10}{2}\right) = \frac{55}{2}$$

주의사항) $\sqrt{n^2+an+b}$ 에서 0과 무한소의 구분

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=0$이고, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2}-n)=0$이므로 ***극한의 결과***는 같지만 $\lim$안쪽에서 ***과정***은 서로 다르다. 예를 들어 $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$ 의 경우 $\lim$안에서 $(\sqrt{n^2+1}-n)$ 은 무한소이고,

$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2}-n)$ 의 경우 $(\sqrt{n^2}-n)$은 명백하게 0이다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2}-n) = \infty\times 0 = 0$이지만 $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$ 은 $\infty\times(\pm 0)$꼴이고,

어쩔 수 없이 합 · 차 공식을 써야 한다.

14) (꼴의 논리 1) $\infty-\infty$꼴이므로 합 · 차 공식을 이용하여 식을 정리한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}-(an+b)}{1}\times\frac{\{\sqrt{n^2+4n}+(an+b)\}}{\{\sqrt{n^2+4n}+(an+b)\}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n-(an+b)^2}{\sqrt{n^2+4n}+(an+b)} = 3$$

(꼴의 논리 2) 결국 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n-(an+b)^2}{\sqrt{n^2+4n}+(an+b)}$ 이 3으로 수렴하려면 분모의 최고차항이 일차이므로

분자의 최고차항도 일차가 되어야 한다. 즉, 분자의 n^2을 없애려면 $a=\pm 1$

$a=-1$이면 준식의 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+4n}-(an+b)\}$이 발산하므로 $a=1$

(값의 계산) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n-(an+b)^2}{\sqrt{n^2+4n}+(an+b)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n-(n+b)^2}{\sqrt{n^2+4n}+(n+b)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4-2b)n-b^2}{\sqrt{n^2+4n}+(n+b)} = 3$

이므로 최고차항의 계수만 비교해 주면 $\frac{4-2b}{2}=3$이다. 즉, $b=-1$ 정답은 $a+b=0$

논개s 2 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+4n}-(an+b)\}=3$ 이 수렴하려면 최도차함의 계수도 같아야 하므로 $a=1$

즉, $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+4n}-(an+b)\right\}=3 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\{(n+2)-(n+b)\}=3 \Leftrightarrow 2-b=3 \Leftrightarrow b=-1$

15) 꼴 확인의 논리) 극한은 꼴값이다. 꼴 확인의 논리 없이 절대 정복할 수 없다.

주어진 식 $\lim_{n\to\infty}n\left\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\right\}$이 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\right\}$이 0으로 수렴해야만 한다. 앞의 n이 ∞로 발산하기 때문에 $\infty\times(\pm 0)$이 아니라면 그 어떤 경우에도 수렴할 수 없기 때문이다.

논개s 2 $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\right\}$이 0으로 수렴하려면 일단 최고차항의 계수가 같아야 하므로 $a=1$이다. 또한 $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\right\} \to \lim_{n\to\infty}\{(n+2)-(n+b)\}$이 0이려면 $b=2$이다.

결국 $\lim_{n\to\infty}n\left\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\right\} = \lim_{n\to\infty}n\left\{\sqrt{n^2+4n+3}-(n+2)\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\{n^2+4n+3-(n+2)^2\}}{\sqrt{n^2+4n+3}+(n+2)}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2+4n+3}+(n+2)}$ ($\frac{\infty}{\infty}$꼴 논개s 1) $= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2}+n} = -\frac{1}{2}$

답. $a=1, b=2, c=-\frac{1}{2}$

16) 치환을 이용한다. $a_n-b_n=c_n$이라 두면 결국 문제의 조건은 ⇨ $\lim_{n\to\infty}c_n=-2$

$a_n-b_n=c_n \Leftrightarrow a_n=b_n+c_n \left(\lim_{n\to\infty}b_n\to\infty\right)$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-2}{a_n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n-2}{b_n+c_n-2}$

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-2}{b_n+c_n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b_n-2}{b_n}\right)}{\left(\frac{b_n+c_n-2}{b_n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{b_n}}{1+\frac{c_n}{b_n}-\frac{2}{b_n}} = 1$

논개s 4 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$이 모두 양의 무한대로 발산, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-2$: $a_n=n$, $b_n=n+2$라고 둔다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-2}{a_n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2-2}{n-2} = 1$

17) 치환을 이용한다.

$(2n-1)a_n=c_n$, $(n^2+3n+2)b_n=d_n$이라고 두면 결국 문제의 조건은 ⇨ $\lim_{n\to\infty}c_n=3$, $\lim_{n\to\infty}d_n=2$

$a_n=\frac{c_n}{(2n-1)}$이고, $b_n=\frac{d_n}{(n^2+3n+2)}$이므로

$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^3a_nb_n = \lim_{n\to\infty}(2n+1)^3\times\frac{c_n}{(2n-1)}\times\frac{d_n}{(n^2+3n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3}{(2n-1)(n^2+3n+2)}\times c_n\times d_n$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3}{(2n-1)(n^2+3n+2)}\times\lim_{n\to\infty}c_n\times\lim_{n\to\infty}d_n = 4\times3\times2 = 24$

논개s 4 $\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}(n^2+3n+2)b_n=2$: $a_n=\frac{3}{2n}$, $b_n=\frac{2}{n^2}$라고 둔다.

즉, $\lim_{n\to\infty}(2n+1)^3a_nb_n = \lim_{n\to\infty}(2n+1)^3\times\frac{3}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(8n^3+\sim\sim\sim)\times3}{n^3} = 24$

18) ① lim 내부 연산은 항상 가능하다. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\times n$으로 변형하는 것은 가능하다.

② 수렴하는 수열에 대하여 lim분배가 가능하다. 즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\times n$에서 수열 $\{n\}$은 발산하므로 lim를 분배하면 안 된다. ⇨ 정답은 ②

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}$은 명백하게 0이다. (무한소가 아니다.) 즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\times\lim_{n\to\infty}n = 0\times\lim_{n\to\infty}n$

④ $0\times\lim_{n\to\infty}n = 0$: 비록 $\lim_{n\to\infty}n$이 무한대로 발산하고 있지만 무한소가 아닌 0(영)과 곱하면 0이 된다.

바른 계산) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n} = \lim_{n\to\infty}2 = 2$

19) ① $\lim$ 내부 연산은 항상 가능하다.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$으로 변형하는 것은 가능하다.

② 수렴하는 수열이라도 더해지는 항의 개수가 유한개이어야 $\lim$분배가 가능하다.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$의 내부수열의 항의 개수는 n개인데 $n\to\infty$이므로 항의 개수는 무한개가 된다. 즉, $\lim$를 분배하면 안 된다. ⇨ 정답은 ②

(이 계산을 올바로 하는 방법을 교육과정에서는 무한급수 단원에서 따로 만들어 가르친다.)

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}, \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}, \cdots, \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$은 모두 명백하게 0이다. (무한소가 아니다.)

④ $0+0+0+\cdots+0 = 0$: 0(영)은 아무리 무한개를 더해도 0(영)이다.

바른 계산) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2}+\frac{n}{2n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$

20) 답. ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2}{\sum_{k=1}^{2n}(2k)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)}{\sum_{k=1}^{2n}4k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}+n}{\frac{4\,\square 2n(2n+1)(4n+1)}{6}}=\frac{1}{8}$$

21) 답. ②

$$f(n)=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2+2n}=\frac{2n^2+3n+1}{6n+12}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2+12n}=\frac{1}{3}$

22) 답. 12

$a_n=an+b$라 하면,

$b_n=a_{3n-2}+2a_{3n-1}+a_{3n}$

$=4a_{3n-1}=12an-4a+4b$

$A_n=\frac{an(n+1)}{2}+bn$

$B_n=\frac{12an(n+1)}{2}-(4a-4b)n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{A_n}=12$

23) 답. 7

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\{k^2+(2n+1)k+n^2+n\}=\dfrac{n(n+1)(7n+2)}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{S_n}=7$

24) 직관적으로 확인 : $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos n\pi=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\cos n\pi}{n}$에서 분자는 $-1, 1, -1, \cdots$로 진동하지만 분모는 ∞로

발산하기 때문에 전체적으로 n이 커질수록 0으로 가까이 간다. 즉, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos n\pi=0$

극한의 성질 2 활용 : $-1\le\cos n\pi\le 1 \Rightarrow \dfrac{-1}{n}\le\dfrac{\cos n\pi}{n}\le\dfrac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\dfrac{-1}{n}\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{\cos n\pi}{n}\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\dfrac{-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$이므로 $0\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{\cos n\pi}{n}\le 0$ 즉, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos n\pi=0$

25) 1 단계 : $3n^2-5n-1<a_n<3n^2+n+2$의 양변을 n^2+2n+2로 나눈다.

(n은 자연수이므로 n^2+2n+2은 양수이고 부등호의 방향은 변하지 않는다.)

즉, $\dfrac{3n^2-5n-1}{n^2+2n+2}<\dfrac{a_n}{n^2+2n+2}<\dfrac{3n^2+n+2}{n^2+2n+2}$이다.

2 단계 : 양변에 극한을 취하면 등호가 생긴다. 즉, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n-1}{n^2+2n+2}\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2+2n+2}\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+2}{n^2+2n+2}$

이고 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n-1}{n^2+2n+2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+2}{n^2+2n+2}=3$이므로 $3\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2+2n+2}\le 3$이다. 즉, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2+2n+2}=3$

논개s 3 로 다시풀기

$3n^2-5n-1<a_n<3n^2+n+2$이므로 $a_n=3n^2-5n-1$라고 두고 푼다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2+2n+2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n-1}{n^2+2n+2}=3$

26) 부등호가 두 개 나올 때는 식을 적절히 변형하여 샌드위치 정리를 이용한다.

주어진 조건이 $n<a_n<n+1$이므로 $\dfrac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$의 식의 모양을 맞춘다. 아래에서

$$\begin{array}{rcccl} 1 & < & a_1 & < & 2 \\ 2 & < & a_2 & < & 3 \\ & & \vdots & & \\ + \quad n & < & a_n & < & (n+1) \\ \hline \end{array}$$
$$1+2+\cdots+n<a_1+a_2+\cdots+a_n<2+3+\cdots+(n+1)$$

$\dfrac{n(n+1)}{2}<a_1+a_2+\cdots+a_n<\dfrac{n(n+3)}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{n(n+3)}<\dfrac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<\dfrac{2}{n(n+1)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2n^2}{n(n+3)}<\dfrac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<\dfrac{2n^2}{n(n+1)}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n(n+3)}\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n(n+1)} \Leftrightarrow 2\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\le 2$

이므로 정답은 2

논개s 3 로 다시풀기

$n<a_n<n+1$이므로 $a_n=n$라고 두고 푼다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{1+2+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n(n+1)}=2$

27) 부등호가 두 개 나올 때는 식을 적절히 변형하여 샌드위치 정리를 이용한다.
(부등식의 사칙연산 - Max & min)

$$\begin{cases} \dfrac{2n(2n+1)}{6} < a_{2n} < \dfrac{(2n+1)^2}{6} \\ \dfrac{n(n+1)}{6} < a_n < \dfrac{(n+1)^2}{6} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\frac{2n(2n+1)}{6}}{\frac{(n+1)^2}{6}} < \dfrac{a_{2n}}{a_n} < \dfrac{\frac{(2n+1)^2}{6}}{\frac{n(n+1)}{6}} \Leftrightarrow \dfrac{2n(2n+1)}{(n+1)^2} < \dfrac{a_{2n}}{a_n} < \dfrac{(2n+1)^2}{n(n+1)}$$

양변에 극한을 취하면 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n(2n+1)}{(n+1)^2} \le \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_n} \le \lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n(n+1)} \Leftrightarrow 4 \le \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_n} \le 4$ 즉, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_n}=4$

논개s **3** 로 다시풀기

$\dfrac{n(n+1)}{6} < a_n < \dfrac{(n+1)^2}{6}$ 이므로 $a_n = \dfrac{n(n+1)}{6}$ 라고 두고 푼다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2n(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{6}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2n(2n+1)}{n(n+1)} = 4$

28) 수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 은 어떤 값 α로 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$

즉, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n-1}+20}{a_{n+1}-14}=2 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha+20}{\alpha-14}=2 \Leftrightarrow \alpha+20=2(\alpha-14) \Leftrightarrow \alpha=48$

29) 답. 15

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} - 2a_n\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} - \lim_{n\to\infty} 2a_n$$

그런데 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$ 이므로

$\alpha = \dfrac{3}{2} - 2\alpha$ 에서 $\alpha = \dfrac{1}{2}$ $\therefore\ 30\alpha = 15$

<다른풀이>

$a_1 = 2,\ a_2 = 1 = \dfrac{3}{3},\ a_3 = \dfrac{4}{5},\ a_4 = \dfrac{5}{7},\ \cdots$

이므로 $a_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n-1} = \dfrac{1}{2}$ 에서 $30\alpha = 15$ 이다.

30) 답. ⑤

ㄱ. $p=q$일 때 주어진 식의 양변을 p로 나누면

$a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{p}$ 이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $\dfrac{1}{p}$인 등차수열이다. (참)

ㄴ. $a_{n+1} = \dfrac{q}{p}a_n + \dfrac{1}{p}$ 이므로

$a_{n+1} - \alpha = \dfrac{q}{p}(a_n - \alpha)$ $\left(\text{단, } \alpha = \dfrac{1}{p-q}\right)$

따라서 수열 $\left\{a_n - \dfrac{1}{p-q}\right\}$은 첫째항이 $a_1 - \dfrac{1}{p-q}$ 이고, 공비가 $\dfrac{q}{p}$ 인 등비수열이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $a_n = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}(a_1 - \alpha) + \alpha$ 이므로

$-1 < \frac{q}{p} < 1$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31) 답. 3

32) 수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 은 어떤 값 α로 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$

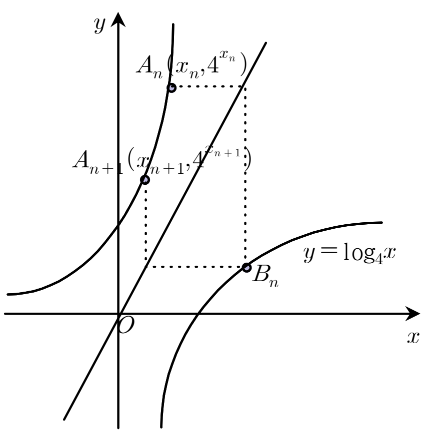
$a_n + 2 < 3a_{n+1} < 2a_n + 1$의 양변에 극한(lim)을 취하면 등호가 생기므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2) \le \lim_{n\to\infty} 3a_{n+1} \le \lim_{n\to\infty}(2a_n+1) \Leftrightarrow \alpha+2 \le 3\alpha \le 2\alpha+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2 \le 3\alpha \\ 3\alpha \le 2\alpha+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le \alpha \\ 1 \ge \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

33) 답. ⑤
점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하면
점 A_n의 좌표는 $(a_n, -a_n+2)$
점 B_n의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4}(a_n+2), -a_n+2\right)$
점 C_n의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4}(a_n+2), 0\right)$
따라서 점 P_{n+1}의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}(a_n+2), 0\right)$
$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n+2)$
$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$이므로
$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}(a_n+2)$에서
$\alpha = \frac{1}{4}(\alpha+2) \quad \therefore \alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$

34) 답. ⑤



A_n의 x좌표를 x_n이라고 가정하면 $A_n = (x_n, 4^{x_n})$이고
$y=2x$와의 교점의 좌표는 $(\frac{1}{2}\times 4^{x_n}, 4^{x_n})$ 이다.
따라서 $y=\log_4 x$에 $x = \frac{1}{2}\times 4^{x_n}$를 대입하면
B_n의 y좌표는 $y = \log_{2^2} 2^{2x_n-1} = \frac{2x_n-1}{2}$이다.

따라서 $y=2x$에 다시 대입하면

$\dfrac{2x_n-1}{2}=2x_{n+1}$이다. $\therefore\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n-\dfrac{1}{4}$이므로

일반항 $x_n=(x_1+\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{2})^{n-1}-\dfrac{1}{2}$이고 $n\to\infty$일 때

$(\dfrac{1}{2})^{n-1}\to 0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\dfrac{1}{2}$

35) 답. ④

n일 후 정오에 측정한 2호 댐의 저수량을 x_n(만톤)이라 하면 $x_n\times 0.98+100=x_{n+1}$

$(x_{n+1}-5000)=0.98(x_n-5000)$

$\therefore\ x_n-5000=(x_1-5000)0.98^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=5000+\lim\limits_{n\to\infty}(x_1-5000)0.98^{n-1}=5000$

따라서, 측정되는 저수량은 5000만톤에 한없이 가까워진다.

(1) $\{1.5^n\}$은 공비인 1.5가 $|1.5|>1$이므로 발산한다.

(2) $\{(-0.9)^n\}$은 공비인 -0.9가 $|-0.9|<1$이므로 수렴한다.

(3) $\left\{\cos^n\dfrac{3}{4}\pi\right\}$는 공비인 $\cos\dfrac{3}{4}\pi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$가 $\left|-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|<1$이므로 수렴한다.36)

37) $\left\{\left(\dfrac{2x-1}{4}\right)^n\right\}$이 수렴 : $-1<$공비≤ 1 즉, $-1<\dfrac{2x-1}{4}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{-3}{2}<x\le\dfrac{5}{2}$

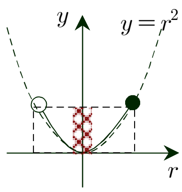
이 범위의 정수는 $-1,0,1,2$ 이렇게 총 4개이므로 정답은 40

38) 조건 〈무한등비수열 $\{r^n\}$이 수렴〉에서 $-1<r\le 1$이라는 사실을 알 수 있다.

ㄱ. $\{(-r)^n\}$에서 공비는 $-r$ ⇨ $1>-r\ge -1 \Leftrightarrow -1\le -r<1$이다. 즉, 공비$(-r)$가 -1 일수도 있으므로 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

ㄴ. $\left\{\left(\dfrac{1-r}{2}\right)^n\right\}$에서 공비는 $\dfrac{1-r}{2}$ ⇨ $-1<r\le 1 \Leftrightarrow 0\le\dfrac{1-r}{2}<1$이므로 항상 수렴한다.

ㄷ. $\{r^{2n}\}$에서 공비는 r^2이고 r^2의 범위는 부등식을 변형해서 알기 어렵다.
이처럼 부등식을 변형해서 알기 어려운 범위는 그래프를 그려 치역을 관찰한다.
오른쪽 그림에서 $-1<r\le 1$에서 r^2의 범위는 $0\le r^2\le 1$이므로 항상 수렴한다.
정답은 ㄴ, ㄷ이다.



39) 1) 수열 $\{x^{2n}\}$의 공비는 x^2 ⇨ $x^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$

2) 수열 $\{(x+1)(x-1)^{n-1}\}$의 공비는 $x-1$ ⇨ $-1<x-1\le 1 \Leftrightarrow 0<x\le 2$

의 공비 외(外) 변수는 $x+1$ ⇨ $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

2)의 경우 $x=-1$이면 공비가 아무리 발산의 범위에 있더라도 $0,0,0,\cdots$이므로 수렴하게 된다.

1)과 2)의 교집합은 $x=-1$ 또는 $0<x\le 1$이므로 결국 정수는 -1과 1 둘 뿐이다. 정답은 2개

40) 이 식에서는 분모에서 4^n이 |공비|이 가장 크므로 분모와 분자를 4^n으로 나눈다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n-1}+2^{n+10}-1}{2^{2n-2}+(-2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}\times(-2)^{2n} + 2^{10}\times 2^n -1}{\frac{1}{4}\times 2^{2n} + (-2)\times(-2)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{-\frac{1}{2}\times 2^{2n} + 2^{10}\times 2^n -1}{4^n}}{\dfrac{\frac{1}{4}\times 2^{2n} + (-2)\times(-2)^n}{4^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2} + 2^{10}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4} -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -2\text{이다.}$$

논개s 5 : 이 식에서는 4^n이 |공비|이 가장 크므로 나머지 항들은 제거한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n-1} + 2^{n+10} -1}{2^{2n-2} + (-2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n-1}}{2^{2n-2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}\times 4^n}{\frac{1}{4}\times 4^n} = -2$$

41) 이 식에서는 분모에서 4^n이 |공비|이 가장 크므로 분모와 분자를 4^n으로 나눈다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{2^{2n}+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{4^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{4^n}}{\dfrac{4^n+3^n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-3}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n} = -3$$

논개s 5 |공비|이 가장 큰 항을 제외하고는 모두 없앤다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{2^{2n}+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{4^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4^n}{4^n} = -3$$

42) 루트까지 생각해서 공비를 정한다. 예를 들어 $\sqrt{3^n}$의 경우 $\sqrt{3^n} = (\sqrt{3})^n$이므로 공비는 $\sqrt{3}$이다.

논개s 5 i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{\sqrt{9^n-2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{\sqrt{9^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\times 3^n}{3^n} = 3$

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2^{n+1}}+\sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n}+\sqrt{3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3^n}}{\sqrt{3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3^n}}{\sqrt{3\times 3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3^n}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

결국 $\alpha\beta = 3\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

43) 일단 꼴은 $\infty-\infty$꼴이다. 간단한 식 변형을 통해서 $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 변형한 후 논개s 5를 이용한다.

$$\lim_{n\to\infty}\{\log(3^n-2^n+3)-\log 3^{n-1}\} = \lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{3^n-2^n+3}{3^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{3^n}{\frac{1}{3}\times 3^n}\right) = \log\frac{1}{\frac{1}{3}} = \log 3$$

44) 일단 꼴은 $\infty\times 0$꼴이다. 간단한 식 변형을 통해서 $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 변형한 후 논개s 5를 이용한다.

$$\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n+3)\times\frac{2}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(3^n-2^n+3)}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(3^n-2^n+3)}{3\times 3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^n}{3\times 3^n} = \frac{2}{3}$$

45) 일단 꼴은 $\frac{0}{0}$꼴이다.

교과서 방식) 분모와 분자에 동시에 $(-3)^n$을 곱해서 식을 변형한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5^n}+3\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{4^n}-\left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\frac{1}{5^n}+3\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}(-3)^n}{\left\{\frac{1}{4^n}-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}(-3)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^n+3}{\left(-\frac{3}{4}\right)^n-1} = \frac{3}{-1} = -3$$

논개s 5 |공비|이 가장 큰 항만 생각 남기고 생각한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5^n}+3\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{4^n}-\left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{-\left(-\frac{1}{3}\right)^n} = -3$

46) 교과서 방식) 꼴을 확인하기 위해 주어진 조건 $|a|>|b|$에서 가능한 몇 가지 케이스를 분류한다.

i) $|a|>|b|>1$인 경우 : 주어진 식은 $\frac{\infty}{\infty}$꼴이고 분모와 분자를 모두 a^n으로 나눈다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a^n-2ab^{n-1}}{2a^{n-1}b-3b^n}=2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3a^n-\frac{2}{b}ab^n}{\frac{2}{a}a^nb-3b^n}=2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{b}a\left(\frac{b}{a}\right)^n}{\frac{2}{a}b-3\left(\frac{b}{a}\right)^n}=2$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$ 이므로 $\frac{3}{\left(\frac{2b}{a}\right)}=\frac{3a}{2b}=2 \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{4}$

ii) $|a|>1>|b|$인 경우 : 주어진 식에서 $\lim_{n\to\infty}b^n=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a^n-2ab^{n-1}}{2a^{n-1}b-3b^n}=2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3a^n-\frac{2}{b}ab^n}{\frac{2}{a}a^nb-3b^n}=2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3a^n}{\frac{2b}{a}a^n}=2 \Leftrightarrow \frac{3}{\left(\frac{2b}{a}\right)}=2 \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{4}$$

iii) $1>|a|>|b|$인 경우 : 주어진 식은 $\frac{0}{0}$꼴이고 분모와 분자를 모두 $\left(\frac{1}{a}\right)^n$으로 곱한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a^n-2ab^{n-1}}{2a^{n-1}b-3b^n}=2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3a^n-\frac{2}{b}ab^n}{\frac{2}{a}a^nb-3b^n}=2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{b}a\left(\frac{b}{a}\right)^n}{\frac{2}{a}b-3\left(\frac{b}{a}\right)^n}=2$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$ 이므로 $\frac{3}{\left(\frac{2b}{a}\right)}=\frac{3a}{2b}=2 \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{4}$ 결국 위의 i), ii), iii)에서 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$이다.

논개s 5 $|a|>|b|$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a^n-2ab^{n-1}}{2a^{n-1}b-3b^n}=2$의 어떤 경우에도 |공비|이 큰 항을 제외한 나머지 항을 무시하고 계산할 수 있다. (위에 처럼 케이스 분류 할 필요가 없다.)

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a^n-2ab^{n-1}}{2a^{n-1}b-3b^n}=2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3a^n}{2a^{n-1}b}=2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3a^n}{2a^{n-1}b}=2$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3a^n}{\frac{2b}{a}a^n}=2 \Leftrightarrow \frac{3}{\left(\frac{2b}{a}\right)}=2 \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{4}$

47) 교과서 방식) 일단 꼴은 ∞^0이다. 이 경우 |공비|이 큰 항으로 묶어준다.

$$\lim_{n\to\infty}(5^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(5^n\times\left(1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}5\times\left(1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$$ 이다.

여기에서 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$은 결국 1^0이므로 1이 된다. 즉, $\lim_{n\to\infty}5\times\left(1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = 5\times1 = 5$

논개s 5 |공비|이 큰 항만 남긴다.

즉, $\lim_{n\to\infty}(5^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(5^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}5^{n\times\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}5 = 5$

48) 답. ⑤

49) 답. ①

[해설] 수열의 일반항을 a_n, n항까지의 합을 S_n이라 하면 $a_n = \dfrac{n}{(n^2-n+1)(n^2+n+1)}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right) \quad \therefore \lim_{n\to\infty}S_n = \frac{1}{2}$$

50) 답. 5

[해설] $2^a\times 3^b = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{3}{4} = 2^{-2}\times 3^1$$
$\therefore a^2+b^2=5$

51) 답. ③

$\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{AP}_n = \theta_n$이라 하면 $l_n = \theta_n$이고

(나)에 의하여 $\theta_n = \theta_1 r^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty}\theta_n = \dfrac{\theta_1}{1-r} = \dfrac{8}{15}\pi\cdots$①

(다)에 의하여 $\theta_1(1+r) = \dfrac{\pi}{2}\cdots$②

따라서 ①, ②에 의하여 $r=\dfrac{1}{4}$

52) 답. ②

53) 답. ③

[해설] 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}t_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}t_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n-\frac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2}\right\}=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2+n}{4n^2-4n+1}\right)=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}$$

54) 답. ①

(가)에서 $\dfrac{3n^2+1}{n(n+1)} < a_n$이고

(나)에서 $a_n < 3-\frac{1}{2}b_n$이므로

$\frac{3n^2+1}{n(n+1)} < a_n < 3-\frac{b_n}{2}$이다.

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n(n+1)} \le \lim_{n\to\infty}a_n \le \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{b_n}{2}\right)$이고

(다)에서 $\lim_{n\to\infty}b_n = 0$이므로 $3 \le \lim_{n\to\infty}a_n \le 3$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n = 3$

55) 답. 16

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=2$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4^{n+1}-3^{n-1}}{4^{n-1}+3^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4^n}+4-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{\frac{1}{4}+3\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{0+4-0}{\frac{1}{4}+0}=16$$

56) 답. (1) 참 (2) 거짓 (3) 참

57) 답. ③

[해설] ㄱ. $2a_{n+1}+a_n=2$는

$2\left(a_{n+1}-\frac{2}{3}\right) = -\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$이므로 수열 $\left\{a_n-\frac{2}{3}\right\}$는 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비는 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다. (참)

ㄴ. $a_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$ (참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n \ne 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다. (거짓)

58) 답.③

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산 (참)

ㄴ. (반례) $a_n=\frac{1}{3^n}$, $b_n=2$ (거짓)

ㄷ. $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n$이므로

$a_2=\frac{1}{2}a_1$, $a_3=\frac{1}{3}a_2$, $\cdots$, $a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}$

$\therefore\ a_n=\frac{1}{2\times3\times4\times\cdots\times n}a_1=\frac{1}{n!}$이므로

$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

59) 답. ⑤

$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

① $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3$(수렴)

② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$ (수렴)

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=-\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{2}{3}$ (수렴)

④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{6}{5}$ (수렴)

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=$ (발산)

따라서 수렴하지 않는 무한급수는 ⑤이다.

60) 답. $1<x<2$

61) 답. ⑤

62) 답. 27

[해설] 주어진 무한등비급수가 수렴하기 위한 조건은

(ⅰ) $-1<1-\frac{x}{4}<1$일 때, $0<x<8$

(ⅱ) 첫째항이 0일 때, $x=-1$

$\therefore x=-1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ 합은 27

63) 답. ④

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{5}{2}$

64) 답. ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r} = 3$이므로 $r = \frac{2}{3}$이다.

수열 $\{a_{3n-2}\}$는 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{8}{27}$인 등비수열이고

수열 $\{a_{3n-1}\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}$이고 공비가 $\frac{8}{27}$인 등비수열이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}-a_{3n-1}) = \frac{1}{1-\frac{8}{27}} - \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{8}{27}}$$
$$= \frac{9}{19}$$

65) 답. 11

$9x^2-6x-1=0$ 의 두 근은 $x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{3}$ 이고

$|\alpha|<1$, $|\beta|<1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n$ 은 수렴한다.

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{9}$ 이므로

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(\beta^n-\alpha^n) = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) = \frac{9}{2}$$

$\therefore\ p+q=2+9=11$

66) 답 : ②

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n} = \frac{0}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{0}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\frac{2}{4^6}+\dots$$
$$=\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^8}+\dots\right)+\left(\frac{2}{4^3}+\frac{2}{4^6}+\frac{2}{4^9}+\dots\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{4^2}}{1-\frac{1}{4^3}}+\frac{\frac{2}{4^3}}{1-\frac{1}{4^3}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{63}{64}}+\frac{\frac{2}{64}}{\frac{63}{64}} = \frac{2}{21}$$

67) 답. 15

수열 $\{a_n\}$은 $2, 1, 2, 1, 2, 1, \cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$\therefore\ p+q=8+7=15$

68) 답. ①

$$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^{n-1}a_{n-1}+7^na_n = 3^n-1$$
$$\cdots ㉠$$

$$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^{n-1}a_{n-1} = 3^{n-1}-1$$

$\cdots$ ㉡

㉠-㉡에서

$7^n a_n = 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore\ a_n = \dfrac{2 \cdot 3^{n-1}}{7^n}\quad (n \geq 2)$

$n=1$ 일 때, $7a_1 = 3^1 - 1$ 에서 $a_1 = \dfrac{2}{7}$ 이므로

$a_n = \dfrac{2 \cdot 3^{n-1}}{7^n}\quad (n \geq 1)$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{7^n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7^n} = \frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1}{3}$$

69) 답. 16

두 무한등비수열$\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r라 하자.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 8\ \cdots$ ㉠

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = 6\ \cdots$ ㉡

㉠-㉡에서 $\dfrac{a_1 - b_1}{1-r} = 2$

$a_1 - b_1 = 1$ 이므로 $\dfrac{1}{1-r} = 2$, $1-r = \dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ r = \dfrac{1}{2}$

㉠에서 $a_1 = 8(1-r) = 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 4$

㉡에서 $b_1 = 6(1-r) = 6 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$

따라서 수열 $\{a_n b_n\}$은 첫째항이

$a_1 b_1 = 4 \cdot 3 = 12$ 이고, 공비가 $r^2 = \dfrac{1}{4}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{12}{1-\frac{1}{4}} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = 16$$

70) 답. ①

사각형 $B_2P_1C_1P_2$에서 $\overline{P_1C_1} = \dfrac{1}{3}\overline{B_1C_1} = 2\sqrt{3}$

$\overline{C_1C_2} = \dfrac{1}{2}\overline{AC_1} = 3$이므로 $S_1 = \overline{P_1C_1} \cdot \overline{C_1C_2} = 6\sqrt{3}$

모든 자연수 n에 대하여 $\overline{P_{n+1}C_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\overline{P_nC_n}$이므로

$S_{n+1} = \dfrac{1}{4}S_n\ \ \therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = 8\sqrt{3}$

71) 답. ⑤

A_1의 한 변의 길이를 x라고 하면 피타고라스 정리에 의해 $x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}a$ 이므로

A_1의 넓이$=\frac{4}{5}a^2$ 이다. 마찬가지 방법으로

A_2의 넓이$=\frac{16}{25}a^2$

$\vdots$

A_n의 넓이$=\left(\frac{4}{5}\right)^n a^2$

따라서, 넓이의 합은 $\dfrac{\frac{4}{5}a^2}{1-\frac{4}{5}}=4a^2$이다.

72) 답.③

[해설] 원 C와 C_1의 반지름의 길이를 각각 r과 r_1이라 하면 $r=1$,

$\sqrt{2}r_1+r_1=1$이므로 $r_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$,

$r:r_1=r_n:r_{n+1}=1:\sqrt{2}-1$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}r_k=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

73) 답.④

원 O_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{A_1C_2}}+\overline{\mathrm{A_2C_1}}-\overline{\mathrm{A_2C_2}}=\overline{\mathrm{A_1C_1}}$

이므로 $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2r=6$ $\therefore$ $r=3\sqrt{2}-3$

따라서 반복되어지는 도형의 닮음비는

$3:(3\sqrt{2}-3)=1:(\sqrt{2}-1)$

이므로 넓이의 비는 $1:(\sqrt{2}-1)^2=1:(3-2\sqrt{2})$

그러므로 수열 $\{S_n+T_n\}$은 공비가 $3-2\sqrt{2}$인 등비수열이다. 이 때 첫째항 S_1+T_1의 값은

$\pi\cdot 3^2-2\times\left\{\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\right\}=18$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)=\frac{18}{1-(3-2\sqrt{2})}=\frac{18}{2\sqrt{2}-2}$$
$$=\frac{9}{\sqrt{2}-1}=9(\sqrt{2}+1)$$

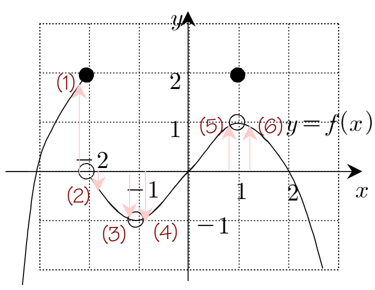
74)

그래프만 확인할 줄 안다면 따로 해설이 필요 없는 문제이다.

극한의 의미를 다시 한 번 되새겨 본다면 $f(1)=2$이지만 $\lim_{x\to1\pm0}f(x)=1$이다. 극한은 그 값이 아니라 다가갈 뿐입니다. 어디를 향해서 가는지만 확인하는 작업이 필요하다.

오른쪽 그림과 같이 좌극한과 우극한은 그 바로 옆의 값을 대입한다고 생각하여 문제를 푼다.

정답은 (1) 2 (2) 0 (3) -1 (4) -1 (5) 1 (6) 1



75) 일단 a는 고정 값이고, $a>1$이기 때문에 $\lim_{x\to1}|x-a|$에서 $x-a$는 음수로 보는 것이 맞다. (증명하지 않으므로 직관적으로 받아들여야 한다.) 즉, 절댓값이 벗겨지면서 $-$기호가 붙어 나오게 된다. 준 식을 정리하면

$\lim_{x\to1}\frac{|x-a|-(a-1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{-(x-a)-(a-1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{-x+1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{-(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(-1) = -1$

그러므로 정답은 $\boxed{④}$

76) $x\to n$의 의미를 안다면 매우 간단한 내용이다. $x\to n$은 $x\neq n$이고, n에 다가간다는 뜻이므로

모든 정수 n에 대해서 $\lim_{x\to n}f(x)=3$ 이다. 즉, $\sum_{n=1}^{30}\lim_{x\to n}f(x)=\sum_{n=1}^{30}3=90$이다. 정답은 $\boxed{90}$

77)

$\frac{1}{x}$의 분모가 0으로 가고 있기 때문에 좌극한과 우극한을 조사해 봐야 한다. (보통 $0+0$과 $0-0$의 경우에 $+0$, -0으로 표기한다. 숫자 0은 생략할 수 있지만 무한소에 해당하는 ±0에서 0은 생략하지 않는 것이 원칙이다.)

우극한 : $\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{+0}}} = \frac{1}{1+2^{\infty}} = 0$

좌극한 : $\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{-0}}} = \frac{1}{1+2^{-\infty}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2^{\infty}}} = \frac{1}{1+0} = 1$

이와 같이 생각해본다면 우극한 $\neq$ 좌극한이므로 극한값은 존재하지 않는다.

즉, $\lim_{x\to0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$은 존재하지 않는다.

78)

우극한 : $\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to1+0}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} = 1$

좌극한 : $\lim_{x\to1-0}\frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{-(x-1)} = \lim_{x\to1+0}\frac{\cancel{x-1}}{-\cancel{(x-1)}} = -1$

즉, 좌극한과 우극한이 다르므로 극한(값)은 존재하지 않는다. 정답은 $\boxed{\lim_{x\to1}\frac{x-1}{|x-1|}\text{의 극한(값)은 존재하지 않는다.}}$

참고) 물론 이 함수는 반드시 그래프를 그릴 줄 알아야 한다. 이것은 다음 주제인 다항함수의 연속성에서 공부한다.

79)

가우스가 왔으므로 당연히 좌우극한을 확인해 봐야 한다.

우극한 : $\lim_{x\to2+0}\frac{[x]}{x} = \frac{[2+0]}{2+0}$ 그런데 $[2+0]=2$이므로 $\frac{[2+0]}{2+0} = \frac{2}{2} = 1$

좌극한 : $\lim_{x\to2-0}\frac{[x]}{x} = \frac{[2-0]}{2-0}$ 그런데 $[2-0]=1$이므로 $\frac{[2-0]}{2-0} = \frac{1}{2}$

이처럼 좌극한과 우극한이 같지 않으므로 극한값은 존재하지 않는다. 정답은 $\lim_{x\to2}\frac{[x]}{x}$의 극한(값)은 존재하지 않는다.

80)

우리는 어차피 $x=3$을 기준으로 좌우에 다항함수가 있다. $f(3+0)$에서 $3+0$은 실제로 x^2+x-k에 대입하면 된다.

$f(3-0)$에서 $3-0$은 실제로 $2x+k$에 대입하면 된다.

우극한 : $f(3+0) = (3+0)^2+(3+0)-k = 12-k$

좌극한 : $f(3-0) = 2(3-0)+k = 6+k$

$\lim_{x\to3}f(x)$이 존재하려면 $f(3+0) = f(3-0)$이어야 하므로 $12-k=6+k \Leftrightarrow k=3$이다. 정답은 $\boxed{k=3}$

81) 방법 1) 치환과 극한의 분배를 통해서 해결한다.

1 단계 : $\frac{f(x)}{x}=h(x)$라고 치환하면, 조건은 $\lim_{x\to0}h(x)=k\ (k\neq0)$이고 준 식을 $h(x)$로 표현하면 $\lim_{x\to0}\frac{x^2-xh(x)}{x^2+xh(x)}$이다.

2 단계 : 이것을 계산하면 $\lim_{x\to0}\frac{x^2-xh(x)}{x^2+xh(x)} = \lim_{x\to0}\frac{x\{x-h(x)\}}{x\{x+h(x)\}} = \lim_{x\to0}\frac{x-h(x)}{x+h(x)} = \frac{-k}{k} = \boxed{-1}$이 된다.

방법 2) 조건에 맞게 모양 맞추기 - 준 식에서 분자와 분모를 x로 나누어 줍니다. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=k\ (k\neq0)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-f(x)}{x^2+f(x)} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2-f(x)}{x}}{\frac{x^2+f(x)}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{x-\frac{f(x)}{x}}{x+\frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{-k}{k} = \boxed{-1}$$이다.

82) 그냥 생각해보면 0이지만 수학적으로 풀어보면 다음과 같다.

수학적 풀이) x에 어떤 값이 들어간다 해도 $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq1$이라는 것을 알 수 있다. x는 양수일 수도 있고, 음수일 수도 있다.

$i)$ $x\to+0$인 경우 ; $x>0$이므로 $-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$이고, 양변에 $\lim_{x\to+0}$을 취하면 $\lim_{x\to+0}(-x)\leq\lim_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}\leq\lim_{x\to+0}x$

$\Leftrightarrow\ 0\leq\lim_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}\leq0$이므로 $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$이다.

$ii)$ $x\to-0$인 경우 ; $x<0$이므로 $-x\geq x\sin\frac{1}{x}\geq x$이고, 양변에 $\lim_{x\to-0}$을 취하면 $\lim_{x\to-0}(-x)\leq\lim_{x\to-0}x\sin\frac{1}{x}\leq\lim_{x\to-0}x$

$\Leftrightarrow\ 0\leq\lim_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}\leq0$이므로 $\lim_{x\to-0}x\sin\frac{1}{x}=0$이다.

즉, 좌우극한에서 $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$는 0이므로 $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$이다. 정답은 $\boxed{0}$

83) ②

치환을 이용하여 극한의 성질을 적용한다. 수열의 극한과 다름이 없다.

84) 직관적으로 해결한다. $a = \lim_{x\to-0}\frac{x}{[x]} = \frac{-0}{[-0]} = \frac{-0}{-1} = 0$

$$b = \lim_{x\to-0}\frac{[x-1]}{x-1} = \frac{[-0-1]}{-0-1} = \frac{-2}{-0-1} = 2$$

$$c = \lim_{x\to+0}\frac{[x+1]}{x+1} = \frac{[+0+1]}{+0+1} = \frac{1}{+0+1} = 1$$ 즉, 정답은 $\boxed{②}$

85) 극한은 상태확인이 중요하다. 문제가 어려워질수록 그렇다. 그래프를 그리는 것이 효율적인 함수가 있는가 하면 직관을 통해서 상태를 바로 확인하는 것이 효율적인 경우도 있다.

(1) $\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}$에서 x의 자리에 $1+0$을 대입해보면 $\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1+0-1} = \frac{1}{+0} = \boxed{\infty}$이다.

(2) $\lim_{x\to2-0}\frac{x}{x-2}$에서 x의 자리에 $2-0$을 대입해보면 $\lim_{x\to2-0}\frac{x}{x-2} = \frac{2-0}{2-0-2} = \frac{2}{-0} = \boxed{-\infty}$이다.

(3) $\lim_{x\to3}\frac{x+1}{(x-3)^2}$의 의미는 $x\to3\pm0$이므로 $\lim_{x\to3\pm0}\frac{x+1}{(x-3)^2} = \frac{3\pm0+1}{(3\pm0-3)^2} = \frac{4\pm0}{(\pm0)^2} = \frac{4}{+0} = \boxed{\infty}$이다.

(4) $\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{(x+1)^2}$도 역시 의미를 생각해 본다면 $x\to-1\pm0$이므로 이것을 주어진 식에 대입해서 직관적으로 따져본다.

즉, $\lim_{x\to-1\pm0}\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-1\pm0-1}{(-1\pm0+1)^2} = \frac{-2\pm0}{(\pm0)^2} = \frac{-2}{+0} = \boxed{-\infty}$이다.

86)

(1) 일단 x에 2를 대입하여 꼴부터 확인하면 $\frac{0}{0}$꼴이다. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$에서 ± 0(무한소)가 되는 인수인 $(x-2)$는 약분이 가능하다. 즉, $\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2} = \boxed{3}$입니다.

(2) x에 0을 대입하여 꼴을 확인 하면 $\frac{0}{0}$꼴이 된다. 하지만 준 식에서는 ± 0(무한소)가 되는 인수를 약분할 수 없으므로 식 변형을 한다. 즉, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$

이제 x (무한소가 되는 인수)를 약분할 수 있다. 즉, $\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1) = \boxed{2}$이다.

87)

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x+1})$에서 x자리에 0을 대입하여 꼴을 확인하면 $\infty\times 0$꼴이므로 간단히 식 변형을 통해서 $\frac{0}{0}$꼴을 만든다.

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x+1}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{x}{x+1}) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+1)}$이므로 드디어 $\frac{0}{0}$꼴로 바뀌었다.

이제 ± 0(무한소)가 되는 인수를 약분하고, 극한을 계산하면 정답은 $\boxed{1}$이다.

(2) $\lim_{x\to -2}\left\{\frac{x-2}{x+2}-\frac{3x-2}{(x+2)(x+4)}\right\}$에서 x자리에 -2을 대입하여 꼴을 확인하면 $\infty-\infty$꼴 이므로 또 간단한 식 변형을 해야 한다. (사실 $-2-0$과 $-2+0$에 따라서 ∞의 부호가 바뀌겠지만 어쨌든 부정형임은 변함이 없다.) 주어진 식을 통분하면 $\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+4)-(3x-2)}{(x+2)(x+4)} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{(x+2)(x+4)}$이다. 이제 $\frac{0}{0}$꼴이 되었으므로 분자를 인수분해하면 당연히 $(x+2)$가 생긴다. 즉, $\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+4)} = \lim_{x\to -2}\frac{x-3}{x+4} = -\frac{5}{2}$이다. 정답은 $\boxed{-\frac{5}{2}}$

(3) $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}}\right\}$의 0을 대입하면 $\frac{\infty}{\infty}$꼴이다. 분모와 분자에 동시에 x^2을 곱하면 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-1}$이고 $\frac{0}{0}$꼴로 바뀌었다. 즉,

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$ 정답은 $\boxed{1}$

88) ②

$$\lim_{x\to -2}\frac{\{f(x)\}^2-f(x)}{x^2f(x)-4f(x)} = \lim_{x\to -2}\frac{f(x)\{f(x)-1\}}{(x^2-4)f(x)} = \lim_{x\to -2}\frac{f(x)-1}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to -2}\frac{f(x)-1}{x+2}\cdot\lim_{x\to -2}\frac{1}{x-2} = 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$$

89) 두 가지 방법은 선택이 아니라 필수이다. 문제의 조건에 따라서 반드시 한 가지 방법으로 풀어야 하는 경우도 있다.

항등식 풀잇법) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$에서 $\frac{0}{0}$꼴이 되어야 하므로 x^2+ax+b은 반드시 $(x-1)$을 인수로 갖게 되어 있다.

즉, $x^2+ax+b=(x-1)(\sim\sim)$에서 $(x-1)$뒤에 곱해지는 식은 일차식이고, 최고차항의 계수가 1이므로 $x\sim\sim$인 식이 되고 마지막 상수를 맞추기 위해서 뒤에 $-b$를 쓰면 된다. (by 본의 아니게 법) 그러므로 $x^2+ax+b=(x-1)(x-b)$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-b)}{x-1} = 1-b = 5$이므로 $b=-4$이고, 대입하면 $x^2+ax+b = (x-1)(x+4)$이다.

전개하여 계수를 비교하면 $a=3$이다. 정답은 $\boxed{25}$

관계식 풀잇법) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$에서 $\frac{0}{0}$꼴이 되어야 하므로 분자의 식에 1을 대입하면 0이 되어야 한다.

즉, $1+a+b=0$이고, $b=-a-1$이다. 이것을 다시 분자에 대입하면 $x^2+ax-(a+1)$이고 이 식은 반드시 인수분해 된다.

$x^2+ax-(a+1) = (x+a+1)(x-1)$이고, $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = a+2 = 5$이므로 $a=3$이다.

이것을 $b=-a-1$에 대입하면 $b=-4$이다. 정답은 $\boxed{25}$

90) 주어진 식은 다항식이 아니므로 <관계식 풀잇법>이 효율적이다. <항등식 풀잇법>으로 하려면 먼저 합·차 공식으로 $\sqrt{\ }$를 없앤 후 다시 항등식의 성질을 이용해야 하지만 그냥 생각해 봐도 식이 복잡하다는 사실을 알 수 있다.

관계식 풀잇법) $\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=1$이 성립하기 위해서는 $\frac{0}{0}$꼴이 되어야 하므로 분자의 x에 2를 대입하면 0이 되어야 한다.

즉, $a+b=0$이고, b에 $-a$를 대입하면 $\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}$ 여기에 합·차

공식을 적용하면 $\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}\times\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} = \lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x\to2}\frac{a}{(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{a}{2} = 1$

이므로 $a=2$이고, $b=-2$이다. 정답은 $\boxed{a=2,\ b=-2}$

91)

이 때는 <관계식 풀잇법>은 너무 복잡하므로 <항등식 풀잇법>을 사용하는 것이 좋다.

(1) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$의 주어진 식이 성립하려면 $\frac{0}{0}$꼴이 되어야 하므로 $f(x)$는 $(x-1)$과 $(x-2)$를 인수로 가지고 있어야 한다. 즉, $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$라고 할 수 있다. 이것을 식에 대입하여 계산하면

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1} = -a-b = 4$이고, $\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2} = 2a+b = 3$이므로

$-a-b=4$와 $2a+b=3$을 연립하면 $a=7, b=-11$이다. 정답은 $\boxed{f(x)=(x-1)(x-2)(7x-11)}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x(x-1)}=1$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x(x-1)}=2$의 주어진 식이 성립하려면 $\frac{0}{0}$꼴이 되어야 하므로 $f(x)$는 x와 $(x-1)$를 인수로 가지고 있어야 한다. 즉, $f(x)=x(x-1)(ax+b)$라고 할 수 있다. 이것을 식에 대입하여 계산하면

$\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x(x-1)} = b = 1$이고, $\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x(x-1)} = a+b = 2$이므로 $a=1, b=1$이다.

정답은 $\boxed{f(x)=x(x-1)(x+1)}$

92)

(1) 에서 먼저 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$의 식을 만족시키려면 $\frac{\infty}{\infty}$꼴 이므로 $f(x)=2x^3+x^2+ax+b$가 되어야 한다.

그런 다음에는 $\lim_{x\to0}\frac{2x^3+x^2+ax+b}{x}=-3$이므로 두 가지 방법으로 풀 수 있다.

항등식 풀잇법) $\lim_{x\to0}\frac{2x^3+x^2+ax+b}{x}=-3$은 $\frac{0}{0}$꼴 이어야 하므로 $2x^3+x^2+ax+b$는 x를 인수로 가지고 있어야 한다.

즉, $b=0$이고, $\lim_{x\to0}\frac{x(2x^2+x+a)}{x} = a = -3$입니다. 그러면 정답은 $\boxed{f(x)=2x^3+x^2-3x}$

관계식 풀잇법) $\lim_{x\to0}\frac{2x^3+x^2+ax+b}{x}=-3$은 $\frac{0}{0}$꼴 이어야 하므로 $2x^3+x^2+ax+b$에 0을 대입하면 0이 되어야 한다.

즉, $b=0$이고, 분자를 x로 묶어주면 $\lim_{x\to0}\frac{x(2x^2+x+a)}{x} = a = -3$이다. 정답은 $\boxed{f(x)=2x^3+x^2-3x}$

93) 4

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(-t)}{-t}=\alpha$ $\therefore\ \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(-t)}{t}=-\alpha$

또 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{3f(-t)}{\sqrt{f(-t)+t^2}+f(-t)}=4$에서 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{3\cdot\dfrac{f(-t)}{t}}{\sqrt{\dfrac{f(-t)}{t}\cdot\dfrac{1}{t}+1}+\dfrac{f(-t)}{t}}=\dfrac{-3\alpha}{1-\alpha}=4$

$4-4\alpha=-3\alpha$ $\quad\therefore\ \alpha=4$

94) $\dfrac{1}{4}$

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

(주어진 식)$=\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t+3}+\sqrt{4t^2+5t+6}-3t)=\lim\limits_{t\to\infty}\{(\sqrt{t^2-2t+3}-t)+(\sqrt{4t^2+5t+6}-2t)\}$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2t+3}{\sqrt{t^2-2t+3}+t}+\frac{5t+6}{\sqrt{4t^2+5t+6}+2t}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2+\dfrac{3}{t}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{t^2}}+1}+\frac{5+\dfrac{6}{t}}{\sqrt{4+\dfrac{5}{t}+\dfrac{6}{t^2}}+2}\right)=-1+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$$

95)

주어진 문제는 간단하게 3점짜리로 낸 문제임에도 불구하고 정답률이 낮다. 극한에서 정의역을 치환하는 기술은 <극한의 증명>에서도 많이 쓰임에도 불구하고 학생들은 교과서를 이해하려고 노력하지 않기 때문에 이런 계산이 익숙하지 않다.

첫 번째 식 : $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^3f\left(\dfrac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5$ 에서 $x\to+0$이면 $\dfrac{1}{x}\to\infty$이므로 $\dfrac{1}{x}=t$라고 치환하면 $t\to\infty$이다. 준 식을 t에 대한 식으로 정리하면 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{t}\right)^3f(t)-1}{\left(\dfrac{1}{t}\right)^3+\dfrac{1}{t}}=5$ 이것을 다시 정리하면 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)-t^3}{1+t^2}=5$ 이다. 이제 수열의 극한 내용을 적용하면

$f(t)=t^3+5t^2+at+b$이다. 즉, $f(x)=x^3+5x^2+ax+b$

두 번째 식 : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}$ 에서 $f(x)=x^3+5x^2+ax+b$는 $(x-1)$을 인수로 가지므로

$x^3+5x^2+ax+b=(x-1)(x^2+6x-b)$라고 생각할 수 있고, (본의 아니게 법) 이것을 대입하여 두 번째 식을 정리하면

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+6x-b)}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{1}{3}\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6x-b}{x+2}=\dfrac{1}{3}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{7-b}{3}=\dfrac{1}{3}$이다. 즉, $b=6$이므로

이것을 $x^3+5x^2+ax+b=(x-1)(x^2+6x-b)$식에 대입하면 항등식의 성질에 의해서 $a=-12$이 된다. 결국

$f(x)=x^3+5x^2-12x+6$이므로 $f(2)=10$이다. 정답은 $\boxed{10}$

96)

앞의 조건에서 $x\to-1$이고, 우리가 구하는 것은 $x\to0$이다. 즉, 치환의 기술을 이용해서 $x\to-1$을 $t\to0$으로 고친다.

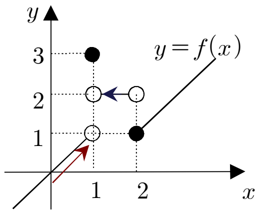
$x\to-1$에서 -1을 우변으로 이항시키면, $x+1\to0$이다. 여기에서 $x+1=t$라고 한다면 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}$이다.

여기에서 t를 그냥 x라고 생각해도 식의 의미는 달라지지 않는다. 즉, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=3$이므로 극한의 성질을 활용한다.

$\dfrac{f(x)}{x}=h(x)$라 하면 $\lim\limits_{x\to0}h(x)=3$이고, 주어진 식은 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-xh(x)}{x^2+xh(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-h(x)}{x+h(x)}=\dfrac{0-3}{0+3}=\boxed{-1}$

97)

단계적으로 문제를 풀어야 한다. 좌우극한 $f(x)$의 상태를 그래프를 통해서 관찰한다.

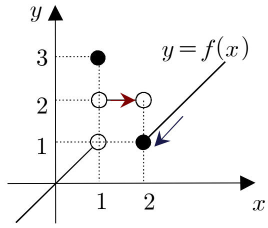


(1) 좌극한 : $x\to1-0$이면 $f(x)\to1-0$이다. 즉, $\lim_{x\to1-0}f(f(x)) = f(f(1-0)) = f(1-0) = 1$

우극한 : $x\to1+0$이면 $f(x)=2$이다. 이 때, 2는 고정된 2이다.

즉, $\lim_{x\to1+0}f(f(x)) = f(f(1+0)) = f(2) = 1$

그러므로 $\lim_{x\to1}f(f(x))$는 극한(값)이 존재하고 그 값은 $\boxed{1}$이다.

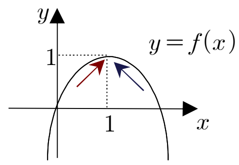


(2) 좌극한 : $x\to2-0$이면 $f(x)=2$이다. 이 때, 2는 고정된 2이다.

즉, $\lim_{x\to2-0}f(f(x)) = f(f(2-0)) = f(2) = 1$

우극한 : $x\to2+0$이면 $f(x)\to1+0$이다. 즉, $\lim_{x\to2+0}f(f(x)) = f(f(2+0)) = f(1+0) = 2$

그러므로 좌우극한이 다르기 때문에 $\lim_{x\to2}f(f(x))$는 존재하지 않는다.



98) 우리는 $f(x)$의 상태까지 그래프를 통해서 확인한다.
다음 그림에서 $x\to1+0$과 $x\to1-0$에 상관없이 $f(x)\to1-0$이라는 사실을 알 수 있다.
그래프를 보면 분명히 $f(1\pm0)$는 1보다 작은 쪽에서 1로 가까이 간다. 즉, $1-0$이라고 할 수 있다.
그러므로 $\lim_{x\to1}[f(x)] = [f(1\pm0)] = [1-0] = \boxed{0}$이다.

99) 답. ③

$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$에서 $s=\frac{t-1}{t+1}$로 놓으면 $s=1+\frac{-2}{t+1}$

이므로 $t\to\infty$일 때, $s\to1-0$

$\therefore \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{s\to1-0}f(s)=2$ ----㉠

또, $\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$에서 $s=\frac{4t-1}{t+1}$로 놓으면 $s=4+\frac{-5}{t+1}$

이므로 $t\to-\infty$일 때, $s\to4+0$

$\therefore \lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{s\to4+0}f(s)=3$ ---㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서 $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$

100) (1)은 실수 전체에서 연속이므로 정답은 구간 $\boxed{(-\infty,\infty)}$

(2)은 $x\le5$인 구간에서 연속이므로 정답은 구간 $\boxed{(-\infty,5]}$

(3)은 실수전체에서 연속이므로 정답은 구간 $\boxed{(-\infty,\infty)}$

101)
$x=p$일 때는 함숫값은 존재하지만 좌우극한값이 다르므로 극한값은 존재하지 않는다. 즉 ㉡이 성립하지 않아서 불연속.
$x=q$일 때는 함숫값도 극한값도 모두 존재하지만 두 값이 달라서 불연속이다. 즉, ㉢이 성립하지 않아서 불연속이다.
$x=r$일 때는 함숫값이 없다. 즉, ㉠이 성립하지 않아서 불연속이다. 그러므로 순서대로 ㉡, ㉢, ㉠ 정답은 $\boxed{③}$

102) ㄱ, ㄴ은 복습차원에서 확인해 본다.
ㄷ은 $x=1$이라는 정해진 점에서 확인하는 것이므로 $g(x)=f(x)+f(-x)$의 그래프를 그리는 쌩쑈는 할 필요가 없다.
ㄱ : $f(+0)=1$이고, $f(-0)=-1$이므로

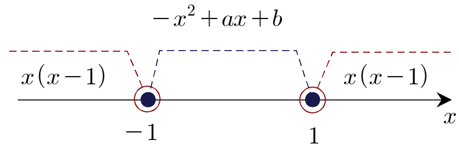
결국 $f(+0) \neq f(-0)$이고, $f(x)$는 $x=0$에서 극한값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ : $g(+0) = f(+0)+f(-0) = 1+(-1) = 0$

$g(-0) = f(-0)+f(+0) = (-1)+1 = 0$이므로
결국 $g(+0) = g(-0)$이고, $g(x)$는 $x=0$에서 극한값은 존재한다. (참)

ㄷ : $g(1) = f(1)+f(-1) = 1+(-1) = 0$
$g(1+0) = f(1+0)+f(-1-0) = 1+(-1) = 0$
$g(1-0) = f(1-0)+f(-1+0) = 2+(-2) = 0$이므로
결국 $g(1) = g(1+0) = g(1-0)$이고, $g(x)$는 $x=1$에서 극한값은 존재한다. (참)
즉, 참인 것은 ㄴ, ㄷ이므로 정답은 $\boxed{⑤}$이다.

103)
$f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (|x|>1) \\ -x^2+ax+b & (|x|\le 1)\end{cases}$은 물론 절댓값을 풀어서 x의 범위를 다시 표시해도 되지만 있는 그림으로 바로 표시하는 것이 직관적이고 좋다.
수능은 원래 정의역을 절댓값을 이용하여 표현하는 것을 좋아한다.
오른쪽 그림에서 파란색 부분에는 $-x^2+ax+b$의 그래프를 그리고



빨강색 부분에는 $x(x-1)$의 그래프를 그릴 것이므로 결국 $x=-1$과 $x=1$에서만 연속이면 주어진 함수는 모든 실수에서 연속이다.

$g(x) = -x^2+ax+b$, $h(x)=x(x-1)$라고 정의한다면 ① $h(-1-0) = g(-1) \Leftrightarrow 2 = -a+b-1$
② $g(1) = h(1+0) \Leftrightarrow a+b-1=0$

①과 ②의 식을 연립하면 $a=-1, b=2$이므로 정답은 $a-b=-3$이다. 정답은 $\boxed{①}$

104)
주어진 함수에 연속함수라는 조건이 있으므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이어야 한다. 극한값은 당연히 1로 가까이 갈 뿐이지 1이 아니기 때문에 $x\ne 1$인 범위의 식에 영향을 준다. 즉, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$이므로 우리가 아는 $\frac{0}{0}$꼴의 극한문제로 바뀌었다.
항등식 풀잇법으로 풀어보면 (관계식 풀잇법을 이용해도 상관없다.) 위의 식의 분자는 반드시 $x-1$을 인수로 가지게 되어있으므로 $x^2+ax+b=(x-1)(x-b)$이다. (상수부분이 b가 되도록 맞추어 준 것이다.) 대입하여 계산하면
$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-b)}{x-1} = 1-b = 3$ 이므로 $b=-2$이고, 이것을 다시 우변에 대입하면 $x^2+ax+b=(x-1)(x+2)$이다.
전개하여 계수를 비교하면 $a=1$이다. 즉, 정답은 $\boxed{a=1, b=-2}$

105)
주어진 식 $(\sqrt{x}-2)f(x)=x\sqrt{x}-8$의 x자리에 4를 대입하면 $0=0$이라는 쓸모없는 식이 나온다.
즉, 문제의 조건 $\boxed{x>0\text{인 모든 실수 }x\text{에서 연속}}$에서 $f(4)$를 $\lim_{x\to 4}f(x)$로 대신한다. 이제 우리는 $\lim_{x\to 4}f(x)$만 구하면 된다.
준 식 $(\sqrt{x}-2)f(x)=x\sqrt{x}-8$에서 $x\ne 4$인 경우에 양변을$(\sqrt{x}-2)$로 나누면 $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}(x\ne 4)$이고,

$$\lim_{x\to 4}f(x) = \lim_{x\to 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}(x+2\sqrt{x}+4) = 12$$

정답은 $\boxed{12}$

106)
문제에서 나온 것과 같이 $x=0$에서 연속성을 조사해 본다.

ㄱ. $f(x)g(x)$는 아래와 같이 연속이다. 좌극한 $f(-0)\times g(-0) = (-1)\times 0 = 0$ 우극한 $f(+0)\times g(+0) = (+1)\times 0 = 0$ 함숫값 $f(0)\times g(0) = 0\times 0 = 0$	ㄴ. $f(g(x))$는 아래와 같이 연속이다. 좌극한 $f(g(-0)) = f(0) = 0$ 우극한 $f(g(+0)) = f(0) = 0$ 함숫값 $f(g(0)) = f(0) = 0$	ㄷ. $g(f(x))$는 아래와 같이 연속이다. 좌극한 $g(f(-0)) = g(-1+0) = 0$ 우극한 $g(f(+0)) = g(1-0) = 0$ 함숫값 $g(f(0)) = g(0) = 0$

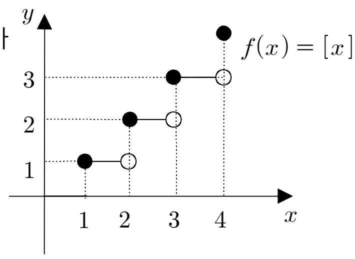
정답은 ⑤이다.

107)

□ $f_1(x)\pm f_2(x)$ 연속	□ $f_1(x)\pm g_1(x)$ 불연속	□ $g_1(x)\pm g_2(x)$ 확인	□ $f_1(x)\times f_2(x)$ 연속
□ $f_1(x)\times g_1(x)$ 확인	□ $g_1(x)\times g_2(x)$ 확인	□ $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$ (단, $f_1(\alpha)\neq 0$) 연속	□ $\dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}$ (단, $g_1(\alpha)\neq 0$) 확인
□ $\dfrac{g_1(x)}{f_1(x)}$ (단, $f_1(\alpha)\neq 0$) 불연속		□ $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ (단, $g_1(\alpha)\neq 0$) 확인	

108)

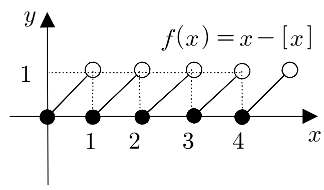
$y=x$는 모든 실수에서 연속이다. 즉, $y=[x]$가 불연속인 점에서 이 함수는 불연속이 된다. 가우스에서 불연속점의 개수 구할 때, <어느 쪽이 폐구간이냐>에 따라서 불연속점의 개수가 달라지기 때문에 이것은 항상 주의해야 한다. 그림을 통해서 꼼꼼히 확인한다.



위의 주어진 구간에서 그림을 확인해 보면 $y=[x]$가 불연속인 점은 (1) $x=1,2,3$ (2) $x=1,2,3$ (3) $x=1,2,3,4$이다.

참고) 연속함수의 성질을 사용하지 않는다면 $y=x-[x]$의 그래프를 그릴 수밖에 없다.
물론 그래프를 그릴 수 있는 것은 좋은 능력이긴 하지만 항상 그래프를 그릴 수 없으므로 연속함수의 성질을 적절히 사용할 수 있어야 한다.
$y=x-[x]$에서 가우스는 범위를 정해주는 순간 정수가 되므로

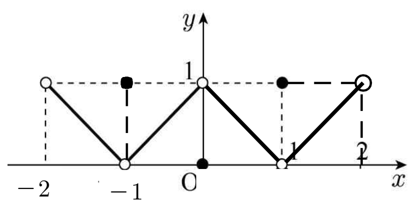
$$x-[x]=\begin{cases} \vdots \\ x & (0\le x<1) \\ x-1 & (1\le x<2) \\ x-2 & (2\le x<3) \\ x-3 & (3\le x<4) \\ \vdots \end{cases}$$ 이 그래프를 그리면 오른쪽과 같다.



109)

1 단계 : 문제의 의도를 파악! 일단 연속성을 확인하는 문제인데, 두 함수가 빠져 있다. 게다가 $g(x)$는 모든 x에서 연속인 함수이므로 결국 $|f(x)|$의 연속성만 확인하면 된다. 결국 $y=|f(x)|$이 불연속이 되는 점에서 $h(x)$도 불연속이다.

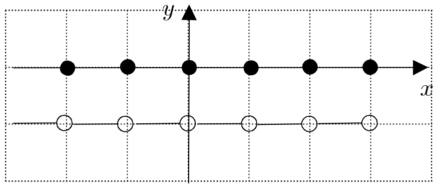
2 단계 : $|f(x)|$의 그래프를 그리는 것은 꽤 쉽다. $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽과 같으므로 이처럼 그래프를 그려보면 $-1,0,1$에서 불연속임을 알 수 있다. 그러므로 정답은 3개다.



110)

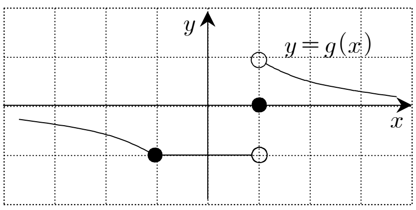
주어진 함수 $f(x)=[x]+[-x]$은 불연속인 함수끼리 더했으므로 x가 정수인 모든 점에서 불연속일 가능성이 있다.
일일이 다 확인하는 것은 불가능 하므로 그래프를 그려봐야 한다. 가우스의 그래프는 어느 정도 그릴 수 있는 것이 좋다.
가우스 기호를 없애주려면 범위를 정해주면 된다. 즉,

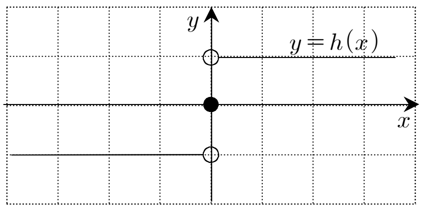
$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} \vdots & \\ -1 & (-1<x<0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (0<x<1) \\ 0 & (x=1) \\ -1 & (1<x<2) \\ \vdots & \end{cases}$$ 이고, 이것을 그림으로 그리면



ㄱ에서 치역은 그래프가 그려지는 y값의 범위이므로 그림을 보면 맞다는 사실을 알 수 있다.
ㄴ에서 비록 불연속이긴 하지만 극한값은 끊어진 부분이 완전히 동 떨어져 있지 않으므로 역시 항상 극한값이 존재한다는 사실을 알 수 있다.
ㄷ의 의미는 정수 n에 대해서 극한값과 함숫값이 같다는 뜻이므로 연속인지를 물어보는 것이다. 당연히 불연속이므로 ㄷ은 틀렸다. 결국 ㄱ,ㄴ만 옳기 때문에 정답은 $\boxed{③}$

111)
두 함수는 이미 앞에서 모두 공부한 함수이므로 그래프를 바로 그리면 다음과 같다.





우리가 구하려는 $f(x)$은 최고차항이 1인 이차함수이므로 당연히 연속함수이다. 이 함수를 $f(x)=x^2+ax+b$라고 둔다.
$f(x)g(x)$는 $x=1$에서만 연속이면 연속함수가 된다. 그러려면 $f(x)$는 $x=1$에서 0이 되어야 한다. 즉, $a+b+1=0$
또한 $f(x)h(x)$ 역시 $x=0$에서만 연속이면 연속함수가 된다. 그러려면 $f(x)$는 $x=0$에서도 함숫값이 0이어야 한다.
즉, $b=0$, $a=-1$이다. 그러므로 우리가 구하는 $f(x)$는 $f(x)=x^2-x$이고, $f(10)=90$이다. 정답은 $\boxed{90}$

112)

- ☐ $f(g(x))$는 $x=\alpha$에서 불연속이다. ⇨ $x=\alpha$에서 조사해야 한다.
- ☐ $g(f(x))$는 $x=\alpha$에서 불연속이다. ⇨ $f(x)=\alpha$을 만족하는 x에서 조사해야 한다.
- ☐ $f(f(x))$는 $x=\alpha$에서 연속이다. ⇨ 조사할 필요 없이 참이다.
- ☐ $g(g(x))$는 $x=\alpha$에서 연속이다. ⇨ $x=\alpha$와 $g(x)=\alpha$을 만족하는 x에서 조사해야 한다.
- ☐ $f((x-\alpha)g(x))$는 $x=\alpha$에서 연속이다. ⇨ 조사할 필요 없이 참이다.

113)
사실 $(0\leq x\leq 3)$에서 $\{f(x)\}^2$은 $y=f(x)$와 $y=x^2$이 합성되어 있는 함수이다. 어차피 $y=x^2$은 모든 실수에서 연속인 함수이므로 연속성을 조사할 점을 선정하는 것에 영향을 주지 않는다.

<table>
<tr><td rowspan="5">일단 ㄱ의 경우 연속함수이므로
$g(x)=\begin{cases}\{f(x)\}^2 & (0\leq x\leq 3)\\ (f\circ f)(x) & (3<x\leq 5)\end{cases}$ 에서 구간이 나뉘는
기준이 되는 점인 $x=3$에서만 연속성을 조사해 보면 된다.</td><td>$x=3$에서 연속성 조사</td></tr>
<tr><td>좌극한 : $g(3-0) = \{f(3-0)\}^2 = \{1+0\}^2 = 1$</td></tr>
<tr><td>우극한 : $g(3+0) = f(f(3+0)) = f((3)) = f(1) = 2$</td></tr>
<tr><td>함숫값 : $g(3) = \{f(3)\}^2 = 1^2 = 1$</td></tr>
<tr><td>불연속이다.</td></tr>
</table>

ㄴ의 $f(x)$는 $(0\leq x\leq 3)$에서 연속이므로 $(0\leq x\leq 3)$안에 있는 $\{f(x)\}^2$에서는 연속성을 조사할 필요가 없다.
다만 ㄴ의 $f(x)$는 $x=4$에서 불연속이므로 $(3<x\leq 5)$안에 있는 $f(f(x))$에서는 $x=4$인 지점과 $f(x)=4$를 만족하는 x값에서 조사해 보면 된다. 그런데 $f(x)=4$를 만족하는 x는 없으므로 $x=4$에서만 연속성을 조사해 보면 된다.

결국 우리가 연속성을 조사해야 하는 점은 구간이 바뀌는 기준이 되는 점인 $x=3$과 위에서 설명한 $x=4$이다.

$x=3$에서 연속성 조사	$x=4$에서 연속성 조사
좌극한 : $g(3-0) = \{f(3-0)\}^2 = \{2+0\}^2 = 4$ **우극한 :** $g(3+0) = f(f(3+0)) = f(2-0) = 4$ **함숫값 :** $g(3) = \{f(3)\}^2 = 2^2 = 4$	**좌극한 :** $g(4-0) = f(f(4-0)) = f(+0) = 3$ **우극한 :** $g(4+0) = f(f(4+0)) = f(1+0) = 3$ **함숫값 :** $g(4) = f(f(4)) = f(0) = 3$
연속이다.	**연속이다.**

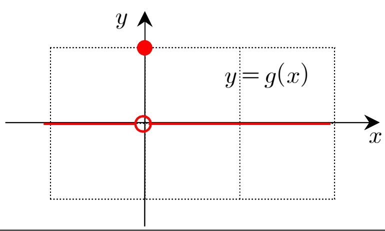
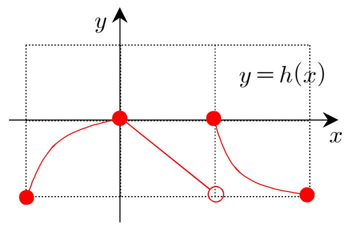
ㄷ은 ㄴ과 거의 비슷하다. ㄴ과 같은 이유로 $x=3$과 $x=4$에서만 연속성을 확인한다.

$x=3$에서 연속성 조사	$x=4$에서 연속성 조사
좌극한 : $g(3-0) = \{f(3-0)\}^2 = \{2+0\}^2 = 4$ **우극한 :** $g(3+0) = f(f(3+0)) = f(2-0) = 4$ **함숫값 :** $g(3) = \{f(3)\}^2 = 2^2 = 4$	**좌극한 :** $g(4-0) = f(f(4-0)) = f(+0) = 2$ **우극한 :** $g(4+0) = f(f(4+0)) = f(1+0) = 3$ **함숫값 :** $g(4) = f(f(4)) = f(0) = 2$
연속이다.	**불연속이다.**

즉, 폐구간 $[0,5]$에서 연속이 되도록 하는 함수는 ㄴ하나 뿐 이다. 정답은 $\boxed{②}$

114)

ㄱ은 그냥 확인하면 되지만 어차피 ㄴ, ㄷ까지 문제를 풀기 위해서는 $g(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$와 $h(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$의 그래프를 그려봐야 한다. 합성함수의 연속성이나 극한에서는 합성된 그림을 그리지 않고 극한의 의미를 해석하여 푼다고 한 원리가 바뀐 것은 아니다. 왜냐하면 우리가 지금 그리는 함수는 $y=f(g(x))$의 그림이 아닌 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그림이기 때문이다. 문제에서 절댓값함수를 그릴 수 있는 지를 물어보기 위해서 $h(x)$와 $g(x)$의 함수를 직접주지 않고 $f(x)$에 대해 표현하고 있다.

$g(x)$와 $h(x)$의 그래프를 그리기 위해서는 $f(x)$의 범위를 나누어야 한다. 즉,	
$g(x) = \dfrac{f(x)+\lvert f(x)\rvert}{2} = \begin{cases} f(x) & (f(x)\ge 0) \\ 0 & (f(x)<0) \end{cases}$	$h(x) = \dfrac{f(x)-\lvert f(x)\rvert}{2} = \begin{cases} 0 & (f(x)\ge 0) \\ f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$
	
주의할 것은 여기에서 우리가 범위를 나눈 $f(x)\ge 0$와 $f(x)<0$은 다시 풀어서 x의 범위로 고치는 것이 아니라 (풀어도 되긴 되지만) 그림으로 바로 확인하는 것이다. 즉, $f(x)\ge 0$; $y=f(x)$가 x축$(y=0)$보다 위에 있거나 x축에 있는 x의 범위 $f(x)<0$; $y=f(x)$가 x축$(y=0)$보다 아래 있는 x의 범위	

이제 위의 그림을 보며 이해한다. ㄱ에서 $h(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 틀린다.

ㄴ에서는 $h(g(x))$의 연속성을 확인하는 것이므로 일단 $g(x)$가 불연속인 $x=0$에서는 무조건 확인해야 하고, 또한 $h(x)$는 1에서 불연속이므로 $g(x)=1$인 x에서 확인해봐야 한다. $y=g(x)$와 $y=1$의 교점의 x좌표를 확인하면 또 다시 $x=0$이 나온다.

결국 $x=0$에서 연속성을 확인하면

좌극한 ; $h(g(-0)) = h(0) = 0$ 우극한 ; $h(g(+0)) = h(0) = 0$ 함숫값 ; $h(g(0)) = h(1) = 0$이다.

즉, $x=0$에서 연속이다.

ㄷ은 $x=0$에서 $g(h(x))$의 연속성을 확인하면 좌우극한 ; $g(h(\pm 0)) = h(-0) = 0$ 함숫값 ; $g(h(0)) = g(0) = 1$

이므로 $\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x) \ne (g\circ h)(0)$이다. ㄴ만 맞으므로 정답은 $\boxed{①}$

115)

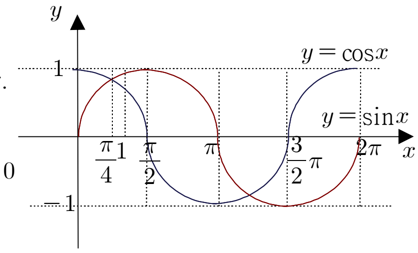
보이는 문제는 증명 문제인데, 증명할 때 쓰는 실질적 사잇값 정리는 다음과 같다.

⇨ 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)=0$이라는 방정식이 구간 (a,b)에서 적어도 하나의 실근을 갖으려면 $f(a)f(b)<0$이다. 다음의 문장 전체가 답이 된다. 괄호 친 말은 실제로 답으로 적을 필요가 없다.
학습자의 이해를 돕기 위해서 그냥 쓴 것이다.

$f(x)=2^x-3x$라 두면 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이고, (연속함수의 성질에서 연속함수끼리 빼면 연속함수라는 것을 배웠다.)
$f(3)f(4)<0$이므로 중간값의 정리에 의하여 주어진 방정식은 구간 $(3,4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

116)

$x\cos x-\sin x$를 $f(x)$라고 둔다. 결국 $f(x)=0$이 적어도 한 개의 실근을 갖으려면 주어진 구간의 양 끝의 함숫값의 곱이 음수가 되면 된다. sin과 cos에 숫자 1을 대입해본 경험이 많지 않을 것이므로 다음의 그림을 참조한다. π를 약 3.14로 생각한다.



① $(0,1)$: $f(0)=0$이고, $f(1)=\cos1-\sin1$ = 음수이므로 $f(0)\times f(1)=0$이다.

② $(1,\frac{\pi}{2})$: $f(1)=\cos1-\sin1$은 음수이고 $f(\frac{\pi}{2})=-1$도 음수이므로 $f(1)\times f(\frac{\pi}{2})>0$

③ $(\frac{\pi}{2},\pi)$: $f(\frac{\pi}{2})=-1$이므로 음수이고, $f(\pi)=-\pi$이므로 음수이다.

즉, $f(\frac{\pi}{2})\times f(\pi)>0$

④ $(\pi,\frac{3}{2}\pi)$: $f(\pi)=-\pi$이므로 음수이고, $f(\frac{3}{2}\pi)=1$이므로 양수이다. 즉, $f(\pi)\times f(\frac{3\pi}{2})<0$이다.

⑤ $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$: $f(\frac{3}{2}\pi)=1$이므로 양수이고, $f(2\pi)=2\pi$이므로 양수이다. 즉, $f(\frac{3\pi}{2})\times f(2\pi)>0$이다.

결국 함숫값을 비교해 보니 곱이 0보다 작은 것은 ④밖에 없다. 정답은 $\boxed{④}$

117)

ㄱ은 이제 쉬워야 한다. $g(+0)=-1$이므로 틀렸다.

ㄴ도 연속성을 간단히 확인한다. 참고로 $f(x)$의 y절편이 정확히 나오지 않은 이유는 <연속함수의 성질>로 충분히 해결할 수 있기 때문이다. 이 점이 꼭짓점인지 아닌지 논쟁 자체가 무의미하다.

$g(f(x))$에서 $y=f(x)$는 모든 실수 x에서 연속인 함수이다. $g(x)$는 $x=0$에서만 불연속이므로 결국 우리는 $f(x)=0$인 x값인 -3보다 작은 어떤 값에서만 (그림으로 확인) 불연속일 가능성이 있다. 즉, 문제에서 물어보는 $x=0$에서는 당연히 연속이다.

ㄷ은 적어도 하나의 실근이라는 말이 나왔으므로 중간값의 정리를 물어보는 것이다. 우리는 실질적 중간값의 정리를 배웠으니 확인해 보면 $g(f(-3))=g(1)=$ 음수이고, $g(f(3))=g(3)=$ 양수이므로 $g(f(-3))\times g(f(3))<0$이다.

그러므로 참이라는 것을 확인했다. 정답은 $\boxed{④}$

촌철살인

다시 만나는 개념