네. 이거에요.

제가 생각하는
논리의 단편입니다.

- 미천한 수학자 -

우리는 **내용을 몰라서 문제를 못 푸는 것이 아닙니다.**
아래 문제는 고1도 풀 수 있는 문제로
고등에서 새로 배우는 공식이라고는
'점과 직선 사이의 거리공식'밖에는 쓰지 않습니다.

이 문제는 '수능예상문제'가 아닙니다.
그저 우리가 **인지하지 못하고 있는 논리가 무엇인지를 설명**하기 위해
제가 만든 문제일 뿐입니다.

문제
좌표평면 위에 중심이 (m, n)이고 반지름이 r인 원이 있다. 점 $\mathrm{A}(m+r, n+r+p)$ $(p \neq -r)$에서 이 원에 그은 접선 중 y축과 평행하지 않은 직선의 기울기를 $f(p)$라고 하자. p에 대한 방정식 $f(p)=1$의 두 실근을 p_1, p_2 $(p_1 < p_2)$라고 할 때, $\frac{p_2 - p_1}{r} = k+1$에 대하여 k^3+3k^2-5k+7의 값을 구하시오.

<제1난관> 공식이 아닌 '사고방식'을 그냥 지나쳤다.

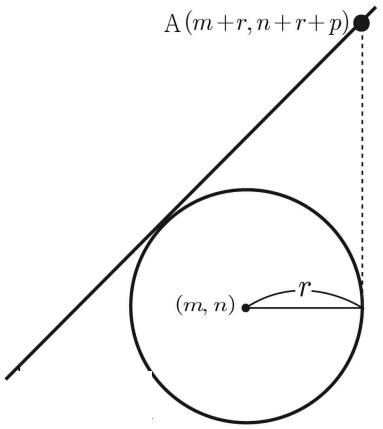
어쩌면 여러분들은 여기에서부터 문제가 생겼을지 모른다.

그림을 그릴 때, 원의 중심 (m, n)과 $\mathrm{A}(m+r, n+r+p)$의
위치관계를 따지면서 그림을 그려야 아래와 같이
점 A에서 그은 접선 중y축과 평행한 직선이
반드시 포함된다는 사실을 이해할 수 있다.

A라는 점은 아무 곳이나 찍는 학생이 사실 대부분이다.

- '문제의 상황'을 **동치가 되는** '그림, 식의 상황'으로 바꾼다.

이런 과정을 보통 우리는 **<조건을 해석했다.>** 또는 **<조건을 사용했다.>**라고 말한다.



<제2난관> 문자가 너무 많다.

이 문제의 두 번째 난관이다.

숫자가 문자로 표현되더라도 수학적, 논리적 본질은 같음에도 불구하고,
수학을 경함 기반으로만 접근하려고 하는 학생들은 여기에서 펜이 멈춘다.
'계산하면 너무 복잡해서 뭐가 아닐 것 같다.'
라는 생각이 들기 때문이다.

문자가 많을 때는 '중심문자'를 결정해야 한다.
과학에서도 한 가지 독립변인을 제외하고는 모두 통제하듯이
수학도 중심문자(변수)는 항상 1개여야 한다.
(이것은 매우 중요한 수학의 사고방식이다.)

위의 그림에서 m, n, r, p**를 모두 고정**시키고,
기울기를 a라고 둔 후, a**를 변수로 상황을 재해석**해보면
위의 '좌표평면의 상황'에서 **접하는 순간의** a**값은 딱 한 개 존재**한다.
a가 기울기이므로 y축과 평행한 상황은 자동으로 배제된다.

즉, 내가 만약 **'위의 좌표평면의 상황'과 '동치가 되는 관계식'**을
세웠을 때, 이 관계식 역시 a**에 대한 일차방정식이 되어서**
a**값이 딱 한 개로 결정될 것**이라는 것을 논리적으로 예측할 수 있다.

사실 이런 논리적 확신이 나의 손을 움직이게 하는 것이다.
결과가 간단할 것이라는 논리적 확신만 있다면
과정쯤은 아무리 복잡해도 나의 손은 움직일 것이다.

<제3난관> 식 선택의 문제

여기에서 식을 세우는 과정에서 또 문제가 생길 수 있다.

'좌표평면 위의 임의의 직선'과 **동치가 되는 자취의 방정식**은
$ax+by+c=0$이다.
이 식을 세우면 좌표평면위의 모든 직선을 표현한다.
하지만 우리는 일반적으로 **연산의 효율성**을 위해서 <$y=ax+b$ or $x=c$>와 같이
두 가지 케이스로 나누어 식을 세우기도 한다.

이 문제의 상황에서 우리가 필요한 직선은
<일차함수>의 형태일 뿐이고, 그러므로 $x=c$꼴 직선도 포함하는
$ax+by+c=0$ 구조의 식은 필요하지 않다.

- 드디어 '우리가 해석한 그림, 식의 상황'과 **동치가 되는** '관계식'을 세운다.
: '원과 직선이 접한 상황'은 교과서에서 배운 기본상황으로서 $d=r$이라는 공식이 사용될 뿐이다.

- $y=a(x-m-r)+n+r+p \quad (p\neq -r, r>0)$과 원이 **'접한 상황'**이다.
즉, $ax-y-(m+r)a+n+r+p=0$과 (m,n)사이의 거리 $=r$

$$\Rightarrow \quad \frac{|am-n-(m+n)a+n+r+p|}{\sqrt{a^2+1}}=r$$
$$\Leftrightarrow \quad |r+p-ar|=r\sqrt{a^2+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad (ar)^2-2(r+p)ar+(r+p)^2=r^2(a^2+1)$$
$$\Leftrightarrow \quad -2(r+p)ar+2rp+p^2=0$$
$$\Leftrightarrow \quad a=\frac{p^2+2rp}{2r(r+p)} \quad (p\neq -r)$$

(예상대로 a에 대한 일차방정식이었고, a에 대한 방정식을 풀었다.)

'식의 동치변형'에 대한 이론적 명분을 정확히 세우지 않은 학생들은
$|r+p-ar|=r\sqrt{a^2+1}$ 을 $(ar)^2-2(r+p)ar+(r+p)^2=r^2(a^2+1)$으로
고치는 과정에서 또한 머뭇거렸을지 모른다.

결국 $f(p)=1 \quad \Leftrightarrow \quad p^2+2rp=2rp+2r^2 \quad \Leftrightarrow \quad p=\pm\sqrt{2}\,r$

즉, $\frac{p_2-p_1}{r}=\frac{2\sqrt{2}\,r}{r}=2\sqrt{2}=k+1$

<제4난관> 식을 간단히 계산하는 논리

$k=2\sqrt{2}-1$을 k^3+3k^2-5k+7에 대입하여
식을 정리하는 것은 사실 끔찍해 보인다.

여기에서 계산을 간단히 하는 논리가 정립되지 않은 또 누군가에게는
예상치 못한 난관이 될 수 있다.
이 논리 역시 '고1 과정'에서 배운 것으로
'관계식으로 관계식을 푸는 논리'이다.
'다항식의 몫과 나머지로의 표현논리' 역시 들어간다.

$$k=2\sqrt{2}-1 \quad \Rightarrow \quad k^2+k+1=8 \quad \Leftrightarrow \quad k^2+2k-7=0$$

그러므로 $k^3+3k^2-5k+7=(k^2+2k-7)(k+1)+14 \ =14$

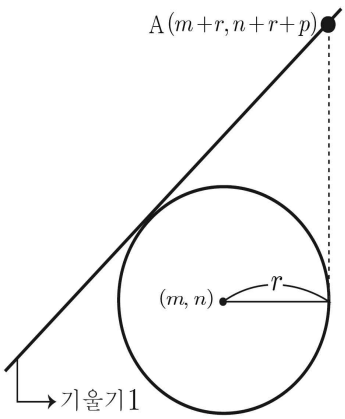
‘별해’라는 것도 사실 **논리 적용 순서가 달라진 풀이**일 뿐이다.
신기할 것도 없다. 다만 위의 내용을 읽은 후 아래 해설을 읽길 바란다.

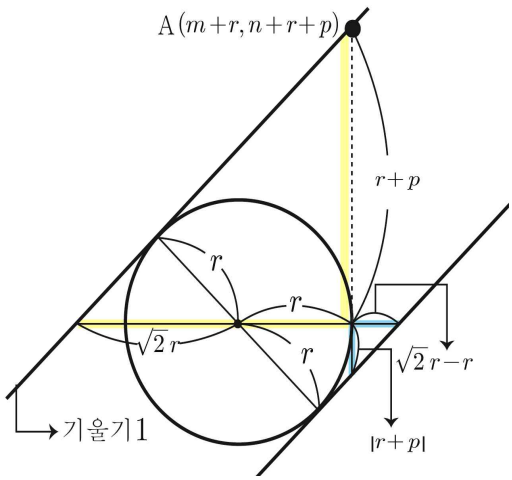
좌표평면 위에 중심이 (m, n)이고 반지름이 r인 원이 있다.
점 $\mathrm{A}(m+r, n+r+p)$ $(p \neq -r)$에서 이 원에 그은 접선 중 y축과 평행하지 않은 직선의 기울기를 $f(p)$라고 하자. p에 대한 방정식 $f(p)=1$의 두 실근을 p_1, p_2 $(p_1 < p_2)$라고 할 때, $\dfrac{p_2 - p_1}{r} = k+1$에 대하여 $k^3 + 3k^2 - 5k + 7$의 값을 구하시오.

조건 중 p에 대한 방정식 $f(p)=1$에 초점을 맞추어 상황을 해석해 보자.

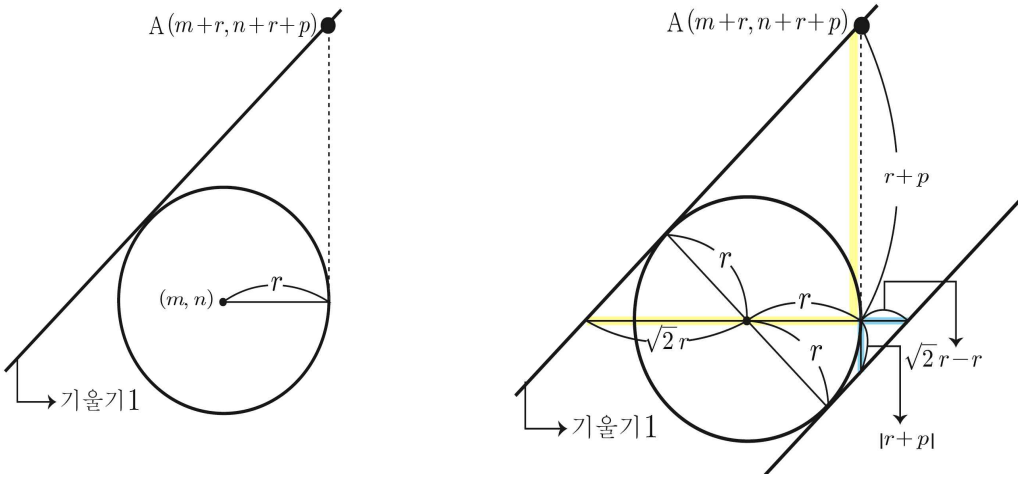
이 조건을 **‘상황적으로 해석’하면 $f(p)=1$인 p의 값은 ‘기울기$=1$’인 순간의 p**이다.

‘문제의 상황’을 ‘동치가 되는 그래프의 상황’으로 옮겨보면 아래와 같다.
(물론 이 때 두 점의 위치관계를 따져서 그림을 그린 것이다.)
이때 우리는 **p를 변수로 하고, 남은 문자 m, n, r을 상수로 하여 상황을 해석**해보면
상황적으로 아래와 같이 기울기가 1인 순간의 p가 2번 존재한다는 사실을 알 수 있고,
이것이 바로 p에 대한 방정식 $f(p)=1$의 두 실근을 p_1, p_2 $(p_1 < p_2)$라는 것을
알 수 있다.





이 때 **'접하는 상황'은 반드시 '관계식 1개로 환원'**된다는 사실을
우리는 배운 바 있다. 단지 그 관계식을 세우는 과정에서 이번에는
'평면기하의 상황'으로 해석해서 관계식을 세워본다.



위의 그림에서

(1) → 직선의 기울기가 1이므로 '직각이등변삼각형'의 성질에 의하여
$r+\sqrt{2}\,r=r+p \quad \Leftrightarrow \quad p=\sqrt{2}\,r$

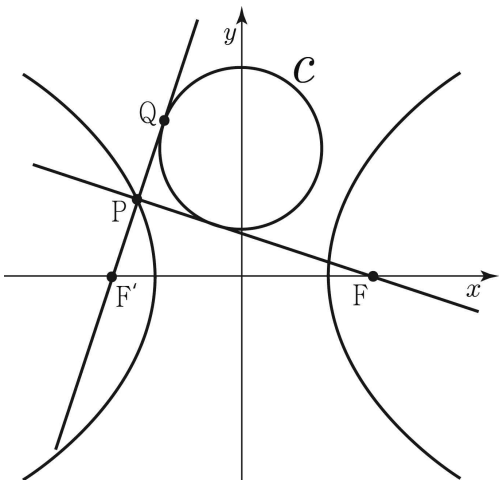
(2) → 역시 이등변 삼각형의 성질에 의하여
$r+p=-(\sqrt{2}\,r-r)$ (좌표와 길이개념) $\Leftrightarrow \quad p=-\sqrt{2}\,r \quad \Leftrightarrow \quad p=-\sqrt{2}\,r$

이 때도 **'좌표와 길이개념'에 대한 명확한 인지**가 없는 학생들은
관계식을 세우는 과정에서 실수할 수 있다.
좌표평면의 상황에서 길이를 표현할 때는
위치관계가 명확하다면 <가로의 길이 = 오른쪽 − 왼쪽>,
<세로의 길이 = 위쪽 − 아래쪽>이다.
그리고 위치관계가 명확하지 않다면 절댓값을 이용한다.

즉, $\dfrac{p_2-p_1}{r}=\dfrac{2\sqrt{2}\,r}{r}=2\sqrt{2}=k+1$ 나머지는 위의 과정과 같다.

2018 수능 - 이 문제를 어떻게 푸셨나요?

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F′P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 값을 구하시오.
(단, $\overline{\mathrm{F'P}}<\overline{\mathrm{FP}}$) [4점]



들어가기에 앞서
쌍곡선은 '기하적인 측면'과 '함수적인 측면'을 모두 가지고 있다.
'함수적인 측면'에 집중에서 문제를 풀 것이라면 '좌표에 미지수를 잡을 것'이고,
'기하적인 측면'에 집중해서 문제를 풀 것이라면
'도형을 만들어 길이에 미지수를 잡을 것'이다.

당연히 출제하는 사람의 입장에서 생각해보면 교과서의 방향성에 충실하게
'기하적인 측면'에 집중해서 문제를 풀 때
더 간단해지도록 상황을 설정할 것이다.

이 문제는 논리구조가 전혀 복잡하지 않다.
중간에 발상의 전환도 없다.
오직 '평면기하의 상황'과 그와 '동치가 되는 관계식'을 통해서
충실하게 풀어갈 뿐이다.

예를 들어 <수직>이라고 하는 상황은 반드시 <1개의 관계식>과 동치가 된다.

- 수직이라는 상황이 <평면기하의 상황>으로 조건이 제시되어 있다면
  <피타고라스의 정리>라는 관계식을 이용하면 **우리는 조건을 사용하게 된 것**이다.

- 또한 수직이라는 상황이 <좌표평면+직선의 상황>에서 제시되어 있다면
  <기울기 곱$=-1$>이라는 관계식을 이용하면 **우리는 조건을 사용하게 된 것**이다.

- 또한 수직이라는 상황이 <벡터의 상황>에서 제시되어 있다면
  <내적$=0$>이라는 관계식을 이용하면 **우리는 조건을 사용하게 된 것**이다.

그리고 이 세 관계식 <피타고라스의 정리>, <기울기 곱$=-1$>, <내적$=0$>은
모두 동치가 되는 관계식이므로 가장 적절한 한 개만 쓰면 된다.
만약 **조건이 부족하다고 느껴 두 번 쓰면 수학문제를 풀 때 매번 겪는 순환논리**에
빠지게 되는 것이다.

<원과 직선의 위치관계>의 상황도 반드시 <1개의 관계식>과 동치가 된다.

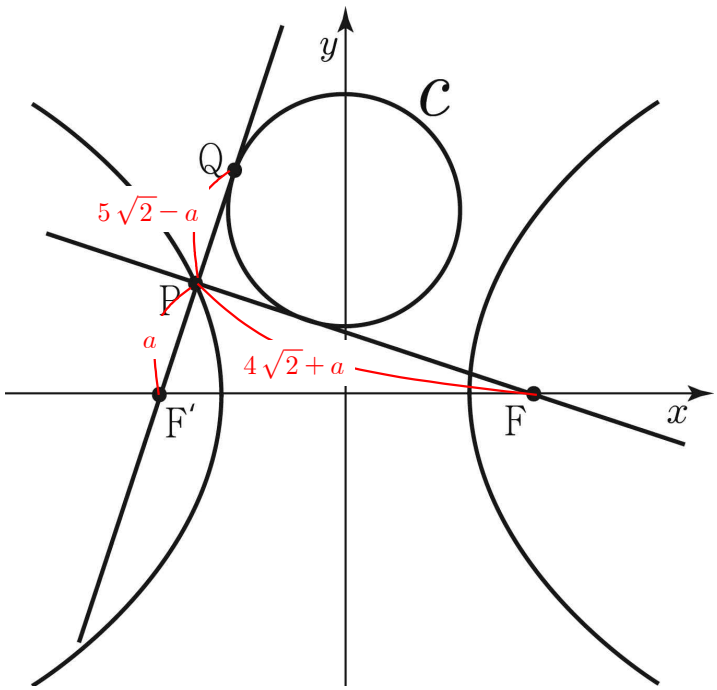
예를 들어 <원과 직선이 접한 상황>이라면
<점과 직선 사이의 거리 = 반지름>의 관계식을 통해서 조건을 해석해도 되고,
일단 <보조선을 그려서 수직의 상황>으로 바꾼 다음
다시 <수직의 상황>을 통해서 위와 같이 <관계식의 상황>으로 바꿔도 된다.

<1단계> 쌍곡선 조건

: 쌍곡선 위의 점과 초점을 지나는 직선의 상황에서는
이 상황과 동치가 되는 관계식이 딱 하나 존재한다.

'초점 거리의 차 = 주축의 길이'

이 논리만 제외하면 이 문제는 중학생도 풀 수 있는 문제이다.



문자는 언제 두나?

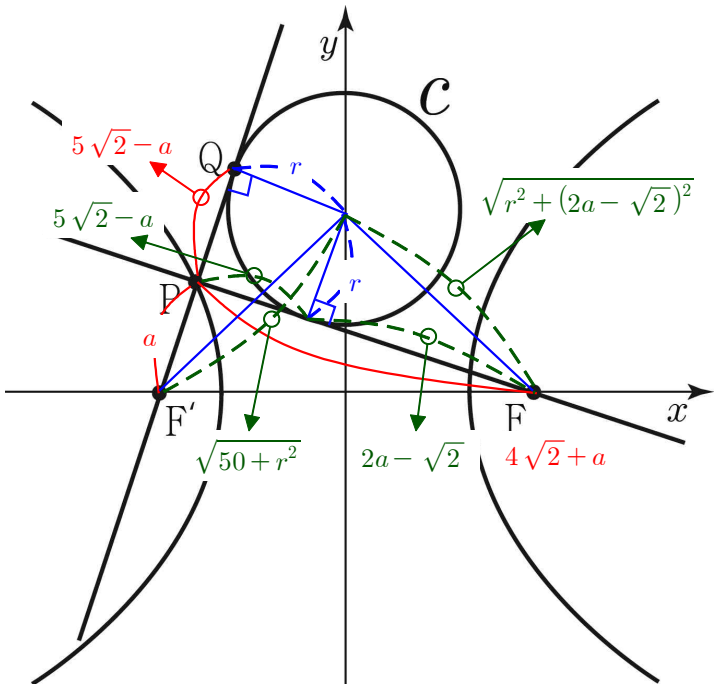
내가 관계식을 세워야 하는 상황으로 인지했을 때, 그때 문자를 두는 것이다.
'수직이라는 조건'을 '피타고라스 정리'라는 동치가 되는 관계식으로 바꾸어 표현(동치)한다고 마음을 먹으면 어쩔 수 없이 **반지름을 문자로 둘 수밖에 없다.**

문자는 1개만 두는데 관계식은 2개가 나오는 상황이므로
(원과 직선이 접한 상황이 2개)
이득이고, **당연히 반지름을 미지수로 둬야겠다는 생각이 든다.**

<2단계> 원과 직선의 위치관계 조건

: 복잡할 것 없다.

- 아래 '파란색 보조선'은 '수직조건'을 '피타고라스의 정리'로 바꾸기 위해 삼각형을 그린 것이고, (몇 번의 시행착오가 있어도 된다.)
- 아래 '초록색 부분'은 모두 '피타고라스 정리를 쓰기 위해 접선의 성질'을 이용해서 표시한 부분을 제외하면 모두 '피타고라스 정리라는 관계식'의 결과로서 표현된 것이다.



여기까지에서 뭔가 관계식이 부족하다는 것을 느꼈다면
'우리가 쓰지 않은 조건'이 무엇인지를 찾아봐야 한다.

그것은 **'문제의 상황'과 '내가 해석한 상황'이**
'동치'인지를 확인하는 과정과 같다.

위의 <1,2 단계를 만족하는 상황>을 거꾸로 생각해보면 <내가 해석한 상황>은
꼭 원의 중심의 좌표가 y축 위에 있지 않아도 만족하는 상황이라는
사실을 알 수 있다. 즉, 문제의 상황과 내가 해석한 2단계까지의 상황이
동치가 아니었다는 사실이다.

<3단계> y축 위에 있는 중심

: 중심이 y축 위에 있었기 때문에 우리는

$$\sqrt{50+r^2} \;=\; \sqrt{r^2+(2a-\sqrt{2}\,)^2}$$

라는 **추가적인 관계식**을 세울 수 있고, 이 식까지 만족해야 문제의 상황과 진정한 동치가 된다는 사실을 알 수 있다.

결국 $a=3\sqrt{2}$라는 사실을 알 수 있다.
이제 문제를 다 푼 것이나 마찬가지이다.

이런 과정들을 자연스럽게 할 수 있는 수학적 사고력은

하루아침에 길러지지 않습니다.

'개념의 인지'

'적절한 반복적 연습'

'사고력을 올리기 위한 고강도 훈련'

적절한 컨텐츠와 조언 그리고 강의를 통해서

올바른 방향과 방법으로 여러분과 함께 하겠습니다.

미천한 수학자의 컨텐츠에는

고등수학을 잘하기 위한 철학과 노력이 들어있습니다.

모든 커리에 **고민과 명분**이 녹아있습니다.

2018년. 저와 함께할 모든 학생들을 통해서

제 자신을 증명하겠습니다.

감사합니다.

- 미천한 수학자 -

ps. 위의 수능문제는 제가 실제로 처음 풀 때 풀어낸 방식입니다.

저는 그렇게 직관이 뛰어나지 않습니다.

수학공부를 오래하다 보니 어느 정도는 생기긴 했는데

천부적이지 않아요.

오히려 논리를 차근차근 밟아서 풀어갑니다.

그리고 그 방법론과 절차를 학생들과 공유할 뿐이죠.

이벤트 문제 - 문과 도전 1문제, 이과 도전 2문제

<문과용>

1. 함수 $f(x)=x^3-ax+a-11$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f'(f(x))+a+3=6\int_0^x |t-1|dt$$

가 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 서로 다른 두 실근을 가질 모든 자연수 a값의 합을 구하시오.

<이과용1>

2. 반지름이 2 인 원 위의 한 점 A 와 이 원 위를 움직이는 두 점 P, Q 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 좌표평면 위를 임의로 움직이는 점 R 에 대하여 $\overrightarrow{AR}$ 와 $\overrightarrow{AQ}$ 가 이루는 각은 $\frac{\pi}{4}$ 이다.
(나) $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert = 2$, $\lvert\overrightarrow{AR}\rvert = 3$

$\lvert\overrightarrow{AP}\rvert$ 가 자연수 일 때, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$ 의 서로 다른 모든 값의 합을 구한 것은?[2)]

① $14\sqrt{6}$ ② $15\sqrt{6}$ ③ $16\sqrt{6}$
④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $16\sqrt{3}$

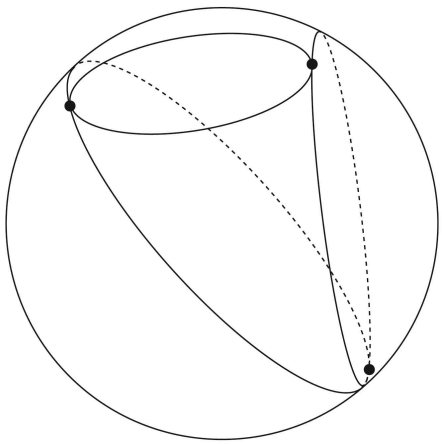
<이과용2>

3. 좌표공간에 있는 세 평면

$$\alpha : x-y+z+7=0$$
$$\beta : 2x+y-z+2=0$$
$$\gamma : ax+by-bz=0$$

에 대하여 두 평면 α와 γ가 이루는 예각을 θ라고 할 때 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

이 좌표공간에 존재하는 어떤 구가 세 평면 α, β, γ에 의해서 잘리는 각각의 단면이 존재하고, 이 세 단면이 아래 그림과 같이 각각 서로 한 점에서 만날 때 가능한 모든 구의 지름의 곱을 k라고 하자. 이때, $2k$의 값을 구하시오. [4점]



1) 해설) 28

함수 $f(x)=x^3-ax+a-11$에 대하여 x에 대한 방정식

$f'(f(x))+a+3=6\int_0^x |t-1|dt$

닫힌구간 $[1,\ 3]$

- 결국 $1\le x\le 3$에서 위의 방정식을 생각하면 된다.

  $f'(x)=3x^2-a$이므로 주어진 방정식을 정리하면

  $3\{f(x)\}^2+3=6\int_0^x |t-1|dt$

  $\Leftrightarrow \{f(x)\}^2+1=2\int_0^x |t-1|dt$ (단, $1\le x\le 3$)

$1\le x\le 3$에서 우변의 식을 정리하면

$2\int_0^x |t-1|dt=(x-1)^2+1$이므로

$\{f(x)\}^2+1=2\int_0^x |t-1|dt$

$\Leftrightarrow \{f(x)\}^2=(x-1)^2$ (단, $1\le x\le 3$)

$\Leftrightarrow f(x)=x-1$ or $f(x)=-x+1$ (단, $1\le x\le 3$)

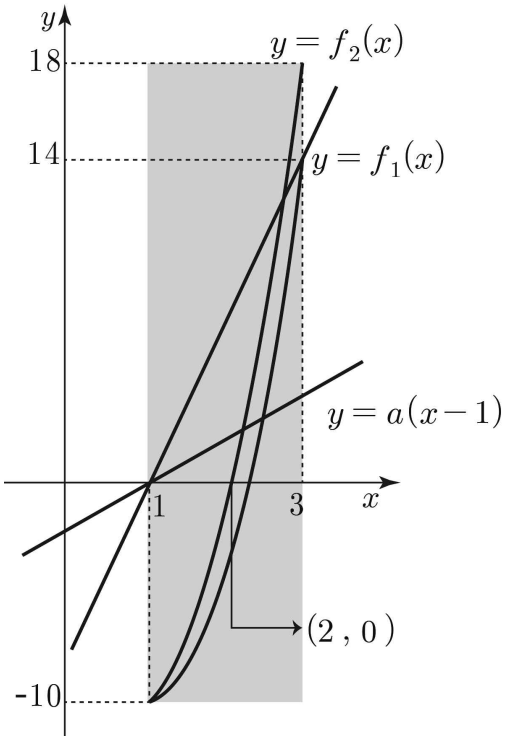
$\Leftrightarrow x^3-x-10=a(x-1)$ or $x^3+x-12=a(x-1)$

(단, $1\le x\le 3$)

이때, 두 함수 $f_1(x)=x^3-x-10$, $f_2(x)=x^3+x-12$는 각각

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 증가하므로 결국 $y=a(x-1)$의 그래프가

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 곡선 $f_1(x)$, 곡선 $f_2(x)$와 직선 $y=a(x-1)$의 교점의 개수가 두 개가 되는 모든 자연수 a값의 합을 구하면 된다.



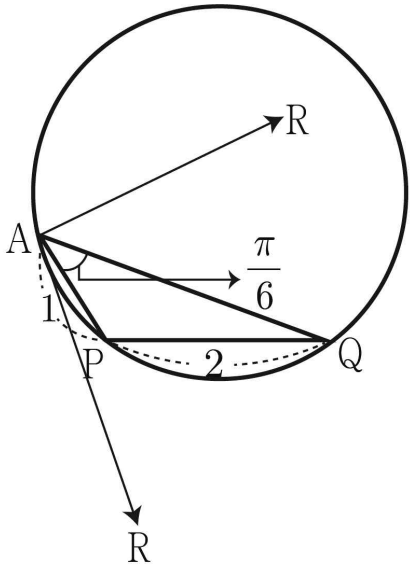
위의 그림과 같이
$a = 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$인 순간에 서로 다른 두 점에서 만난다.
$a = 8$인 순간에는 서로 다른 세 점에서 만난다.
즉, 모든 a값의 합은 28

2) 정답은 ②
내적의 정의와 삼각함수의 덧셈정리를 묻는 문제.
약간의 추론의 과정과 원주각 중심각의 내용이 들어간다.

(나) 조건 $|\overrightarrow{PQ}| = 2$에 의하여 $\angle PAQ = \frac{\pi}{6}$임을 알 수 있다.
(원주각과 중심각)

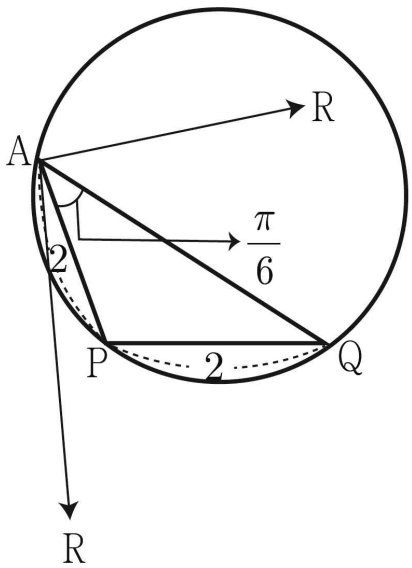
$|\overrightarrow{AP}|$가 자연수이므로 주어진 상황은 아래와 같은 4가지 케이스로 나눌 수 있다.

i) $|\overrightarrow{AP}| = 1$인 경우



위의 그림과 같이 $|\overrightarrow{AR}| = 3$ 이고, $\overrightarrow{AR}$ 와 $\overrightarrow{AR}$ 가 이루는 각은
15° 또는 75° 이다.
그러므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$ 의 값은 $4 \times 1 \times \cos 75^\circ$ 또는 $4 \times 1 \times \cos 15^\circ$

ii) $|\overrightarrow{AP}| = 2$ 인 경우



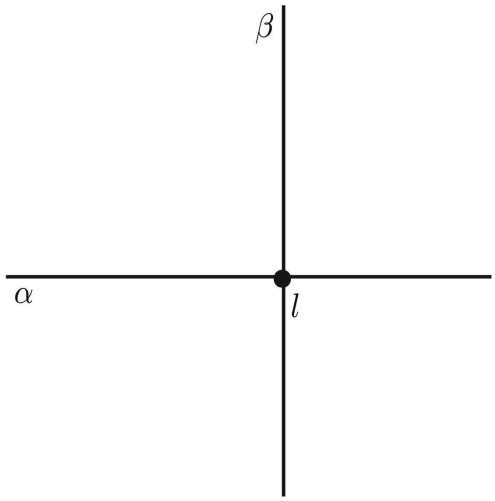
위의 그림과 같이 $|\overrightarrow{AR}| = 3$ 이고, $\overrightarrow{AR}$ 와 $\overrightarrow{AR}$ 가 이루는 각은
15° 또는 75° 이다.
그러므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$ 의 값은 $4 \times 2 \times \cos 75^\circ$ 또는 $4 \times 2 \times \cos 15^\circ$

iii) $|\overrightarrow{AP}| = 3$, $|\overrightarrow{AP}| = 4$ 인 경우도 마찬가지이다.
즉, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$ 의 서로 다른 모든 값의 합은

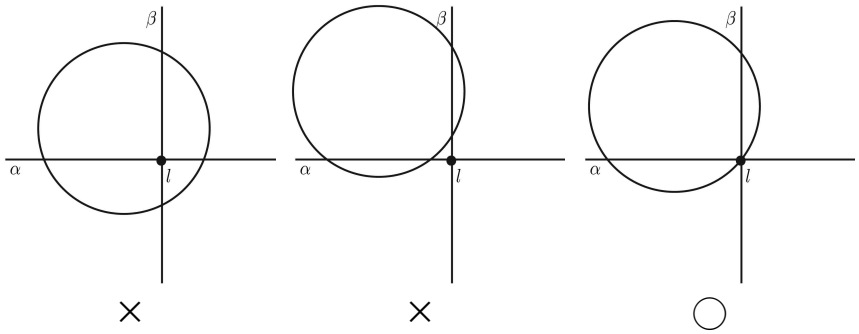
$$\sum_{n=1}^{4} 4n(\cos 75^\circ + \cos 15^\circ) = 15\sqrt{6}$$

3) 정답 : 45

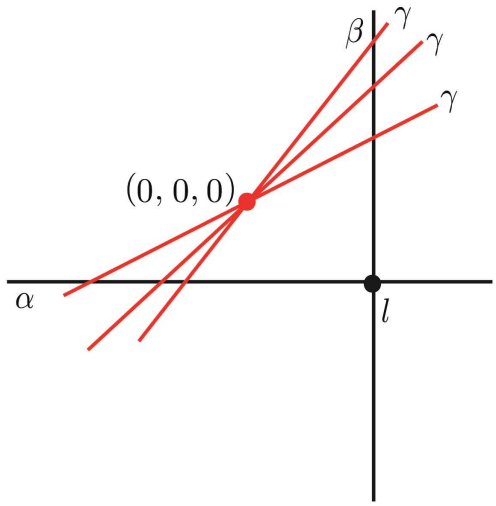
i) 두 평면 α와 β는 서로 수직이다. 그러므로 아래와 같이 '두 평면이 직선으로 보이는 위치'에서 관찰해볼 때 교점처럼 보이는 점은 사실 교선이다. 이 교선을 l이라고 하자.



어떤 구가 평면에 의해서 잘리는 단면은 '원'이고, α와 β에 의해 잘리는 원이 한 점에서 만나려면 구는 아래와 같이 관찰되어야 한다.



ii) 이때 교선 l의 방정식은 $x=-3,\ y=z+4$이고, l의 방향벡터는 $\vec{u}=(0,1,1)$이다. 평면 γ의 법선 벡터 $\overrightarrow{h_3}=(a,b,-b)$에 대하여 $\overrightarrow{h_3}\cdot\vec{u}=(a,b,-b)\cdot(0,1,1)=0$이므로 교선 l과 평면 r는 서로 평행이다. 또한 평면 γ는 원점을 지나므로 아래 그림과 같이 표현된다.

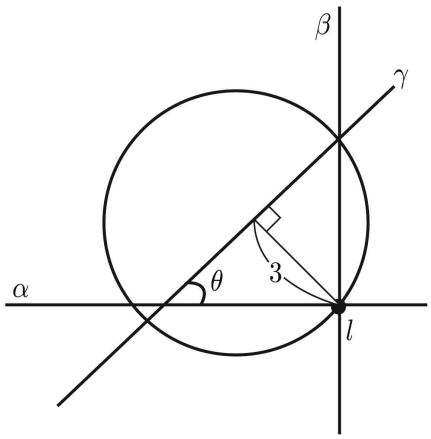


iii) 평면 α와 평면 γ가 이루는 예각 θ에 대하여 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\frac{|a-2b|}{\sqrt{3}\times\sqrt{a^2+2b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow |a-2b| = \sqrt{a^2+2b^2} \Leftrightarrow b^2-2ab=0 \Leftrightarrow b=0 \text{ or } b=2a$$

$b=0$인 경우)

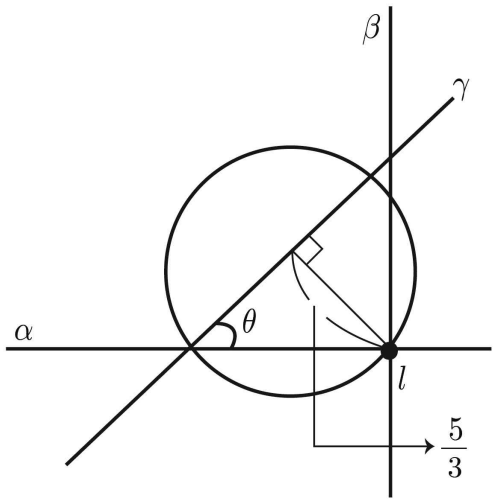
$a \neq 0$ ($a=0$이면 γ는 평면이 될 수 없다.) 평면 γ의 방정식은 $x=0$이다. 교선 l위의 적당한 점 $\mathrm{P}(-3,4,0)$을 잡고, 평면 γ와 점 P 사이의 거리를 구하면 3이고, 문제의 조건을 만족시키는 구는 아래와 같이 그려진다.



즉, 구의 지름의 길이는 위의 그림에서 직각삼각형으로 보이는 삼각형의 빗변의 길이이므로 $\frac{9}{\sqrt{2}}$이다.

$b=2a$인 경우)

평면 γ의 방정식은 $x+2y-2z=0$이다. 역시 $\mathrm{P}(-3,4,0)$와 γ 사이의 거리를 구하면 $\frac{5}{3}$이고, 문제의 조건을 만족시키는 구는 아래와 같이 그려진다.



즉, 구의 지름의 길이는 위의 그림에서 $\frac{5}{\sqrt{2}}$이다.

그러므로 $k=\frac{45}{2}$이고, $2k=45$이다.