# 촌철살인

## 다시 만나는 개념

## 〈미적분2〉 1. 지수함수와 로그함수




Team SPC

Orbi by move

Orbi Class 인강, 강남점

BLACK BAG



촌철살인 수학 관리자

(최 슬 호)

# #1-1. 다시 만나는 개념 : 지수함수와 로그함수

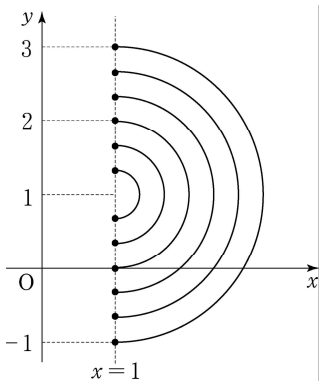
1. 지수함수와 로그함수의 그래프

**기본** 기본형의 그래프 - 점근선과 정점

촌철살인 2005. 11. 나형(66%). 10번. 4점

1)아래 그림은 중심이 $(1, 1)$이고 반지름의 길이가 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $1$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $2$인 6개의 반원을 그린 것이다. 세 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, $y=3^x$ 의 그래프가 반원과 만나는 교점의 개수를 각각 $a, b, c$라 하자. $a, b, c$의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, $x \geqq 1$이고 반원은 지름의 양 끝점을 포함한다.)

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<c<a$
④ $c<a<b$ ⑤ $c<b<a$



**기본** 기본형의 그래프 - 평행이동과 대칭이동

촌철살인 2007. 11. 나형(55%). 26번. 3점

2)함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 $x$축 방향으로 $m$만큼, $y$축 방향으로 $n$만큼 평행 이동시키면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되고, 이 평행이동에 의하여 점 $A(1, f(1))$이점 $A'(3, g(3))$으로 이동된다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지날 때, $m+n$의 값은?

촌철살인 3)함수 $y=2\cdot 3^x$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 □만큼 평행 이동한 것이다. □안에 알맞은 값을 써 넣어라.

촌철살인 2008. 11. 가형(74%). 나형(46%). 7번. 3점

4)두 지수함수 $f(x)=a^{bx-1}$, $g(x)=a^{1-bx}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

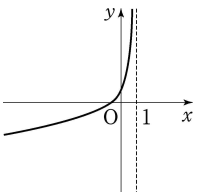
> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
> (나) $f(4)+g(4)=\frac{5}{2}$

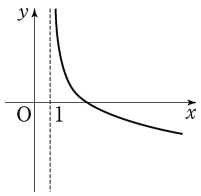
두 상수 $a, b$의 합 $a+b$의 값은? (단, $0<a<1$)

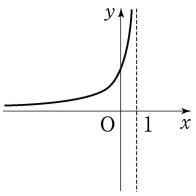
**연계** 로그함수의 바른 식 변형 - 준범체 식변자

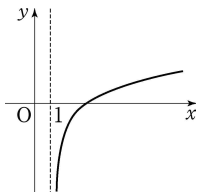
촌철살인 2006. 9. 가형(88%). 나형(74%). 7번. 3점

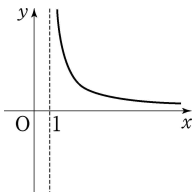
5)함수 $y=\log_2\frac{2}{x-1}$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 


촌철살인 6)다음 중 서로 같은 함수끼리 짝지은 것은?

□ $\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=\frac{1}{2}\log_2 x^2 \end{cases}$ □ $\begin{cases} y=\log_{\frac{1}{2}} x \\ y=\log_2 x \end{cases}$ □ $\begin{cases} y=\log_2 |x| \\ y=2\log_2 \sqrt{x} \end{cases}$ □ $\begin{cases} y=2\log_2 \sqrt{x} \\ y=\log_2 x \end{cases}$ □ $\begin{cases} y=2\log_{\frac{1}{2}} x \\ y=-\log_2 x^2 \end{cases}$

**기본** 기본형의 그래프 - 함수의 최대 · 최소

촌철살인 2006. 6. 나형(74%). 5번. 3점

7)정의역이 $\{x|5 \le x \le 8\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$의 최솟값이 $-2$일 때, $a$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 2006. 11. 나형(81%). 4번. 3점

8)정의역이 $\{x|-1 \leqq x \leqq 3\}$인 두 지수함수 $f(x)=4^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 $M$, $g(x)$의 최솟값을 $m$이라 할 때, $Mm$의 값은?

① 8 ② 6 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

촌철살인 2005. 11. 나형(55%). 24번. 4점

9)정의역이 $\{x|1 \leqq x \leqq 81\}$인 함수 $y=(\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}} x)+2\log_3 x+10$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

촌철살인 10)함수 $y=3^{\log x}\cdot x^{\log 3}-6(3^{\log x}+x^{\log 3})$의 최솟값은?

☐ -36 ☐ -18 ☐ -9 ☐ -3 ☐ 0

촌철살인 2008. 10. 나형(53%). 19번. 3점

11)$0 \leqq x \leqq 3$에서 함수 $f(x)=2^{-x^2+4x+a}$의 최솟값이 $4$일 때, $f(x)$의 최댓값을 구하시오. (단, $a$는 상수이다.)

촌철살인 2008. 11. 나형(78%). 4번. 3점

12)함수 $y=3+\log_3(x^2-4x+31)$의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

촌철살인 2008. 3. 가형(83%). 나형(69%). 21번. 3점

13) 두 정수 $a$, $b$가 $2a+b=12$를 만족할 때, $4^a+2^b$의 최솟값을 구하시오.

촌철살인 2004. 3. 나형(63%). 17번. 4점

14) $a>1$, $b>1$일 때, $\log_{a^3} b^2+\log_{b^4} a^3$의 최솟값은?

① $1$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2$ ⑤ $\sqrt{5}$

촌철살인 2010. 4. 가형(45%). 23번. 4점

15) $\frac{1}{3} \le x \le 3$에서 정의된 함수 $f(x)=9x^{-2+\log_3 x}$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

**기본** 그래프 역전관계

촌철살인 2005. 11. 나형(75%). 9번. 3점

16)부등식 $a^m < a^n < b^n < b^m$ 을 만족시키는 양수$a, b$와 자연수 $m, n$ 에 대하여 옳은 것은?

① $a<1<b,\ m>n$ ② $a<1<b,\ m<n$ ③ $a<b<1,\ m<n$

④ $1<a<b,\ m>n$ ⑤ $1<a<b,\ m<n$

**기본** 지수함수와 로그함수의 대칭관계

촌철살인 2007. 9. 나형(50%). 8번. 3점

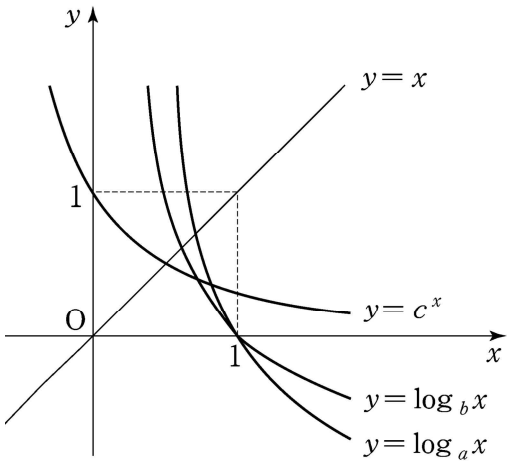
17)다음은 1이 아닌 세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 세 함수

$$y=\log_a x,\quad y=\log_b x,\quad y=c^x$$

의 그래프를 나타낸 것이다. 세 양수 $a,\ b,\ c$의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $a>b>c$ ② $a>c>b$ ③ $b>a>c$

④ $b>c>a$ ⑤ $c>b>a$




촌철살인 2008. 11. 나형(36%). 11번. 4점

18)$0<a<\frac{1}{2}$인 상수 $a$에 대하여 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 $(p, p)$, 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 $(q, q)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

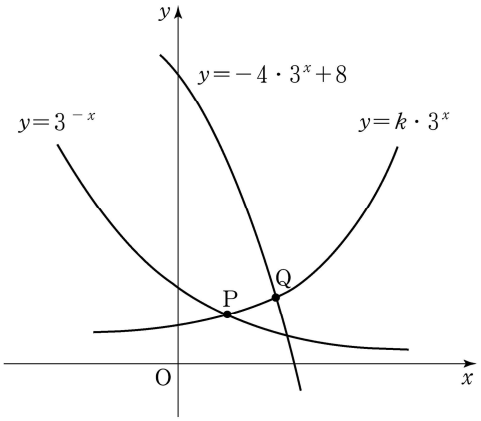
<보 기>

ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $a=\frac{1}{4}$이다. ㄴ. $p<q$ ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

**연계** 함수와 좌표 - 지나는 점과 만나는 점

촌철살인 2006. 11. 가형(48%). 나형(28%). 25번. 4점

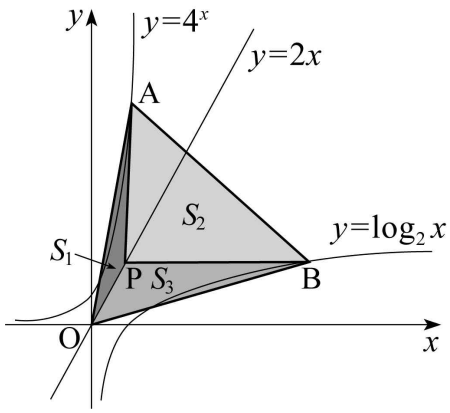
19) 함수 $y=k\times 3^{x}\,(0<k<1)$의 그래프가 두 함수 $y=3^{-x}$, $y=-4\times 3^{x}+8$의 그래프와 만나는 점을 각각 $P$, Q라 하자. 점 $P$와 점 $Q$의 $x$좌표의 비가 $1:2$일 때, $35k$의 값을 구하시오.




촌철살인 2008. 10. 가형(66%). 나형(40%). 16번. 4점

20) 제1사분면에서 직선 $y=2x$ 위의 한 점 P를 지나고 $y$축에 평행한 직선이 곡선 $y=4^{x}$과 만나는 점을 A라 하고, 점 P를 지나고 $x$축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B라 하자.

이때, 세 삼각형 OPA, PAB, OPB의 넓이를 각각 $S_1$, $S_2$, $S_3$이라 하자. $S_1:S_2:S_3=3:k:7$일 때, 상수 $k$의 값은? (단, O는 원점이다.)



촌철살인 2007. 11. 가형(63%). 나형(45%). 16번. 4점

21)직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x_1 > y_2$ ㄴ. $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$ ㄷ. $x_1 y_1 > x_2 y_2$

촌철살인 2009. 11. 가형(59%). 나형(51%). 16번. 4점

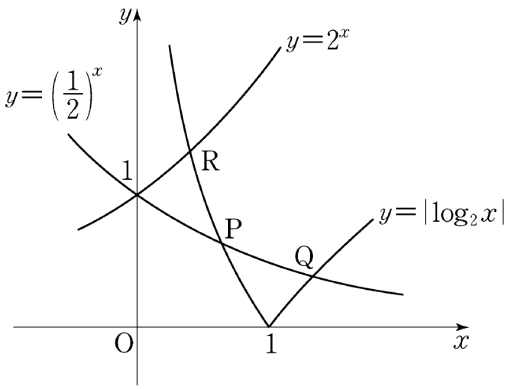
22)자연수 $n\ (n \geqq 2)$에 대하여 직선 $y=-x+n$과 곡선 $y=|\log_2 x|$가 만나는 서로 다른 두 점의 $x$ 좌표를 각각 $a_n$, $b_n\ (a_n < b_n)$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $a_2 < \frac{1}{4}$ ㄴ. $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ㄷ. $1 - \frac{\log_2 n}{n} < \frac{b_n}{n} < 1$

촌철살인 2010. 11. 가형(45%). 나형(40%). 16번. 4점

23) 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?




<보기>

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<1$　　ㄴ. $x_2y_2-x_3y_3=0$　　ㄷ. $x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 2. 지수·로그 방정식과 부등식

촌철살인 24)다음 지수방정식 $3^x = 3 \cdot 2^{3x}$을 풀어라.

촌철살인 25)다음 방정식 $2^{3x^3+6x^2+3} = 8^{2x^3-x^2+x-2}$을 만족하는 실수 $x$값을 구하시오.

촌철살인 26)지수방정식 $9^x = 5 \cdot 3^x + 36$을 풀어라.

촌철살인 27)다음 지수방정식 $4^x + 4^{-x} = 2^x + 2^{-x}$을 풀어라.

촌철살인 28)방정식 $\log_2(x-3) = \log_4(x-1)$을 풀어라.

촌철살인 29)방정식 $2^{\log_4(\log_2 x + 2)} = \log_2 x + 2$을 풀어라.

촌철살인 30)방정식 $x^{\log_3 x - 2} = 27$의 근을 $\alpha, \beta$라 할 때, $\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha$의 값을 구하여라.

촌철살인 31)다음 연립 방정식 $\begin{cases} -2^x+3^y=2 \\ 2^{x+1}\times 3^y=6 \end{cases}$ 을 풀어라.

촌철살인 32)연립방정식 $\begin{cases} \log_2 x+\log_3 y=5 \\ \log_3 x\times \log_2 y=6 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\beta-\alpha$의 최댓값을 구하시오.

촌철살인 33)지수부등식 $a^{2x+1}>(\sqrt{a})^{3x}$ $(a>0, a\neq 1)$을 풀어라.

촌철살인 34)부등식 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x-12>0$의 해를 구하시오.

촌철살인 35)부등식 $a^{x-1} < a^{2x+1}$의 해가 $x < -2$일 때, 부등식 $\log_a(x-2) < \log_a(4-x)$의 해는?
(단, 상수 $a$는 1이 아닌 양수이다.)

촌철살인 36)다음 부등식 $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) > 1$을 풀어라.

촌철살인 37)다음 부등식 $(\log_2 x)^2 > \log_2 x^4$을 풀어라

촌철살인 38)다음 부등식 $x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \frac{1}{8x^2}$을 푸시오.

촌철살인 39)연립부등식 $\begin{cases}\log_3 |x-3| < 4 \\ \log_2 x + \log_2 (x-2) \geq 3\end{cases}$ 을 만족시키는 정수 $x$의 개수를 구하시오.

촌철살인 2011. 3. 가형(48%). 나형(39%). 14번. 4점

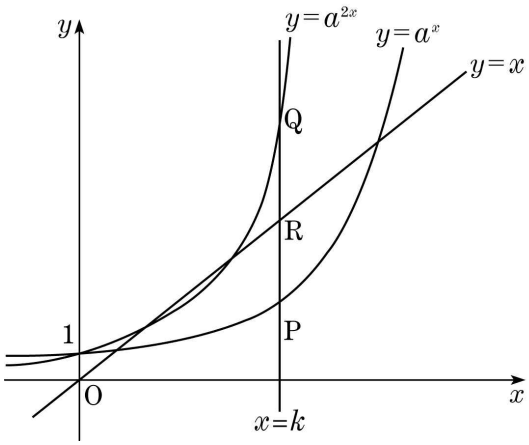
40)그림과 같이 지수함수 $y = a^x$ 와 $y = a^{2x}$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다. $y = a^x$ 의 그래프, $y = a^{2x}$ 의 그래프와 직선 $x = k$의 교점을 각각 P, Q 라 하고 직선 $y = x$와 직선 $x = k$의 교점을 R 라 하자. $k = 2$ 이면 두 점 Q와 R 가 일치할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a > 1$ )

<보 기>

ㄱ. $k = 4$ 이면 두 점 Q와 R 가 일치한다.

ㄴ. $\overline{PQ} = 12$ 이면 $\overline{QR} = 8$ 이다.

ㄷ. $\overline{PQ} = \frac{1}{8}$ 을 만족시키는 실수 $k$의 값의 개수는 2 이다.



촌철살인 2012. 3. 나형(33%). 7번. 3점

41)지수방정식 $5^{2x}-5^{x+1}+k=0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖도록 하는 정수 $k$의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 2011. 10. 나형(24%). 26번. 4점

42)$x$에 대한 로그방정식 $(\log x+\log 2)(\log x+\log 4)=-(\log k)^2$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 $k$의 값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $10(\alpha^2+\beta^2)$의 값을 구하시오.

촌철살인 2006. 3. 가형(26%). 27번. 3점

43)$x$에 대한 방정식 $4^x-a\cdot 2^{x+1}+a^2-a-6=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 $a$의 값의 범위는?

① $a>-6$ ② $-6<a<-2$ ③ $a>0$ ④ $-2<a<3$ ⑤ $a>3$

촌철살인 2005. 7. 나형(52%). 15번. 4점

44)임의의 실수 $x$에 대하여 부등식 $2^{x+1}-2^{\frac{x+4}{2}}+a \geqq 0$이 성립하도록 하는 실수 $a$의 최솟값은?

① $1$ ② $2$ ③ $3$ ④ $4$ ⑤ $5$

촌철살인 45)모든 양수 $x$에 대하여 부등식 $x^{\log x} > (1000x)^a$이 항상 성립하도록 상수 $a$값의 범위를 정하여라.

3. 지수 · 로그 함수의 미분

촌철살인 46)다음 보기 중 극한값이 존재하는 것을 모두 고르면?

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{3^x-3^{-x}}$ ㄴ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}$ ㄷ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{\sqrt{3^x}}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

촌철살인 47) $\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$의 값은?

□ 0 □ $\frac{1}{3}$ □ 1 □ 2 □ 3

촌철살인 48)다음 보기 중 극한값이 존재하는 것을 모두 고르면?

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ㄴ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ㄷ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

촌철살인 2008. 9. 가형(46%). 29번. 4점

49)$a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1$일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$ 에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $1<a<b$이면 $x>1$인 모든 $x$에 대하여 $f(x)>1$이다.

ㄴ. $b<a<1$이면 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이다.

ㄷ. $\lim_{x\to+0} f(x)=\log_a b$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 2011. 4. 가형(91%). 3번. 2점

50) $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $1$ ④ $e$ ⑤ $e^2$

촌철살인 51) $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1+4x}{1+3x}\right)^{\frac{1}{x}}$ 의 값은?

□ $\frac{1}{e^2}$ □ $\frac{1}{e}$ □ $e$ □ $e^2$ □ $e^3$

촌철살인 52)다음 중 그 값이 $e$가 아닌 것은?

□ $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}$ □ $\lim_{x \to -\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$ □ $\lim_{x \to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}$ □ $\lim_{x \to 2}(x-1)^{\frac{1}{x-2}}$ □ $\lim_{x \to -1}(x+2)^{\frac{1}{x+1}}$

촌철살인 53) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$의 값은?

□ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ □ $\sqrt{e}$ □ $1$ □ $\frac{1}{e}$ □ $e$

촌철살인 2008. 6. 가형(65%). 27번. 3점

54)함수 $f(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)^x\ (x>1)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=e$ ㄴ. $\lim_{x\to\infty}f(x)f(x+1)=e^2$

ㄷ. $k\geq 2$일 때, $\lim_{x\to\infty}f(kx)=e^k$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 55)다음 등식을 만족하는 $x$의 값을 구하여라.

(1) $\ln e^3=x$ (2) $\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=x$ (3) $\ln x=-2$ (4) $e^x=5$

촌철살인 56)다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}$

촌철살인 57)$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\{\ln(3+x)-\ln 3\}$의 값은?

□ $\frac{1}{4}$ □ $\frac{1}{3}$ □ $\frac{1}{2}$ □ 1 □ 3

촌철살인 58)다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-4^{x-\frac{1}{4}}}{1-4x}$

(2) $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

촌철살인 2012. 6. 가형(92%). 8번. 3점

59)함수 $f(x)$가 $x>-1$인 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $\ln(1+x) \le f(x) \le \frac{1}{2}(e^{2x}-1)$을 만족시킬 때,

$\lim_{x \to 0} \frac{f(3x)}{x}$의 값은?

① 1 ② $e$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $2e$

.

촌철살인 2007. 6. 가형(73%). 26번. 3점

60)양수 $a$가 $\lim_{x \to 0} \frac{(a+12)^x - a^x}{x} = \ln 3$을 만족시킬 때, $a$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

촌철살인 2009. 6. 가형(38%). 29번. 4점

61)함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^2$ 이면 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{f(x)}-1}{x} = 0$ 이다.

ㄴ. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{f(x)} = 1$ 이면 $\lim_{x \to 0} \frac{3^x-1}{f(x)} = \ln 3$ 이다.

ㄷ. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{f(x)}-1}{x}$ 이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 62)연속함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{x}=10$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 63)이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln(x+1)} & (x\neq 0)\\ 8 & (x=0)\end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\infty)$에서 연속일 때, $f(3)$의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

촌철살인 2009. 7. 가형(77%). 26번. 3점

64)$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b}{\ln(x+1)}=\ln 3$ $(a>0,\ a\neq 1)$을 만족하는 상수 $a-b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

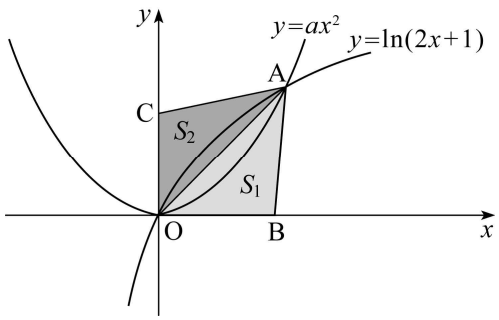
촌철살인 2010. 6. 가형(68%). 29번. 4점

65)세 양수 $a, b, c$에 대하여 $\lim_{x\to\infty} x^a \ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=2$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

촌철살인 2008. 10. 가형(54%). 28번. 3점

66)그림과 같이 두 곡선 $y=ax^2$ $(a>0)$, $y=\ln(2x+1)$이 제1 사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 원점 O와 두 점 B$(1, 0)$, C$(0, 1)$에 대하여 삼각형 OAB의 넓이를 $S_1$, 삼각형 OAC의 넓이를 $S_2$라 하자. $a$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{S_1}{S_2}$의 값은 $\alpha$에 한없이 가까워진다. $\alpha$의 값은?




① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ $e$

촌철살인 67)다음 <보기>의 함수에서 $y'$을 올바로 구한 것은?

<보기>

ㄱ. $y=e^{4x-2}$이면 $y'=4e^{4x-2}$이다.

ㄴ. $y=2^{3x+1}$이면 $y'=3\cdot 2^{3x+1}\ln 2$이다.

ㄷ. $y=(x^2+1)e^x$이면 $\frac{dy}{dx}=(x+1)^2e^x$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 68)함수 $f(x)=2^{2x-1}$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$의 값은?

① $\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $2\ln 2$ ④ $4\ln 2$ ⑤ $8\ln 2$

촌철살인 2012. 11. 가형(91%). 22번. 3점

69)함수 $f(x)=x\ln x+13x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

촌철살인 70)함수 $f(x)=e^{x-3}$에 대하여 $\lim_{x\to\infty} n\left\{f\left(\frac{3n+5}{n+2}\right)-f\left(\frac{3n+3}{n+2}\right)\right\}$의 값을 구하시오.

촌철살인 2012. 10. 가형(92%). 4번. 3점

71)함수 $f(x)=x^2+x\ln x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$ 의 값은?

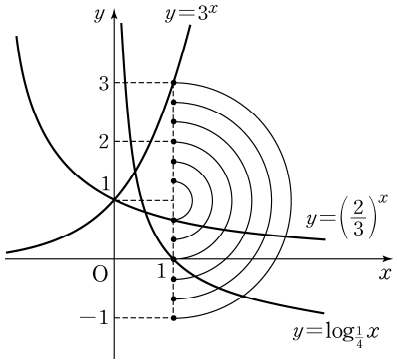
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

촌철살인 72)함수 $f(x)=\begin{cases}\ln bx & (0<x<1)\\ e^{x-1}-2ax & (x\geq 1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능하도록 하는 상수 $a, b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.
(단, $b$는 양수이다.)

## #1-2. 지수함수와 로그함수 MAP

1) 답 : ④

세 그래프의 $x=0$과 $x=1$일 때 교점을 조사하여 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.




$\therefore a=4,\ b=6,\ c=1$

$\therefore c<a<b$

2)

해설) 점 $A(1, f(1))$을 $x$축 방향으로 $m$만큼, $y$축 방향으로 $n$만큼 평행이동한 점 $A$의 좌표는 $(1+m, f(1)+n)$이므로 $1+m=3$에서 $m=2$ 따라서, $f(x)=2^x$의 그래프를 $x$축 방향으로 2만큼, $y$축 방향으로 $n$만큼 평행이동한 함수 $g(x)$는 $g(x)=2^{x-2}+n$이고, $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,1)$을 지나므로 $g(0)=2^{-2}+n=1$에서 $n=\frac{3}{4}$ $\therefore\ m+n=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$

3)

해설) $y=2\cdot 3^x$는 $y=3^{x+\log_3 2}$로 변형되므로 $x$축의 방향으로 $-\log_3 2$만큼 평행이동 된 것이다.

4)

해설) $f(x)=a^{bx-1}$의 그래프를 $x=2$에 대해서 대칭이동 시키면 $g(x)=a^{1-bx}$의 그래프와 일치한다.

즉, $f(4-x)=a^{b(4-x)-1}=a^{4b-1-bx}$과 $g(x)=a^{1-bx}$은 같은 식이다. 그러므로 $4b-1=1$ $\therefore\ b=\frac{1}{2}$

즉, $f(x)=a^{\frac{1}{2}x-1}$, $g(x)=a^{1-\frac{1}{2}x}$ 이므로 $f(4)+g(4)=\frac{5}{2}\ \Leftrightarrow\ a+a^{-1}=\frac{5}{2}\ \Leftrightarrow\ 2a^2-5a+2=0$

$\Leftrightarrow\ (a-2)(2a-1)=0$

$0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$ $\therefore\ a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

5)

해설) $y=\log_2\frac{2}{x-1}$에서 $y=\log_2 2-\log_2(x-1)$ $\therefore\ y-1=-\log_2(x-1)$.

즉, 함수 $y=\log_2\frac{2}{x-1}$의 그래프는 $y=\log_2 x$를 $x$축에 대하여 대칭 이동한 함수 $y=-\log_2 x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축 방향으로 1만큼 평행 이동한 것. 정답은 ②

6)

해설) 서로 같은 함수를 확인 할 때는 반드시 다음의 두 가지를 확인해야 한다.

$i)$ 식을 변형하여 같은 식의 모양 만들 수 있는가? $ii)$ 정의역($x$의 범위)이 같은가?
②은 식의 모양 자체가 같아질 수 없으므로 제외 한다. 나머지 함수들은 진수조건에 의해서 대입할 수 있는 $x$의 범위가 다르다. 하지만 ④은 $x$에 두 함수 모두 양수만 들어가야 한다. 로그의 성질을 이용하면 두 함수의 모양도 같아진다. 그러므로 정답은 ④이다.

7) 답 : ④
함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$는 밑이 1보다 작으므로 $x$의 값이 증가할수록 $y$의 값은 감소한다. 따라서 $x=8$일 때 최소값을 가지므로

$\log_{\frac{1}{2}}(8-a)=-2$이어야 한다. $\therefore\ 8-a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$ $\therefore\ a=4$

8) 답 : ①

$f(x)$는 $x=3$일 때 최대값 $M=4^3=64$를 갖고, $g(x)$는 $x=3$일 때 최소값 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$을 갖는다. $\therefore\ Mm=8$

9) 답 : 13
$\log_3 x=t$라 두면 $(0\leqq t\leqq 4)$ $y=t(-t)+2t+10=-t^2+2t+10=-(t-1)^2+11$
(i) $t=4$일 때, 최소값 $m=2$, (ii) $t=1$일 때, 최대값 $M=11$ $\therefore\ M+m=13$

10) 답. ①

11) 답 : 64
함수 $f(x)=2^{-(x-2)^2+a+4}$에서 지수의 최솟값은 $a$이므로 $2^a=2^2$ 즉, $a=2$이다. 이때, 지수의 최댓값은 $a+4=6$이므로 $f(x)$의 최댓값은 $2^6=64$이다.

12) 답 : ③
$f(x)=x^2-4x+31$로 놓으면 $f(x)=(x-2)^2+27$에서 $f(x)$의 최솟값이 27이므로
$y=3+\log_3(x^2-4x+3)$의 최솟값은 $3+\log_3 27=3+3=6$

13) 답 : 128
$4^a>0, 2^b>0$이므로 $4^a+2^b\geqq 2\sqrt{4^a\cdot 2^b}=2\sqrt{2^{2a+b}}=2\sqrt{2^{12}}=128$
(단, 등호는 $a=3$, $b=6$일 때 성립한다.)

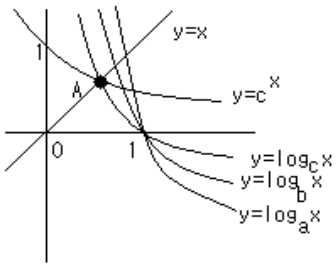
14) 답 : ②
$a>1$, $b>1$에서 $\log_a b>0, \log_b a>0$
산술기하평균의 관계에 의하여 $\therefore\ \log_{a^3} b^2+\log_{b^4} a^3 = \frac{2}{3}log_a b + \frac{3}{4}log_b a \geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}log_a b \,\square\, \frac{3}{4}log_b a} = \sqrt{2}$

15) 답 : 246
$f(x)=9x^{-2}+\log_3 x$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면 $\log_3 f(x)=\log_3 9+\log_3 x^{-2+\log_3 x}=\log_3 9+(-2+\log_3 x)\log_3 x$
$\log_3 x=t$라 하면 $\frac{1}{3}\leq x\leq 3$에서 $-1\leq t\leq 1$이다.
$\log_3 f(x)=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$에서 $t=-1$일 때, 최댓값 $M=243$
$t=1$일 때, 최솟값 $m=3$이므로 $M+m=246$이다.

16)
해설) $a^m<a^n<b^n<b^m$ 중 먼저 $a^n<b^n$을 비교하면 $a<b$이다.

또한 $a^m < a^n$과 $b^n < b^m$에서 같은 밑을 취했을 때, $m$과 $n$의 대소가 달라지므로 둘 중 하나는 증가, 둘 중 하나는 감소라는 사실을 알 수 있다. 결국 $a < 1 < b$이고, $y = b^x$은 증가함수이므로 $b^n < b^m$에서 $n < m$이다. 그러므로 정답은 ①

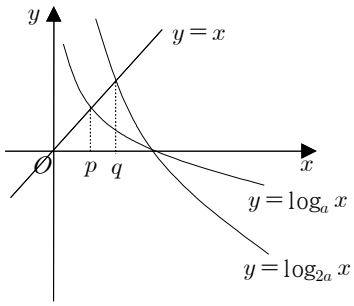
17) 해설) 함수 $y = c^x$의 역함수 $y = \log_c x$의 그래프는 다음과 같이 곡선 $y = c^x$와 직선 $y = x$ 위의 점 A에서 만난다.
로그함수는 감소함수끼리 밑이 작을수록 크다.
그러므로 $a > b > c$




18)

해설) $0 < a < \frac{1}{2}$에서 $0 < a < 2a < 1$이므로

두 함수 $y = \log_a x$, $y = \log_{2a} x$ 의 그래프는 다음과 같다.




ㄱ. $p = \frac{1}{2}$이면 $p = \log_a p$에서 $a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ 양변을 제곱하면 $a = \frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. 다음 그림에서 $p < q$ (참)

ㄷ. $p = \log_a p$, $q = \log_{2a} q$이므로 $a^p = p$, $(2a)^q = q$ 즉, $a^p = p$, $a^q = \frac{q}{2^q}$

$\therefore\ a^{p+q} = a^p \cdot a^q = p \cdot \frac{q}{2^q} = \frac{pq}{2^q}$ (참) 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19)

해설) 점 P의 $x$좌표를 $\alpha$라 하면 $k \cdot 3^{\alpha} = 3^{-\alpha}$

따라서 $k \cdot 3^{\alpha} = \frac{1}{3^{\alpha}}$이므로 양변에 $3^{\alpha}$을 곱하여 정리하면

$(3^{\alpha})^2 = 3^{2\alpha} = \frac{1}{k}$ 이 때, 점 Q의 $x$좌표는 $2\alpha$이므로 $k \cdot 3^{2\alpha} = -4 \cdot 3^{2\alpha} + 8$ 이 때, $3^{2\alpha} = \frac{1}{k}$이므로

$k \cdot \frac{1}{k} = -4 \cdot \frac{1}{k} + 8$ 그런데 $k > 0$이므로 $1 = -\frac{4}{k} + 8$ $\therefore\ k = \frac{4}{7}$ $\therefore\ 35k = 20$

20)

해설) 직선 $y = 2x$ 위의 한 점 P를 $(a, 2a)$라 하면 $A(a, 4^a), B(4^a, 2a)$이므로

$\frac{S_3}{S_1} = \frac{(4^a - a)2a}{(4^a - 2a)a} = \frac{7}{3}$, $4^a = 8a$, $\frac{S_2}{S_1} = \frac{(4^a - a)(4^a - 2a)}{(4^a - 2a)a} = \frac{k}{3}$ $\therefore\ k = 21$

21)

해설)

ㄱ. $x_1 > 1, y_2 < 1$이므로 $x_1 > y_2$ (참)

ㄴ. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$는 직선 $y = 2 - x$ 위의 점이므로

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$ $\therefore\ x_2 - x_1 = -(y_2 - y_1) = y_1 - y_2$ (참)

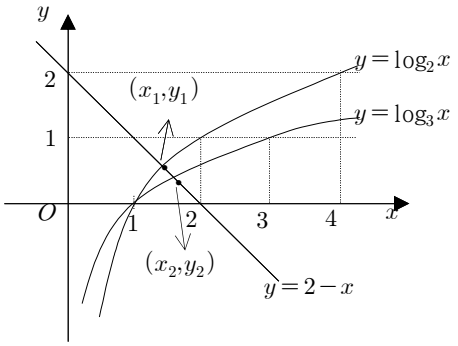
ㄷ. $x_1 y_1 - x_2 y_2 = x_1(2 - x_1) - x_2(2 - x_2)$

$= (x_2^{\,2} - x_1^{\,2}) - 2(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$

$x_2 - x_1 > 0$이고, $x_1 > 1, x_2 > 1$에서 $x_1 + x_2 > 2$이므로

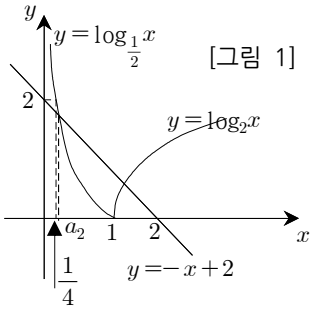
$x_1y_1-x_2y_2>0 \ \therefore \ x_1y_1>x_2y_2$ (참)

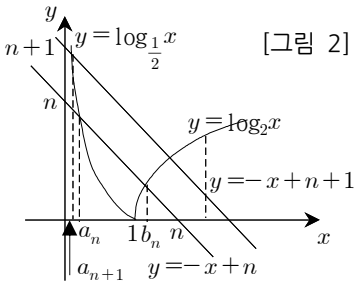
따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

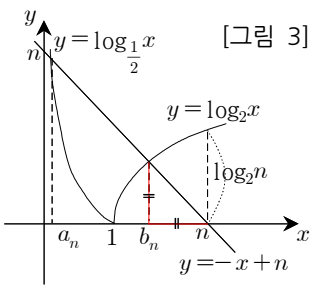



22)

해설) ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 각 숫자를 좌표로 해석해서 길이를 비교하는 문제이다. (길이의 관점)




ㄱ. [그림 1] : $x=\frac{1}{4}$을 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$에 대입하면 2가 되므로 $x$좌표를 비교하면 $\therefore \ a_2>\frac{1}{4}$ (거짓)

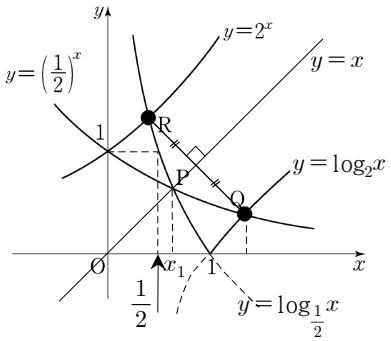
ㄴ. [그림 2]에서와 같이 $a_{n+1}$은 $y=-x+n+1$과 $y=|\log_2 x|$의 교점의 $x$좌표이므로 $0<a_{n+1}<a_n$ (참)

ㄷ. [그림 2] : $1<b_n<n$이므로 $\frac{b_n}{n}<1$ [그림 3] : $1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n} \Leftrightarrow n-\log_2 n<b_n \Leftrightarrow n-b_n<\log_2 n$

즉, 두 부등식이 모두 성립하므로 $\therefore \ 1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}<1$ (참) 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

23)

해설) ㄱ. 길이의 관점 ㄴ. 넓이의 관점 ㄷ. 기울기의 관점




ㄱ. 그림에서 $x_1<1 \ \cdots$ ㉠, $\frac{1}{2}$을 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$에 대입 $x_1>\frac{1}{2} \cdots$ ㉡

즉, ㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2}<x_1<1$이다. (참)

ㄴ. 그림에서 $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$과 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이 $y=x$에 대하여 대칭.

즉, $x_2=y_3,\ y_2=x_3 \quad \therefore \ x_2y_2-x_3y_3=0$ (참)

ㄷ. $x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1) \Leftrightarrow \frac{x_1-1}{y_1}>\frac{y_2-1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{x_1-1}{y_1-0}>\frac{y_2-1}{x_2-0}$

즉, $(y_1,x_1)$과 $(0,1)$을 연결한 직선의 기울기 $>$ $(x_2,y_2)$와 $(0,1)$을 연결한 직선의 기울기

그런데 $(y_1,x_1)$은 $(x_1,y_1)$과 같다. 즉, $\overline{RP}$의 기울기 $>$ $\overline{RQ}$의 기울기 - 그림으로 거짓임을 안다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24)

해설) $3^x=3\cdot 2^{3x} \Leftrightarrow 3^x=3\cdot 8^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^x=3 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{8}}3 \Leftrightarrow x=\frac{\log 3}{\log\frac{3}{8}}=\frac{\log 3}{\log 3-3\log 2}$

25)

해설) 주어진 식이 $2^{3x^3+6x^2+3}=8^{2x^3-x^2+x-2}$ 일 때, $2^{3x^3+6x^2+3}=2^{6x^3-3x^2+3x-6} \Leftrightarrow x^3-3x^2+x-3=0$

$x^3-3x^2+x-3=(x-3)(x^2+1)=0$이므로 정답은 $x=3$

26)

해설) $3^x$을 $t$라 하면 $t^2-5t-36=0\,(t>0)$이다. 이것을 풀 면 $t=-4$ or $9$이다. 여기에서 $-4$를 제거하면 $t=9$이다. $3^x=9$이므로 $x=2$이다.

27)

해설) $2^x+2^{-x}=t$라고 치환하면 $t\geq 2$이고, $4^x+4^{-x}=t^2-2$이다. 즉, $4^x+4^{-x}=2^x+2^{-x}$은 $t^2-t-2=0$이고, $t=-1$ or $2$이다. 이 중 $-1$은 제한범위에서 벗어나므로 버리고, $t=2 \Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=2$이다.

양변에 $2^x$을 곱하면, $(2^x)^2-2\times 2^x+1=0$이다. 이 방정식을 다시 풀면, $2^x=1$이고, $x=0$이다.

28)

해설) <밑 조건과 진수조건>을 이용하여 $x$의 범위부터 정하면 $x>3$이다. - 식 변형의 자유

$\log_2(x-3)=\log_4(x-1)$ $2\log_2(x-3)=\log_2(x-1) \Leftrightarrow \log_2(x-3)^2=\log_2(x-1) \Leftrightarrow (x-3)^2=x-1$

이고, $x^2-7x+10=0$이므로 $x=2$ or $5$이다. 진수조건에 의하여 $2$는 답이 될 수 없으므로 정답은 $5$

29)

해설) <밑 조건과 진수조건>에 의해서 $\log_2 x+2$가 통째로 진수이므로 $\log_2 x+2>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$ 이다.

$2^{\log_4(\log_2 x+2)}=\log_2 x+2 \Leftrightarrow (\log_2 x+2)^{\log_4 2}=\log_2 x+2 \Leftrightarrow \log_2 x+2=(\log_2 x+2)^2$

$\Leftrightarrow (\log_2 x+2)(\log_2 x+1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ or $\frac{1}{4}$

이 중 $\frac{1}{4}$은 진수범위에 위배되므로 정답은 $x=\frac{1}{2}$이다.

30)

해설) 준 식 $x^{\log_3 x-2}=27$ 밑이 3인 로그를 취하여 정리하면 $(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$라고 치환하면 주어진 방정식은 $t^2-2t-3=0$이고, $t$의 입장에서 두 근은 $\log_3\alpha, \log_3\beta$

$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\frac{\log_3\beta}{\log_3\alpha}+\frac{\log_3\alpha}{\log_3\beta}$ (편의상 $\log_3\alpha=a, \log_3\beta=b$라 하면) $=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$

근과 계수와의 관계에 의하여 $a+b=2, ab=-3$이므로 정답은 $-\frac{10}{3}$이다.

31)

해설) $2^x=X, 3^y=Y$라고 치환하면 주어진 부등식은 $\begin{cases}-X+Y=2\\ X\times Y=3\end{cases}$ $(X, Y>0)$가 된다.

연립하여 $X$를 풀면 $1$ 또는 $-3$이 나오는데 $-3$은 제거한다.

즉, $X=1$, $Y=3$이므로 우리가 구하는 해는 $x=0, y=1$이다.

32)

해설) $\log_3 x\times\log_2 y=\frac{\log_k x}{\log_k 3}\times\frac{\log_k y}{\log_k 2}=\frac{\log_k x}{\log_k 2}\times\frac{\log_k y}{\log_k 3}=\log_2 x\times\log_3 y=6$

$\log_2 x = X$, $\log_3 y = Y$라 하면 $\begin{cases} X+Y=5 \\ XY=6 \end{cases}$이므로 $\begin{cases} X=2 \\ Y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} X=3 \\ Y=2 \end{cases}$ 즉, $\begin{cases} x=4 \\ y=27 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=9 \end{cases}$

따라서 $\beta-\alpha$의 최댓값은 23

33)

해설) $a^{2x+1} > (\sqrt{a})^{3x}$ $(a>0, a\neq 1)$의 식을 변형하면 $a^{2x+1} > a^{\frac{3x}{2}}$ 이다. $a$의 범위가 없으므로 정해준다.

정답은 $a>1$일 때는 $x>-2$, $0<a<1$일 때 $x<-2$

34)

해설) $(\frac{1}{4})^x - (\frac{1}{2})^x - 12 > 0$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t\ (t>0)$라 하면 $t^2-t-12>0$이므로 $t<-3$ or $t>4$이다.

하지만 $t>0$를 만족해야 하므로 $t>4$가 된다. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 이므로 정답은 $x<-2$이다.

35)

해설) $a^{x-1} < a^{2x+1}$의 해가 $x<-2$이려면 $x<-2 \Leftrightarrow x-1>2x+1 \quad \therefore\ 0<a<1$

$\log_a(x-2) < \log_a(4-x)$에서 $x-2>4-x \quad \therefore\ x>3$ … ㉠

진수는 양수이어야 하므로 $x-2>0, 4-x>0 \ \therefore\ 2<x<4$ … ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는 $3<x<4$ 이다.

36)

해설) 일단 진수 조건을 고려하면 $\log_{\frac{1}{3}} x > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 1$이므로 $x<1$이고, 또 $x$자체도 진수이므로

$x>0$이어야 한다. 즉, <밑 조건과 진수조건>을 통해서 찾는 $x$의 제한범위는 $0<x<1$이다. 이제 준 식

을 변형하면 $\log_2(\log_{\frac{1}{3}} x) > 1 \Leftrightarrow \log_2(\log_{\frac{1}{3}} x) > \log_2 2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x > 2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < \frac{1}{9}$

정답은 $0<x<\frac{1}{9}$이 정답이 된다.

37)

해설) 진수조건에서 $x>0$이어야 한다. 이제 로그의 성질을 이용하여 식 변형 할 수 있다. $\log_2 x = t$라 하면

$t^2-4t>0$이므로 $t<0$ or $t>4$이다. $t$를 환원하여 계산하면 $\log_2 x < 0$ or $\log_2 x > 4 \Leftrightarrow x<1$ or $x>16$

이다. $x>0$와 위의 부등식의 교집합을 구하면 정답은 $0<x<1$ 또는 $x>16$이다.

38)

해설) 역시 진수조건부터 챙기면 $x>0$이다. 준 식의 양변이 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면 부등호의 방향이 바뀐다.

즉, $x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \frac{1}{8x^2} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^{\log_{\frac{1}{2}} x}\right) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8x^2}$이고 양변을 정리하면 $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x - 3 < 0$이다.

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$라 하면 $-3<t<1$이고, $t$를 환원하면 $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8>x>\frac{1}{2}$ 이다.

이것을 $x>0$와 교집합을 해봤자 정답은 $\frac{1}{2}<x<8$이다.

39)

해설) $\begin{cases}\log_3|x-3|<4 & \cdots\ ① \\ \log_2 x+\log_2(x-2)\geqq 3 & \cdots\ ②\end{cases}$

①에서 $x\neq 3$이고 $|x-3|<3^4$, $-81<x-3<81$, $-78<x<84\,(x\neq 3)\cdots$㉠

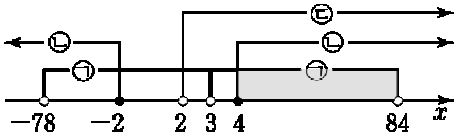
②에서 $\log_2 x(x-2)\geqq 3 \Leftrightarrow x(x-2)\geqq 2^3 \Leftrightarrow x^2-2x-8\geqq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2)\geqq 0$

$\therefore\ x\leqq -2$ 또는 $x\geqq 4\ \cdots$ ㉡

진수는 양수이므로 $x>0$이고 $x-2>0\ \therefore\ x>2\ \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$\therefore\ 4\leqq x<84$ 따라서, 정수 $x$의 개수는 $84-4=80$




40)

해설) $\mathrm{P}(k, a^k)$, $\mathrm{Q}(k, a^{2k})$, $\mathrm{R}(k, k)$ 라 하면 $k=2$ 일 때 $a^{2k}=k$ 이므로 $a^4=2$

$\therefore\ a=\sqrt[4]{2}\ (\because\ a>1)\ \therefore\ a^x=2^{\frac{x}{4}},\ a^{2x}=2^{\frac{x}{2}}$

ㄱ. $k=4$ 이면 $(\sqrt[4]{2})^8=4$ 이므로 $a^{2k}=k$ 이다. 따라서 점 Q와 점 R는 일치한다. (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\left|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}\right|=12$ 이다. 이때 $2^{\frac{k}{4}}=t\ (t>0)$라 하면 $t^2-t=12$ 또는 $t^2-t=-12$ 이다.

i) $t^2-t=12$ 인 경우 $(t-4)(t+3)=0$ 에서 $t>0$이므로 $t=4\ \therefore\ 2^{\frac{k}{4}}=4\ \therefore\ \frac{k}{4}=2\ \therefore\ k=8$

ii) $t^2-t=-12$ 인 경우 $t^2-t+12=0$ 의 판별식이 음수이므로 $t>0$ 조건을 만족시키는 실수 $t$ 가 존재하지 않는다. 따라서, $k$도 존재하지 않는다.

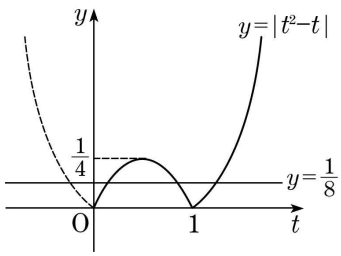
i), ii)에 의하여 $k=8$ 이므로 $\mathrm{Q}(8,16)$, $\mathrm{R}(8,8)\ \therefore\ \overline{\mathrm{QR}}=8$ (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\left|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}\right|$ 에서 $2^{\frac{k}{4}}=t\ (t>0)$라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=|t^2-t|$ 이다.

이때 $y=|t^2-t|=\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right|$ 의 그래프는 다음과 같다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{8}$ 을 만족시키는 양의 실수 $t$의 값은 3개이므로

실수 $k$ 의 값도 3 개이다. (거짓)



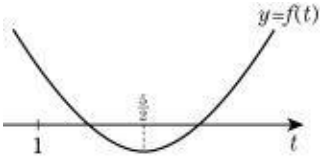

41) 답.②

$5^x=t$로 치환하면 주어진 방정식은

$t^2-5t+k=0\ \cdots$ ㉠

$x>0$이면 $t>1$이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 ㉠이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-5t+k$라 놓으면 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.




$f(1)=1-5+k>0\ \cdots$ ㉡

(판별식)$=25-4k>0\ \cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $4<k<\frac{25}{4}$, $k=5,6$

따라서 구하는 정수 $k$의 개수는 2이다.

42) 답. 25

$\log x = X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2+(\log 2+\log 4)X+(\log 2)(\log 4)+(\log k)^2=0$
주어진 조건을 만족하려면 $X$에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 $D$는
$D=(\log 2+\log 4)^2-4(\log 2)(\log 4)-4(\log k)^2>0$
$-\frac{1}{2}\log 2<\log k<\frac{1}{2}\log 2$
$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}<k<\sqrt{2}$
$\therefore\ 10(\alpha^2+\beta^2)=10\left(\frac{1}{2}+2\right)=25$

43) 답 : ⑤
$2^x=t\,(t>0)$, $g(t)=t^2-2at+a^2-a-6$이라 하자. 방정식 $4^x-a\cdot 2^{x+1}+a^2-a-6=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, 방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.
방정식 $g(t)=0$의 서로 다른 두 양의 실근을 $\alpha,\beta$ 라 하면, $\alpha>0,\beta>0$ 이므로
$D/4=a^2-(a^2-a-6)=a+6>0$에서 $a>-6$ … ㉠
$\alpha+\beta=2a>0$ 에서 $a>0$ … ㉡
$\alpha\beta=a^2-a-6=(a-3)(a+2)>0$에서
$a>3$ , $a<-2$ … ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 범위는 $a>3$

44) 답 : ②
$2^{\frac{x}{2}}=t$ $(t>0)$로 치환하면
$2^{x+1}=2^x\cdot 2=\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot 2=2t^2$,
$2^{\frac{x+4}{2}}=2^{\frac{x}{2}}\cdot 2^2=4t$ 이므로
주어진 부등식은
$2t^2-4t+a=2(t-1)^2+a-2\geqq 0$ … ㉠
여기서 $t>0$일 때 이차부등식 ㉠이 항상 성립하기 위해서는 $a-2\geqq 0$ 이어야 한다.
$\therefore\ a\geqq 2$
따라서 구하는 실수 $a$의 최소값은 2이다.

45)
해설) 주어진 $x^{\log x}>(1000x)^a$ 부등식에서 양변에 상용로그를 취하면 $\log\left(x^{\log x}\right)>\log(1000x)^a$ 이고 양변을 정리하면 $(\log x)^2-a\log x-3a>0$이다. $\log x=t$라고 치환할 때, 양수 $x$의 범위에서 $t$는 모든 실수이므로 $t^2-at-3a>0$가 모든 실수 $t$에서 항상 성립하면 된다. 즉, '판별식 $<0$'를 쓰면 $a^2+12a<0$이므로 정답은 $-12<a<0$이다.

46) 답. ④

47) 답. ③

48) 답. ①

49) 답 : ③
ㄱ. $1<a<b$이고 $x>1$이면 $1<a^x<b^x$이고 $0<\log_b x<\log_a x$이므로 $a^x+\log_b x<b^x+\log_a x$

$f(x)=\dfrac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}>1$ 〈참〉

ㄴ. $b<a<1$이면 $\lim_{x\to\infty}a^x=\lim_{x\to\infty}b^x=0$이고 $\lim_{x\to\infty}\log_a x=\lim_{x\to\infty}\log_b x=-\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{b^x}{\log_b x}+\dfrac{\log_a x}{\log_b x}}{\dfrac{a^x}{\log_b x}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{b^x}{\log_b x}+\dfrac{\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}{\log_b x}}{\dfrac{a^x}{\log_b x}+1}=\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$$ 〈거짓〉

ㄷ. $\lim_{x\to0+}a^x=\lim_{x\to0+}b^x=1$이고 $x\to0+$일 때, $\log_a x$, $\log_b x$는 $\infty$ 또는 $-\infty$로 발산하므로 ㄴ과 같은 방법으로 계산하면

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{b^x}{\log_b x}+\dfrac{\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}{\log_b x}}{\dfrac{a^x}{\log_b x}+1}=\log_a b$$ 〈참〉

50) 답. ①

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

51) 답. ③

52) 답. ②

53) 답. ②

54) 답 : ③

ㄱ. $x-1=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right\}=e$$ 〈참〉

ㄴ. ㄱ에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=e$ 또, $\lim_{x\to\infty}f(x+1)=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right\}$

$=e$

$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)f(x+1)=\lim_{x\to\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to\infty}f(x+1)=e^2$ 〈참〉

ㄷ. $kx-1=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때, $t\to\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}f(kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{kx}{kx-1}\right)^{kx}=\lim_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+1}{t}\right)^{t+1}$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right\}=e$$ 〈거짓〉

55) 답. (1) $x=3$ (2) $x=-\dfrac{1}{2}$ (3) $x=e^{-2}$ (4) $x=\ln 5$

56) 답. (1) 1 (2) $\dfrac{1}{2}$

57) 답. ②

58) 답. (1) $\frac{1}{2}\ln 2$ (2) $\frac{1}{e}$

59) 답. ③

부등식 $\ln(1+x) \le f(x) \le \frac{1}{2}(e^{2x}-1)$에서

ⅰ) $x>0$인 경우 $\frac{\ln(1+3x)}{x} \le \frac{f(3x)}{x} \le \frac{\frac{1}{2}(e^{6x}-1)}{x}$

$x \to +0$일 때, $\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=3$, $\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{2}(e^{6x}-1)}{x}=3$ 이므로 $\lim_{x\to+0}\frac{f(3x)}{x}=3$이다.

ⅱ) $-1<x<0$인 경우, $\frac{\ln(1+3x)}{x} \ge \frac{f(3x)}{x} \ge \frac{\frac{1}{2}(e^{6x}-1)}{x}$

$x \to -0$일 때, $\lim_{x\to-0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=3$, $\lim_{x\to-0}\frac{\frac{1}{2}(e^{6x}-1)}{x}=3$이므로 $\lim_{x\to-0}\frac{f(3x)}{x}=3$이다.

따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해 $\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}=3$

60) 답 : ⑤

$\lim_{x\to0}\frac{(a+12)^x-a^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(a+12)^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a+12)-\ln a=\ln\frac{a+12}{a}=\ln 3$

$\frac{a+12}{a}=3$, $a+12=3a$ $\therefore a=6$

61) 답 : ③

ㄱ. (참) $f(x)=x^2$이면 $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x=1\cdot 0=0$

ㄴ. (참) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{f(x)}=1$ 이면 $\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{f(x)}\cdot\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1}=1\cdot\ln 3\cdot 1=\ln 3$

ㄷ. (거짓) (반례) $f(x)=\sqrt{x}$이면 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이지만 $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

62) **정답** ⑤

$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{x}=10$에서 극한값이 존재하고, $x\to0$

일 때 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\ln\{1+f(2x)\}=0$이어야 하므로

$\lim_{x\to0}f(2x)=0$

이때, $f(2x)=t$로 놓으면 $x\to0$일 때, $t\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{f(2x)}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

따라서 $x=2y$로 놓으면 $x\to0$일 때, $y\to0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(2y)}{2y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{f(2y)}{\ln\{1+f(2y)\}}\times\frac{\ln\{1+f(2y)\}}{y}\times\frac{1}{2}\right]$$
$$=1\times 10\times\frac{1}{2}=5$$ 답 ⑤

63) **정답** ②

$f(x)=x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)로 놓으면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (-1<x<0,\ x>0)\\ 8b & (x=0)\end{cases}$$

이때, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 열린 구간 $(-1,\ \infty)$에서 $x\neq 0$인 모든 실수에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 열린 구간 $(-1,\ \infty)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이 되어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b$$

위의 식에서 극한값이 존재하고, $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)=0$이어야 하므로 $b=0$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{\ln(x+1)}\times(x+a)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}\times\lim_{x\to 0}(x+a)$$
$$=1\times a=a$$

즉, $a=0$이므로 $f(x)=x^2$

$\therefore\ f(3)=3^2=9$ 답 ②

64) 답 : ④

$x\to 0$일 때, $a^x+b\to 0$이므로 $b=-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}\times\frac{a^x-1}{x}=\ln a=\ln 3$$

$\therefore\ a=3$이므로 $a-b=4$

65) 답. ①

$\lim_{x\to\infty}x^a=\infty$이므로 주어진 등식이 성립하려면 $\lim_{x\to\infty}\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to\infty}\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=1$이어야 하므로 $b=1$

이때, (주어진 식) $=\lim_{x\to\infty}cx^{a-2}\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{c}}=\lim_{x\to\infty}cx^{a-2}=2$

이어야 하므로 $a-2=0$, $c=2$이어야 한다.

$\therefore\ a=2,\ c=2$

$\therefore\ a+b+c=2+1+2=5$

66) 답 : ④

$\mathrm{A}(t,\ \ln(2t+1))$이라 하면 $a\to\infty$일 때 $t\to0$이다.

$S_1=\frac{1}{2}\ln(2t+1)$, $S_2=\frac{t}{2}$이므로 $\alpha=\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(2t+1)}{t}=2$

67) 답. ⑤

68) 답. ⑤

69) 답. 14

$f(x)=x\ln x+13x$에 대하여

$f'(x)=\ln x+14\quad\therefore f'(1)=14$

70) **정답** 2

$f(x)=e^{x-3}$에서 $f'(x)=e^{x-3}$

$\frac{3n+5}{n+2}=3-\frac{1}{n+2}$, $\frac{3n+3}{n+2}=3-\frac{3}{n+2}$에서

$\frac{1}{n+2}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $t\to0+$이고

$n=\frac{1}{t}-2=\frac{1-2t}{t}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(\frac{3n+5}{n+2}\right)-f\left(\frac{3n+3}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left[\frac{1-2t}{t}\times\{f(3-t)-f(3-3t)\}\right]$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{(1-2t)\times\frac{f(3-t)-f(3)+f(3)-f(3-3t)}{t}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left[(1-2t)\left\{\frac{f(3-t)-f(3)}{-t}\times(-1)+\frac{f(3-3t)-f(3)}{-3t}\times3\right\}\right]$$

$=1\times\{-f'(3)+3f'(3)\}$

$=2f'(3)$

$=2\times e^0=2\times1=2$ ⓑ 2

71) 답. ④

$f'(x)=2x+\ln x+1$이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{3h}\cdot3\quad=3f'(1)=9$

# 촌철살인

다시 만나는 개념