01

확률과 통계

고지우의 고집

Theme 접속사 when (~ 때 ~)

개념정리

Theme 접속사 when (~ 때 ~)

문제풀이

1. 문제

세 학생 A, B, C 가 다음 단계에 따라 최종 승자를 정한다.

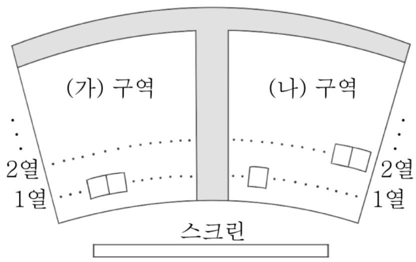
[단계 1] 세 학생이 동시에 가위바위보를 한다.
[단계 2] [단계 1]에서 이긴 학생이 1명뿐이면 그 학생이 최종승자가 되고, 이긴 학생이 2명이면 [단계 3]으로 가고, 이긴 학생이 없으면 [단계 1]로 간다.
[단계 3] [단계 2]에서 이긴 2명 중 이긴 학생이 나올 때까지 가위바위보를 하여 이긴 학생이 최종 승자가 된다.

가위바위보를 2번 한 결과 A 학생이 최종 승자로 정해졌을 때, 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명이었을 확률은?
(단, 각 학생이 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2. 문제

5명의 학생 A, B, C, D, E가 같은 영화를 보기 위해 함께 상영관에 갔다. 상영관에는 그림과 같이 총 5개의 좌석만 남아 있었다. (가)구역에는 1열에 2개의 좌석이 남아 있었고, (나)구역에는 1열에 1개와 2열에 2개의 좌석이 남아 있었다. 5명의 학생 모두가 남아 있는 5개의 좌석을 임의로 배정받기로 하였다. 학생 A와 B가 서로 다른 구역의 좌석을 배정받았을 때, 학생 C와 D가 같은 구역에 있는 같은 열의 좌석을 배정받을 확률은?



① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{5}{36}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

3. 문제

어느 회사의 직원은 모두 60명이고, 각 직원은 두 개의 부서 A, B 중 한 부서에 속해 있다. 이 회사의 A 부서는 20명, B 부서는 40명의 직원으로 구성되어 있다. 이 회사의 A 부서에 속해 있는 직원의 50%가 여성이다. 이 회사 여성 직원의 60%가 B 부서에 속해 있다. 이 회사의 직원 60명 중에서 임의로 선택한 한 명이 B 부서에 속해 있을 때, 이 직원이 여성일 확률은 p이다. $80p$의 값을 구하시오.

4. 문제

주사위를 5번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 라 하자.

$(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_4)(a_4-a_5)\neq 0$ 일 때, $(a_1-a_3)(a_3-a_5)\neq 0$ 일 확률이 $\dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로 소인 자연수이다.)

5. 문제

한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

(가) 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 나온 눈의 수를 점수로 한다.
(나) 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 보다 작으면 한 번 더 던져 나온 눈의 수를 점수로 한다.

시행의 결과로 얻은 점수가 5 점 이상일 때, 주사위를 한 번만 던졌을 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 하자. p^2+q^2 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

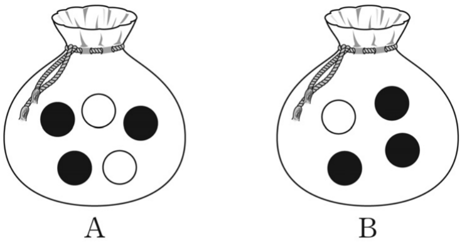
6. 문제

갑, 을, 병 세 사람이 시장 선거에 출마하였다. 갑, 을, 병 세 사람이 당선될 확률이 각각 $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$이고, 당선되었을 때 버스 노선을 개편할 확률은 각각 $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$이다. 선거가 끝난 후 버스 노선이 개편될 확률은?

① 0.23 ② 0.24 ③ 0.37 ④ 0.40 ⑤ 0.45

7. 문제

주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 흰 공이면 흰 공 2개를 주머니 B에 넣고 검은 공이면 검은 공 2개를 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공일 확률은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

8. 문제

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Z=\{0,\ 1\}$에 대하여 조건 (가)를 만족시키는 모든 함수 $f:X\rightarrow Y$ 중에서 임의로 하나를 선택하고, 조건 (나)를 만족시키는 모든 함수 $g:Y\rightarrow Z$ 중에서 임의로 하나를 선택하여 합성함수 $g\circ f:X\rightarrow Z$를 만들 때, 이 합성함수의 치역이 Z일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

(가) X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다. (나) g의 치역은 Z이다.

Theme 배반 & 독립

개념정리

Theme 배반 & 독립

문제풀이

1. 문제

표본공간 S의 부분집합으로 $\mathrm{P}(A) \neq 0$, $\mathrm{P}(B) \neq 0$인 임의의 두 사건 A, B에 대하여, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

[보 기]

ㄱ. A, B가 독립사건이면, 조건부확률 $\mathrm{P}(A|B)$와 $\mathrm{P}(B|A)$는 같다.
ㄴ. A, B가 배반사건이면, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B) \leq 1$이다.
ㄷ. $\mathrm{P}(A \cup B)=1$이면, B는 A의 여사건이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 문제

표본공간 S의 공사건이 아닌 세 사건 A, B, C에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. A, B가 서로 배반사건이고 B, C가 서로 배반사건이면 A, C도 서로 배반사건이다.

ㄴ. A, B가 서로 독립이고 B, C가 서로 독립이면 A, C도 서로 독립이다.

ㄷ. A, B가 서로 배반사건이고 B^C, C가 서로 배반사건이면 A, C는 서로 종속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

Theme 배반 & 독립

문제풀이

3. 문제

두 사건 A, B는 서로 배반사건이고 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}^{\mathrm{C}})=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}^{\mathrm{C}}\cap \mathrm{B})=\frac{1}{4}$ 일 때, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup \mathrm{B})$의 값은? (단, A^{C}은 A의 여사건이다.)

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{11}{20}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{17}{20}$ ⑤ $\frac{19}{20}$

Theme 배반 & 독립

문제풀이

4. 문제

두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A^c)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}$ 일 때, $\mathrm{P}(B|A^c)$의 값은? (단, A^c은 A의 여사건이다.)

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

5. 문제

다음은 어느 회사에서 전체 직원 360명을 대상으로 재직 연수와 새로운 조직 개편안에 대한 찬반 여부를 조사한 표이다.

(단위 : 명)

재직 연수 \ 찬반 여부	찬성	반대	계
10년 미만	a	b	120
10년 이상	c	d	240
계	150	210	360

재직 연수가 10년 미만일 사건과 조직 개편안에 찬성할 사건이 서로 독립일 때, a의 값을 구하시오.

6. 문제

어느 디자인 공모 대회에서 철수가 참가하였다. 참가자는 두 항목에서 점수를 받으며, 각 항목에서 받을 수 있는 점수는 표와 같이 3가지 중 하나이다. 철수가 각 항목에서 점수 A를 받을 확률은 $\frac{1}{2}$, 점수 B를 받을 확률은 $\frac{1}{3}$, 점수 C를 받을 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 관람객 투표 점수를 받는 사건과 심사 위원점수를 받는 사건이 서로 독립일 때, 철수가 받는 두 점수의 합이 70일 확률은?

항목 \ 점수	점수 A	점수 B	점수 C
관람객 투표	40	30	20
심사 위원	50	40	30

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{11}{36}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

7. 문제

정보이론에서는 사건 E가 발생했을 때, 사건 E의 정보량 $I(E)$가 다음과 같이 정의된다고 한다.
$I(E)=-\log_2 \mathrm{P}(\mathrm{E})$ <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 사건 E가 일어날 확률 $\mathrm{P}(\mathrm{E})$는 양수이고, 정보량의 단위는 비트이다.)

[보 기]

ㄱ. 한 개의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나오는 사건을 E라 하면 $I(E)=1$이다.
ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})>0$ 이면 $I(A\cap B)=I(\mathrm{A})+I(\mathrm{B})$이다.
ㄷ. $\mathrm{P}(\mathrm{A})>0$, $\mathrm{P}(\mathrm{B})>0$인 두 사건 A, B에 대하여 $2I(A\cup B)\le I(A)+I(B)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Theme $p' \times n$

개념정리

Theme $p^{'} \times n$

문제풀이

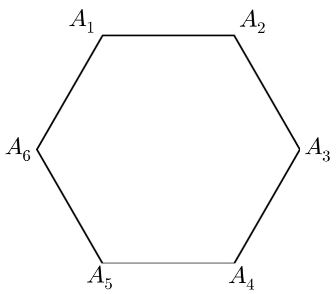
1. 문제

한 개의 동전을 6번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 클 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2. 문제

꼭지점이 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_6인 정육각형 모양의 게임판에서 다음 규칙에 따라 게임이 진행된다.

> 규칙1. A_1을 출발점으로 한다.
> 규칙2. 동전을 던져 앞면이 나오면 시계 방향의 이웃한 꼭지점으로 이동하고 뒷면이 나오면 반시계 방향의 이웃한 꼭지점으로 이동한다.
> 규칙3. A_4에 도달하면 더 이상 동전을 던지지 않고 게임은 끝난다.



동전을 다섯 번 던져서 게임이 끝날 확률은?

① $\frac{7}{32}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{5}{32}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{3}{32}$

3. 문제

3개 팀이 참가한 축구대회에서 한 팀은 바로 결승전에 진출하고 나머지 두 팀이 예선전을 치르려고 한다. 각 팀의 주장 3명이 모여 가위, 바위, 보를 하여 3명 중 1명만 다르게 낼 때, 다르게 낸 1명이 속한 팀이 결승전에 진출하기로 하였다. 한 번의 가위, 바위, 보로 결승전에 진출할 한 팀이 결정될 확률은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

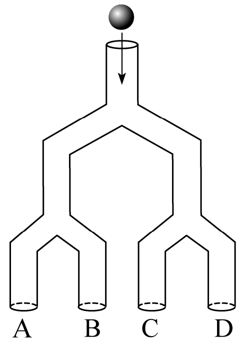
4. 문제

주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

5. 문제

A, B, C, D 4개의 축구팀이 있다. 이들은 각각 다른 모든 팀과 1경기씩을 치르게 되고, 각각의 팀이 경기에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 경기에서 모두 이기거나, 경기에서 모두 진 팀이 생길 확률을 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 자연수)이라 할 때, $m+n$ 의 값을 구하시오.
(단, 비기는 경기는 없다.)

6. 문제



오른쪽 그림은 어떤 오락기를 단순화하여 그린 것이다. 이 오락기는 입구에 공을 넣으면 A, B, C, D 중 어느 한 곳을 지나면서 그 위치의 꺼져 있는 전등은 켜지고, 켜져 있는 전등은 꺼지도록 되어 있다. 예를 들어 전구가 모두 꺼진 상태에서 공을 두 번 넣어 두 번 모두 A를 지나면 A위치의 전등은 켜졌다 꺼지고, 각각 A, B를 지나면 A, B 두 위치에 있는 전등은 모두 켜지게 된다. 이와 같이 공이 지날 때마다 전등이 켜지거나 꺼지기를 반복하다가 A, B, C, D 네 곳 모두 전등이 켜지면 게임은 끝난다. 여섯 번째 공을 넣었을 때 이 게임이 끝나게 될 확률을 $\frac{a}{b}$ (a, b는 서로소인 자연수)라고 하자. 이때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 처음 상태는 전등이 모두 꺼져 있으며, 갈림길에서 양쪽 방향으로 공이 지나갈 확률은 서로 같다.)

7. 문제

좌표평면 위의 한 점 (x, y)에서 세 점 $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x+1, y+1)$중 한 점으로 이동하는 것을 점프라 하자.
점프를 반복하여 점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 모든 경우 중에서, 임의로 한 경우를 선택할 때 나오는 점프의 횟수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $E(X)$를 구하는 과정이다. (단, 각 경우가 선택되는 확률은 동일하다.)

점프를 반복하여 점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 모 든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 $k=$(가)이고, 가장 큰 값은 $k+3$이다.

$$P(X=k)=\frac{1}{N}\times\frac{4!}{3!}=\frac{4}{N}$$

$$P(X=k+1)=\frac{1}{N}\times\frac{5!}{2!2!}=\frac{30}{N}$$

$$P(X=k+2)=\frac{1}{N}\times(\text{나})$$

$$P(X=k+3)=\frac{1}{N}\times\frac{7!}{3!4!}=\frac{35}{N}$$

이고 $\sum_{i=k}^{k+3} P(X=i)=1$ 이므로 $N=$(다)이다.

따라서 확률변수 X의 평균 $E(X)$는 다음과 같다.

$$E(X)=\sum_{i=k}^{k+3}\{i\times P(X=i)\}=\frac{257}{43}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 190 ② 193 ③ 196 ④ 199 ⑤ 202