작성자 : 나카렌

곡선의 길이와 미적분

1. 서론

이제, 곡선의 길이를 구해 보고자 합니다. 그런데, 이야기를 시작하기 전에 몇 가지를 미리 이야기하고 시작하려고 합니다. 이는 앞으로의 이야기를 위한 예고편(?)이기도 합니다.

'곡선의 길이'라는 거창한 이름으로 시작하였지만, 수많은 사람들은 초등학교 다닐 때쯤부터 곡선의 길이를 구할 수 있었습니다. 어떤 곡선이 종이 위에 그려져 있다면, 그 곡선을 따라 실을 대어 보고 곡선의 양 끝과 만나는 실의 양 끝을 잡은 다음, 팽팽하게 펴서 실의 길이를 재면 됩니다. 간단히 말해, 실로 곡선의 길이를 잰다는 거죠.

또한, 여러분들은 극한과 적분을 고등학교 때 배웠다고 생각하겠지만, 아닙니다. 조금 거슬러 올라가면, 함수 $y=\tan x$의 그래프를 그리면서 점근선이라는 것을 배웠을 것입니다. 가령, x가 $\frac{\pi}{2}$보다 아주 약간만 작을 때는 $\tan x$가 아주 크고, x가 $\frac{\pi}{2}$보다 아주 약간만 클 때는 $\tan x$가 아주 작다는 것을 통해, $x=\frac{\pi}{2}$가 $y=\tan x$의 점근선이라는 것을 알게 된 거죠. 잘 생각해 보면, 이는 함수의 극한입니다.

좀 더 거슬러 올라가 봅시다. 직사각형의 넓이는 어떻게 구합니까? 한 변의 길이가 1인 정사각형 몇 개가 들어가는지 세면 됩니다. 평행사변형의 넓이는요? 한쪽 부분을 잘라서 반대쪽에 붙여, 직사각형을 만들어서 구합니다. 삼각형의 넓이는? 똑같은 삼각형을 하나 더 만들고 뒤집어 붙여 주면, 평행사변형이 됩니다. 사다리꼴은? 역시 똑같은 사다리꼴을 하나 더 만들고 뒤집어 붙여 주면 평행사변형이 됩니다. 그런데, 원의 넓이는 이런 식으로 하기에는 무리가 있습니다.

그리고, 초등학교 교과서에서 기괴한(?) 그림이 소개됩니다. 원을 8등분해서(피자 생각납니다) 직사각형 비스무리하게 배열해 봅니다. 하지만 울퉁불퉁하네요. 그러면 16등분하고 배열해 봅시다. 덜 울퉁불퉁해지고 보다 직사각형처럼 생겼습니다. 32등분해보면(아주 큰 원을 그려야 하겠네요) 점점 직사각형을 닮아 갑니다. 64등분하면 더 닮아 있겠지만 이제는 자르는 게 힘이 듭니다. 물론, 이론적으로야 128등분이든, 256등분이든, 512등분이든 가능하겠지만요. 그런데 아무래도, 잘게 자르면 자를수록 직사각형 닮아 가니까 끝없이 계속 자르고 배열하면 직사각형이 될 거 같아 보입니다. 한 변은 반지름과 같을 거고, 다른 변은 원 둘레의 반이 되겠네요. 그래서 원의 넓이는 πr^2입니다.

다시 위의 과정을 돌아보면, 넓이를 구하려고 한없이 잘게 잘라서 구했습니다. 이건 일종의 극한이고, 적분입니다. 더 궁금한 사람들은 반지름이 r인 원에 내접하는 정n각형의 넓이를 구하고, $\lim_{n\to\infty}$를 취해 보세요. 그렇게 해도 πr^2가 얻어집니다. 이렇듯이, 우리가 고등학교 때 배웠다고 생각하는 개념들도 그 단서는 이미 훨씬 전에 제시되어 있었습니다.

이런 이유에서, 지금부터 곡선의 길이에 대하여 살펴볼 때는 위에서 말한 방식, 실으로 길이를 재는 방식을 어떻게 하면 고등학교 버전으로 표현할 수 있을지에 중점을 두고 알아

보고자 합니다.

2. 곡선의 길이를 어떻게 구해야 하나?

일단 곡선의 길이를 구하기 전에, 곡선의 길이가 무엇인지 생각해 봅시다. 두 점 사이의 거리는 아주 쉽게(?) 정의됩니다. 따라서 선분의 길이도 쉽게 정의되죠. 그런데, 곡선의 길이를 재려고 자를 댈 수는 없습니다. 구불구불하니까요. 그럼에도 곡선에게는 길이가 있을 거란 말이죠.

1절에서 말했듯이, 이럴 때는 우리가 지금까지 아는 것을 떠올리면 됩니다. 실을 대고 펴서 길이를 구할 수 있습니다. 다시 말해서, 곡선의 길이 자체를 구할 수 없을지는 몰라도 그 곡선과 길이가 같은 선분을 찾으면 된다는 거죠. 이제, 이 아이디어를 수학적으로 구체화하고자 합니다.

본격적으로 이야기를 시작하기 전에, 곡선과 직선의 뜻부터 수학적으로 확실히 해 두고 넘어가는 게 좋겠습니다. 곡선을 ‘보는’ 여러 가지 방법이 있겠지만, 여기서는 매개변수 t를 통해 보고자 합니다. 즉, 변수 t에 대하여 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 정의될 때를 생각해 보자는 거죠. 조금 더 엄밀하게 말하면, 아래와 같이 말할 수 있습니다.

> 실수 전체의 집합 R의 부분집합(보통은, 닫힌 구간) I에서 좌표평면 위의 점 전체의 집합, 또는 **이차원 위치벡터 전체**의 집합 R^2로의 함수 X가
> $$X(t)=(f(t),\, g(t))$$
> 와 같이 정의될 때 X를 좌표평면 위의 매개화된 곡선, 간단히 곡선이라고 하자.(이 때, 각 성분함수 $f(t)$, $g(t)$가 연속이고, 다시 말해 곡선 $X(t)$가 연속이고, 일대일 대응인 것을 가정한다)

여기서부터는 **점과 위치벡터를 같은 것으로 보겠습니다**. 이 때 문자 t는 시간으로 볼 수 있으므로, 곡선 $X(t)$는 좌표평면 위에서 점이 움직인 자취라고도 볼 수 있습니다. 이렇게 생각한다면, $f(t)$, $g(t)$가 I에서 미분가능할 때, 곡선 $X(t)$는 미분가능하다고 말하고 곡선 $X(t)$의 속도벡터를 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$X'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=(f'(t),\, g'(t))$$

이 때의 속도벡터는 조금 특이하게, 시점이 $X(t)$에 고정된 것으로 보는 벡터입니다. 이와 같은 방법으로 곡선 $X(t)$의 가속도벡터를 정의할 수 있습니다만, 일단은 여기까지 살펴보겠습니다.

위의 정의에 따르면, 직선 또한 곡선의 일종이 됩니다. 그러면 직선은 어떻게 표현하면 될까요? 좌표공간 상의 직선의 방정식처럼, 아래와 같이 표현하면 됩니다.

$$l(t)=(x_0+v_xt,\, y_0+v_yt)=(x_0,\, y_0)+t(v_x,\, v_y)$$

그런데, 조금 더 확장하여, 아래와 같이 정의되는 곡선도 직선입니다.

$$l(t)=(x_0,\, y_0)+h(t)(v_x,\, v_y),\ (\text{단, } h(t)\text{는 연속이고 단조증가인 함수라고 가정})$$

이제, 이야기를 시작하기 위한 준비가 끝난 셈입니다. 그러면 다시 곡선의 길이로 돌아가 보죠. 위에서, '곡선의 길이 자체를 구할 수 없을지는 몰라도 그 곡선과 길이가 같은 선분을 찾으면 된다' 라고 하였습니다. 그러면, 조금 더 일반적으로 생각해서, '두 곡선의 길이가 같다'라는 것을 정의해 볼 수 있습니다.

그런데, 어떻게 정의해야 할까요? 길이는 거리와 비슷하니까, 우선 이러한 정의를 생각할 수 있습니다.

> 닫힌 구간 I에서 정의된 두 곡선 $X(t)$, $\widetilde{X}(t)$에 대하여 닫힌 구간 I 내의 임의의 두 실수 t_1, t_2에 대하여
> $$|X(t_2)-X(t_1)|=|\widetilde{X}(t_2)-\widetilde{X}(t_1)|$$
> 가 성립하면, 두 곡선의 길이를 같다고 한다.

위에서 언급하였다시피, $X(t)$도 $\widetilde{X}(t)$도 벡터이므로 위의 등식의 좌변은 벡터 $X(t_2)-X(t_1)$의 크기 $|X(t_2)-X(t_1)|$를 의미합니다. 그런데, 조금만 생각해보면 이러한 식으로 '두 곡선의 길이가 같다'는 것을 나타낼 수는 없습니다. 가장 간단한 반례로, $I=[0,\pi]$, $X(t)=(\cos t, \sin t)$, $\widetilde{X}(t)=(\pi t, 0)$를 생각하면 분명 두 곡선 $X(t)$, $\widetilde{X}(t)$의 길이는 같지만 $|X(\frac{\pi}{2})-X(0)|=\sqrt{2}$, $|\widetilde{X}(\frac{\pi}{2})-\widetilde{X}(0)|=\frac{\pi}{2}$입니다. 어디서 문제가 발생하였는지 생각해 보면, 곡선 $\widetilde{X}(t)$가 **굽어져** $X(t)$가 되면서 방향과 거리가 모두 변해 버렸기 때문이라는 것을 알 수 있습니다.

그러면, 어떻게 정의해야 할까요? 두 점이 멀리 떨어져 있으면 위의 경우처럼 굽어지는 과정에서 방향, 거리가 변해 버립니다. 그렇다면, 아주 가까운 경우를 생각하면 될 것입니다. 곡선을 정의하면서 연속이고 일대일 대응이라고 가정하였으므로, 곡선 위의 두 점이 아주 가깝다는 것은 t가 아주 가깝다는 것입니다. 따라서,

> 닫힌 구간 I에서 정의된 두 곡선 $X(t)$, $\widetilde{X}(t)$에 대하여 닫힌 구간 I 내의 충분히 가까운 임의의 두 실수 t_1, t_2에 대하여
> $$|X(t_2)-X(t_1)|=|\widetilde{X}(t_2)-\widetilde{X}(t_1)|$$
> 가 성립하면, 두 곡선의 길이를 같다고 한다.

라고 정의해 볼 수 있습니다. 이는 **국소적으로 길이가 같다**는 뜻이라고도 말할 수 있습니다. 그런데, '충분히 가까운'이라는 말은 그럴듯하지만 뭔가 부족해 보입니다. 생각해 보면, '충분히 가까운' 이라는 말은 극한을 다루면서 종종 등장했습니다. 그러므로, 극한을 사용해서 아래와 같이 정의할 수 있습니다.

> 닫힌 구간 I에서 정의된 두 곡선 $X(t)$, $\widetilde{X}(t)$에 대하여 닫힌 구간 I에서 양 끝점을 제외한 구간 I'내의 임의의 실수 t에 대하여

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|X(t+\Delta t) - X(t)|}{|\widetilde{X}(t+\Delta t) - \widetilde{X}(t)|} = 1$$

가 성립하면, 두 곡선의 길이를 같다고 한다.

이제 좀 그럴듯합니다! 그런데 이를 다시 보면, 매개변수의 미분법에서 본 식과 비슷합니다. 그렇다면

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|X(t+\Delta t) - X(t)|}{|\widetilde{X}(t+\Delta t) - \widetilde{X}(t)|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right|}{\left|\frac{\widetilde{X}(t+\Delta t) - \widetilde{X}(t)}{\Delta t}\right|} = 1$$

와 같이 변형할 수 있겠습니다. 그렇다면 아무래도 두 곡선 $X(t)$, $\widetilde{X}(t)$은 미분가능한 곡선이 되어야 깔끔하게 정의할 수 있을 것 같습니다. 추가적으로 두 곡선의 속도벡터의 크기는 항상 0이 아니라고 하구요. 그러면,

닫힌 구간 I에서 정의된 곡선 $X(t)$, $\widetilde{X}(t)$가 미분가능하고 각각의 속도벡터의 크기가 0이 되지 않을 때, 닫힌 구간의 양 끝 점을 제외한 구간 I'내의 임의의 실수 t에 대하여

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|X(t+\Delta t) - X(t)|}{|\widetilde{X}(t+\Delta t) - \widetilde{X}(t)|} = 1$$

가 성립하면, 두 곡선의 길이를 같다고 한다.

라고 정의할 수 있습니다. 이 때, 항상 $|X'(t)| = |\widetilde{X}'(t)|$가 성립한다는 것도 정의에서 알 수 있습니다. 이제 이야기의 주인공이 등장했으니, 이 이야기도 결말을 향해 달려갑니다.

3. 곡선의 길이 구하기

이제, 이 정의를 이용하여 곡선의 길이를 구하여 봅시다. 우리는 곡선의 길이를 구하는 방법은 모르니까(?), 곡선와 길이가 같은 직선을 생각해야 할 것입니다. 따라서, 닫힌 구간 I에서 정의되어 있으며 미분가능하고 속도벡터의 크기가 0이 되지 않는 곡선 $X(t)$에 대하여, 마찬가지로 닫힌 구간 I에서 정의되어 있으며 곡선 $X(t)$과 길이가 같은 직선 $l(t)$을 찾는 것이 우리가 해결해야 할 문제입니다. 그런데, 위에서 살펴본 바에 따라 직선 $l(t)$를

$$l(t) = (x_0,\, y_0) + h(t)(v_x,\, v_y)$$

로 두면,

$$|X'(t)| = |h'(t)|\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

이 항상 성립하면 곡선 $X(t)$과 직선 $l(t)$는 길이가 같습니다. 계산을 간단하게 하기 위하여, ${v_x}^2 + {v_y}^2 = 1$로 두면,

$$|X'(t)| = |h'(t)|$$

가 됩니다. 이제, 직선 $l(t)$의 길이를 구해 보겠습니다. 닫힌 구간 I를 $[t_1,\, t_2]$이라고 두면 직선 $l(t)$의 길이는 아는 바 대로

$$|(l(t_2) - l(t_1)|$$

입니다. 그런데, $l(t) = (x_0,\, y_0) + (v_x h(t),\, v_y h(t))$이므로

$$l(t_2) = l(t_1) + (v_x \int_{t_1}^{t_2} h'(t)dt,\ v_y \int_{t_1}^{t_2} h'(t)dt)$$

이고, ${v_x}^2 + {v_y}^2 = 1$이므로 직선 $l(t)$의 길이는

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} h'(t)dt \right|$$

입니다. 그런데, 위에서 직선의 일반적인 식을 정의할 때 $h(t)$를 단조증가하는 함수로 가정했으므로 $\int_{t_1}^{t_2} h'(t)dt \geq 0$입니다. 따라서, 직선 $l(t)$의 길이는

$$\int_{t_1}^{t_2} h'(t)dt$$

입니다. 직선 $l(t)$와 곡선 $X(t)$가 길이가 같고 $|X'(t)| = |h'(t)| = h'(t)$이므로 곡선 $X(t)$의 길이는

$$\int_{t_1}^{t_2} |X'(t)| dt$$

입니다. 각 성분함수를 $f(t)$, $g(t)$라 하면

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt$$

이고, 각 성분함수를 x, $f(x)$라 하면(즉 곡선 $X(t)$가 $y = f(x)$의 그래프이면)

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$$

가 됩니다. 이것으로, 우리의 자그마한 이야기는 하나의 끝을 맞이합니다.[1]

4. 결론

이와 같은 과정에서 제가 보여 드리고자 하였던 것은, 수학적인 대상을 대하는 방법입니다. 수학에서는 **어떤 두 대상 사이에 특정한 관계가 있을 때 두 대상이 가지는 공통적인 성질 또는 값**에 관심이 많습니다. 예를 들어, 두 삼각형이 합동이면 대응하는 각의 크기와 변의 길이가 같고, 넓이가 같습니다. 좀 더 일반적인 경우에는 한 삼각형에 옮기기, 뒤집기, 돌리기(평행이동, 대칭이동, 회전변환)을 유한 번 적용하여 다른 삼각형을 얻었을 때, 두 삼각형의 대응하는 각의 크기와 변의 길이가 같고, 넓이가 같습니다. 이번 경우에서는 두 곡선 사이에 어떤 관계가 있으면 두 곡선의 길이가 같아지게 되는지 고찰하는 것을 통해 곡선의 길이를 구하였습니다.

이와 같은 관계를 알고, 잘 이용할 줄 알면 수학을 통해 수많은 것을 알아낼 수 있습니다.(이번처럼.) 그러나, 이와 같은 관계를 다루는 것은 상당히 추상적인 사고를 필요로 하기 때문에, 고등학교 수학에서는 많이 나타나지는 않고 대학교 수학 곳곳에서 많이 나타나는 편입니다. 그렇다 하더라도, 이러한 관계를 잘 알고 이용할 수 있다는 것은 수학에 대한 '통찰'이 있다는 것이기에, 분명 여러분에게 도움이 된다고 생각합니다. 이 글을 통해, 여러분이 수학에 대한 감각이 한 걸음 나아가기를 바랍니다.

---

1) 그러나, 끝은 새로운 시작입니다. 주역의 63번째 괘는 완성을 의미하는 기제괘이지만, 마지막 괘는 미완성을 의미하는 미제괘입니다. 또는, 함수 $y = \cos x$가 극대점 $(0,1)$에서 출발하여 새로운 극대점이자 한 주기의 끝 $(2\pi, 1)$에 도달했더라도, 그 뒤로도 끝없이 함수의 그래프는 이어집니다.

작성자 : 나카렌

참고문헌

김홍종,『미적분학 1』, 서울대학교출판문화원, 2000
이인석,『선형대수와 군』, 서울대학교출판문화원, 2005
최대호,『미분기하학』, 경문사, 2007