작성자 : 나카렌(cm518)

2006학년도 대수능 9월 모의평가 수리가형 20번의 풀이에 대하여

세 가지(결국은 두 가지) 풀이를 소개합니다. 크게 직관을 이용하는 방법과 논리적 추론을 이용하는 방법이라 할 수 있는데, 두 방법의 장단점을 잘 살펴보기 바랍니다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다고 합니다.
(가) $f(0)=f(6)=0$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$, $(\gamma, f(\gamma))$ (단, $\alpha<\beta<\gamma$)에서 만나면 k의 값에 관계없이

$$\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$$

또한 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나고 가운데 교점의 x좌표의 값이 4라고 하는군요. 이 때에는 함수 $y=f(x)$를 찾으면 문제풀이가 사실상 끝난 것입니다.

(i) 기하적인 직관을 응용한 풀이

우선, (나)를 볼까요. 이렇게 쓸 수 있습니다.

$$\int_{\alpha}^{\gamma}[f(x)-\{-f(x-k)\}]dx=0$$

이 때 함수 $y=f(x)$에서 평행이동과 x축에 대한 대칭이동(옮기기와 뒤집기)만 해 주면 함수 $y=-f(x-k)$가 됩니다. 이들이 서로 다른 세 점에서 만나므로, 삼차함수로 둘러싸여 있으며 인접하지 않은 부분이 2개가 생길 것입니다. 이 때 위의 적분이 0이라는 것은, 두 부분의 면적이 같다는 것을 의미하죠. 그런데 이는 k의 값에 관계없이 성립합니다. x축을 따라 얼마나 평행이동하든, 서로 다른 세 점에서 만나기만 하면 두 삼차함수로 둘러싸인 두 부분의 면적이 같다는 겁니다.

여기서, **삼차함수 $y=f(x)$의 극대점과 극소점의 중점(삼각함수의 중심부의 중심)이 x축 위에 있지 않다고 하고**(즉 삼차함수의 중심부가 x축에서 바깥쪽으로 치우쳐 있다고 하고) 위의 사실이 성립하는지 생각해봅시다.(직접 그려 보는 게 좋습니다) 평행이동을 하는 건 괜찮은데, x축에 대한 대칭이동을 하는 순간 두 삼차함수의 중심부가 서로 다른 높이에 존재하게 되고, 그러면 모양이 어그러지면서 위의 성질이 성립하지 않는 경우가 나타납니다. 아무래도 이건 삼차함수 $y=f(x)$의 극대점과 극소점의 중점(삼각함수의 중심부의 중심)이 x축 위에 있지 않기 때문에 발생한 것 같군요. 그렇다면 결국, 삼차함수 $y=f(x)$의 극대점과 극소점의 중점(삼각함수의 중심부의 중심)은 x축 위에 있을 수밖에 없고, 함수 $y=-f(x-k)$의 경우도 마찬가지가 됩니다. 그러면, 함수 $y=f(x)$와 x축의 나머지 교점의 x좌표는 3이 될 수 밖에 없겠죠.

이러한 기발한 아이디어(위에서 진하게 한 부분)를 어떻게 생각해 내야 할까요? 일단 두 가지입니다. 삼차함수를 내 손안에 쥐기 위해, 삼차함수의 중심부의 위치를 파악한 뒤 문제풀이를 시작하는 습관을 가지거나, 여러 가지 삼차함수의 개형을 그려 보면서 이러한 아이

디어에 도달하는 방법입니다.

고난이도의 평가원 문제에서는 종종 이런 식으로 아이디어를 요구하기도 합니다. 이에 대해서는 여러 가지 방법이 있겠지만, 일단 제가 이야기하고 싶은 것은 상황에 대한 파악이 되어야 아이디어가 떠오르기 쉽다는 것입니다. 상황에 대한 파악을 하려면 몇 번의 시행착오 또는 몇 가지 예의 검토 등을 해야 할 수도 있습니다. 이런 것까지 해야 하는지에 대하여 의문을 가질 수도 있겠죠. 그런데 이런 저런 시도해 보면서, 상황을 파악하고, 아이디어를 얻는 과정은 분명 수능에서 평가하고자 하는 항목입니다. 그런 만큼, 문제에서 주어진 상황이 이해가 되지 않을 때, 몇 가지 시도나 시행착오를 해 보는 것은 바람직하다고 할 수 있습니다.

이야기가 좀 길어졌네요. 다시 문제로 돌아옵시다. 이번에는 삼차함수 $y=f(x)$의 극대점과 극소점의 중점(삼각함수의 중심부의 중심)이 x축 위에 있는 경우를 생각해 봅시다. 문제에 제시된 그림과 몇 가지 경우를 떠올려 보면, 두 삼차함수 $y=f(x)$와 $y=-f(x-k)$가 y축에 평행한 어떤 직선에 대하여 대칭인 경우들일 것입니다.

두 삼차함수의 극대점과 극소점의 중점이 x축 위에 있는 것과 두 삼차함수가 y축에 평행한 어떤 직선에 대하여 대칭인 것은 직접적인 관련은 일단 보이지 않을 겁니다. 그런데 앞의 성질이 맞으면 뒤의 성질도 맞아 보입니다. 여기서, 우리의 공간 감각을 신뢰하고(?) 과감하게 나아갑시다. 아마, 맞겠죠.

그런데, 문제에 제시된 그래프를 잘 보면, 우리가 풀어야 하는 문제에서는 y축에 평행한 그 어떤 직선은 아무래도 $x=4$인 것으로 보입니다.

여기까지의 과정에 의해, 우리는 두 삼차함수에 대한 많은 정보를 얻었습니다. 이제, 삼차함수의 식을 찾고 문제를 풀어 들어가면 됩니다.

(ii) 두 함수의 그래프가 y축에 평행한 어떤 직선에 대하여 대칭임을 옮기고, 뒤집고, 돌리기를 사용하여 보이기

함수 $y=f(x)$에서 평행이동과 x축에 대한 대칭이동(옮기기와 뒤집기)만 해 주면와 함수 $y=-f(x-k)$가 됩니다. 그런데, 평행이동과 대칭이동은 초등학교 때부터(!) 배워 온 성질입니다.(그때는 옮기기, 뒤집기, 돌리기라는 이름이었죠)

초등학교 때부터(!) 알고 있을지도 모르는 사실이 또 하나 있는데, 이를 고등학교 버전으로 표현하면

'점 P를 지나고 y축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 뒤 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 것'과 '점 P에 대하여 대칭이동시킨 것'은 완전히 같습니다.(초등학교 버전으로 표현하면 세로로 뒤집고 가로로 뒤집은 거나, 반 바퀴 돌린 거나 같다는 것이 됩니다)

이를 일반화하면 다음과 같습니다.

‘y축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 뒤 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동한 것’과 ‘어떤 점에 대하여 대칭이동한 것’은 평행이동만 하면 완전히 같아질 수 있습니다.

그런데 삼차함수 $y=f(x)$는 극대점과 극소점의 중점에 대하여 대칭이니까, ‘점 P에 대하여 대칭이동시킨 것’은 ‘적당히 평행이동한 것’과 같습니다. 또한 ‘점 P를 지나고 y축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 뒤 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 것’은 ‘y축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 뒤 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동하고 다시 적당히 평행이동한 것’과 같으므로,

‘y축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 뒤 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동한 것’과 ‘적당히 평행이동한 것’은 평행이동만 하면 완전히 같아질 수 있습니다.

각각의 경우에서 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동을 해 주면

‘y축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동한 것’과 ‘적당히 평행이동하고 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동한 것’은 평행이동만 하면 완전히 같아질 수 있습니다.

이 때, 위에서 삼차함수 $y=f(x)$의 극대점과 극소점의 중심이 x축 위에 있다는 것을 발견했다고 합시다. 그러면 이 경우에는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동한 것과 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프는 평행이동을 할 필요 없이 바로 같아질 수 있다는 것을 알 수 있고, 따라서 두 삼차함수 $y=f(x)$와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프는 y축에 평행한 어떤 직선에 대하여 대칭입니다.

(iii) 기하적 직관을 최대한 쓰지 않고, 논리적으로 접근하기

그런데, 위에서 불만을 가진 분들도 있을 수 있습니다. 왜 철저히 확인하지 않고 그냥 적당히 넘어가냐는 것이죠. 그렇다면, 철저히 확인해 봅시다.(다만, 이 풀이를 3~4분 만에 만들어낼 수 있는지는 장담할 수 없습니다.) 철저한 확인은 논리와 연역적 추론이라는 도구로, 수학적 배경이론이라는 재료로 가능합니다. 시작합시다.

함수 $y=f(x)$에서 평행이동과 x축에 대한 대칭이동(옮기기와 뒤집기)만 해 주면와 함수 $y=-f(x-k)$가 됩니다. 그런데, 평행이동과 대칭이동은 초등학교 때부터(!) 배워 온 성질입니다.(그때는 옮기기, 뒤집기, 돌리기라는 이름이었죠)

초등학교 때부터(!) 알고 있을지도 모르는 사실이 하나 더 있는데, 이를 고등학교 버전으로 표현하면 ‘점 P를 지나고 y축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 뒤 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 것’과 ‘점 P에 대하여 대칭이동시킨 것’은 완전히 같습니다.(초등학교 버전으로 표현하면 세로로 뒤집고 가로로 뒤집은 거나, 반 바퀴 돌린 거나 같다는 것이 됩니다) 그런데, 삼차함수의 그래프는 항상 극대점과 극소점의 중점에 대

하여 대칭입니다. 그러므로, 삼차함수의 그래프를 한 점에 대하여 대칭시키는 건 그냥 평행이동만 해 준 게 됩니다. 이 때의 평행이동을 구체적으로 표현해 보면, 삼차함수의 그래프의 극대점과 극소점의 중점 C에서 점 P까지의 평행이동을 하고, 같은 크기와 방향으로 한 번 더 한 것이 됩니다.

옮기고, 뒤집고, 돌리랴 정신없는데 말까지 복잡하군요. 말이 복잡하면 정신도 복잡해지니, 이를 나름(?) 간단하게 표현해 봅시다. x축 방향으로 a, y축 방향으로 b만큼 평행이동하는 것을 벡터 (a,b)와 대응되는 평행이동을 하였다고 합시다. 그러면, 이 때의 평행이동은 $\overrightarrow{CP}$의 2배에 대응되는 평행이동입니다. (즉 극대점과 극소점의 중점에 대하여 대칭시키면 평행이동하지 않고 제자리입니다.) 따라서 위의 서술은 아래의 서술로 바꿀 수 있겠죠.

‘삼차함수의 그래프를 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 뒤 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 것’과 ‘삼차함수의 그래프의 극대점과 극소점의 중점을 C라고 할 때, $2\overrightarrow{CP}$에 대응되는 평행이동을 한 것’은 완전히 같습니다.

위의 두 경우에서 각각 한번 더 x축에 평행한 그 직선에 대하여 대칭이동을 합시다. 그러면,

‘삼차함수의 그래프를 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 것’과 ‘삼차함수의 그래프의 극대점과 극소점의 중점을 C라고 할 때, $2\overrightarrow{CP}$에 대응되는 평행이동을 한 것을 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이동시킨 것’은 완전히 같습니다.

다시 두 함수로 돌아갑시다. 극대점과 극소점의 중점 C가 x축 위에 있다면, 점 P를 x축 위의 점으로 보고 위 성질을 적용하여 두 함수가 y축에 평행한 직선에 대칭이 된다는 것을 알 수 있습니다. 극대점과 극소점의 중점 C가 x축 위에 있지 않다면, 점 P를 [극대점과 극소점의 중점 C를 지나면서 x축에 평행한 직선] 위의 점으로 볼 수 있습니다. 그 때는 $y=-f(x-k)$를 y축 방향으로 평행이동을 해 주어야 y축에 평행한 직선에 대칭이 됩니다.

그런데 y축에 평행한 직선에 대칭인 두 삼차함수로 둘러싸인 2개의 부분은 넓이가 같습니다. 이 성질을 이용하면, 극대점과 극소점의 중점 C가 x축 위에 있지 않다면 아래의 식이 성립할 수 없다는 것을 알 수 있습니다.

$$\int_{\alpha}^{\gamma}[f(x)-\{-f(x-k)\}]\,dx=0$$

따라서, 두 삼차함수의 극대점과 극소점의 중점은 x축 위에 있고, 두 삼차함수는 y축에 평행한 직선에 대칭이라는 것을 알 수 있습니다.

(iv) 결론

수학적 배경이론과 논리적 추론을 통해, 우리는 위와 같이 직관적인 사항들을 확인해 볼 수 있습니다. 그러나, 그 과정은 결코 간단하지 않을 수 있습니다. 이 때문에 수학적 배경이론과 논리적 추론을 즐겨 사용하는 이는 적습니다. 그럼에도 이들이 그렇게 하는 이유는, 이러한 방법이 **강력한 확실성**을 제공하기 때문입니다. 확실성이야말로, 수학의 힘입니다.

반면, 우리는 수학을 본격적으로 사용하는 사람들은 아닙니다. 그렇기 때문에, 수학적 배경이론과 논리적 추론으로 '간단히' 도달할 수 있는 사항에서는 그렇게 함으로써 수학의 확실성을 이용하고, 그렇지 않은 부분에서는 우리가 가진 직관을 활용해서 **빠르게** 진행해 나가면 됩니다.(실제로 직관적인 풀이를 작성하는 게 훨씬 빨랐습니다.) 이렇게 직관과 수학적 확실성 두 가지를 잘 활용할 수 있다면, 문제를 더 잘 풀어 나가는 자신을 발견할 수 있을 것입니다.