

1.순열과 조합 1) 순열 <EBS수능특강변형>

이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」에 따라 최초 제작일부터 5년간 보호됩니다.
본 콘텐츠의 무단 배포 시, 콘텐츠산업 진흥법에 의거하여 처벌을 받을 수 있습니다.

1. 0부터 9까지의 10개의 정수 중 3으로 나누었을 때 나머지가 0 또는 2인 수 중에서 중복을 허락하여 세 개의 숫자를 뽑아 이를 나열하여 세 자리의 자연수를 만들려고 한다. 이때 만들 수 있는 3의 배수의 개수를 구하시오.

2. 네 개의 숫자 0, 1, 2, 3을 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중에서 0 또는 1이 들어 있는 자연수의 개수는?

- ① 152 ② 160 ③ 168
- ④ 176 ⑤ 184

3. 준수는 휴대전화의 비밀번호 5자리를 다음 규칙에 따라 만들려고 한다.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
*	0	#

- (가) 비밀번호는 숫자 0~9와 특수문자, *, # 모두 사용 가능하다.
- (나) *, #은 중복 사용 가능하다.
- (다) 숫자는 중복 사용할 수 없다.
- (라) 비밀번호의 가운데 세 자리에는 *, 0, #만을 사용한다.
- (마) 숫자 1~9는 비밀번호의 양 끝에 사용하고, 두 숫자의 합은 항상 10이 되어야 한다.

예를 들어 2* *08과 같이 위의 규칙을 적용하여 만들 수 있는 비밀번호의 경우의 수는?

- ① 120 ② 130 ③ 140
- ④ 150 ⑤ 160

4. 어떤 금고의 비밀번호는 세 수 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수이다. 만들 수 있는 비밀번호 중 3의 배수가 아닌 것의 개수를 구하시오.

5. 방정식 $x+y+z=17$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 에 대하여 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하시오.[3점]

6. 방정식 $x+y+z+w=20$ 을 만족시키는 자연수해의 순서쌍 (x, y, z, w) 중에서 x, y 는 홀수이고, z, w 는 짝수인 순서쌍의 개수는?
 ① 100 ② 110 ③ 120
 ④ 130 ⑤ 140

7. 방정식 $x+y+z=15$ 를 만족시키는 2이상의 세 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는?
 ① 45 ② 50 ③ 55
 ④ 60 ⑤ 65

8. 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 세 자연수 a, b, c 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$ 의 세 근은 a, b, c 이다
 (나) $f(x)$ 의 이차항의 계수는 -12 이다.

세 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는?
 ① 51 ② 52 ③ 53
 ④ 54 ⑤ 55

9. 다항식 $(x+a)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 x^4 의 계수가 같을 때, $60a$ 의 값을 구하시오.(단, a 는 양수이다.)[4점]

10. 다항식 $(1+ax)^5$ 의 전개식에서 x^2 의 계수가 1440일 때, 양수 a 의 값을 구하시오. (단, a 는 양수이다.) [3점]

11. $\left(ax + \frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 상수항이 54일 때, 양수 a 의 값을 구하시오. [3점]

12. $\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^n$ 의 전개식이 0이 아닌 상수항을 갖도록 자연수 n 의 값을 정할 때, n 의 최솟값은?
 ① 9 ② 8 ③ 7
 ④ 6 ⑤ 5

정답 및 해설

1) <답> 75

0부터 9까지의 10개의 정수 중 3으로 나누었을 때 나머지가 0인 수를 원소로 하는 집합을 A_0 , 나머지가 2인 수를 원소로 하는 집합을 A_2 라 하면

$$A_0 = \{0, 3, 6, 9\}, A_2 = \{2, 5, 8\}$$

3의 배수인 수가 되려면 각 자리의 숫자를 더한 값이 3의 배수가 되어야 하므로 한 집합에서만 중복하여 3개의 수를 택해야 한다.

(i) 집합 A_0 에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택하는 경우

0, 3, 6, 9에서 3개를 뽑는 중복순열의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

이 중 백의 자리의 숫자가 0일 때, 나머지 두 자리의 숫자를 뽑는 방법의 수는 0, 3, 6, 9에서 2개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$

따라서 3의 배수인 세 자리의 자연수의 개수는 $64 - 16 = 48$

(ii) 집합 A_2 에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택하는 경우

2, 5, 8에서 3개를 뽑는 중복순열의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는 $48 + 27 = 75$

2) <답> ④

(i) 0, 1, 2, 3을 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수

의 개수는 $3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$

(ii) 2, 3을 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는 $192 - 16 = 176$

3) <답> ⑤

(i) 가운데 세 자리를 만드는 경우

$*$, 0, $\#$ 에서 3개를 뽑는 중복순열의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

이 중 숫자 0이 중복 사용된 경우는

000, 00*, 00#, 0*0, 0#0, *00, #00의 7가지이다.

따라서 가운데 세 자리를 만드는 경우의 수는

$$27 - 7 = 20$$

(ii) 양 끝의 두 자리를 만드는 경우

맨 앞의 자리와 숫자 a 와 맨 뒤의 자리의 숫자 b 의 합이 10인 경우의 순서쌍 (a, b) 는 (1, 9), (9, 1), (2, 8), (8, 2), (3, 7), (7, 3), (4, 6), (6, 4)의 8가지이다.

따라서 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $20 \times 8 = 160$

[다른 풀이]

(i) 가운데 세 자리를 만드는 경우

① 0이 사용되지 않는 경우

$*$, $\#$ 에서 3개를 뽑는 중복순열의 수는

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

② 0이 사용되는 경우

0이 들어갈 자리를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

$*$, $\#$ 에서 2개를 뽑는 중복순열의 수는

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

따라서 0이 사용되는 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

①, ②에서 구하는 경우의 수는 $8 + 12 = 20$

4) <답> 18

세 수 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

세 자리의 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

(i) 각 자리의 숫자의 합이 3인 경우는 111로 1개이다.

(ii) 각 자리의 숫자의 합이 6인 경우는 123, 132, 213, 231, 312, 321, 222로 7개이다.

(iii) 각 자리의 숫자의 합이 9인 경우의 수는 333으로 1개이다.

(i),(ii),(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$27 - (1 + 7 + 1) = 18$$

5) <답> 171

$x + y + z = 17$ 의 해 중에서 $x = 2, y = 5, z = 10$ 인 해는 x 가 2개, y 가 5개, z 가 10개 뽑히는 경우와 같다고 생각하자.

따라서 방정식 $x + y + z = 17$ 을 만족시키는 음이 아닌

정수 x, y, z 를 구하는 방법의 수는 x, y, z 의 3개의 문자 중에서 중복을 허락하여 17개를 뽑는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_3H_{17} = {}_{19}C_{17} = {}_{19}C_2 = \frac{19 \times 18}{2 \times 1} = 171$$

6) <답> ③

x, y 는 홀수이고, z, w 는 짝수이므로

$$x = 2x' + 1, y = 2y' + 1, z = 2z' + 2, w = 2w' + 2$$

(x', y', z', w' 은 0이

상의 정수)

로 놓으면

$$2x' + 1 + 2y' + 1 + 2z' + 2 + 2w' + 2 = 20$$

$$\therefore x' + y' + z' + w' = 7$$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 방정식

$x' + y' + z' + w' = 7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍

(x', y', z', w')의 개수와 같으므로

$${}_4H_7 = {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

7) <답> ③

$x' = x - 2, y' = y - 2, z' = z - 2$ 로 놓으면

$$x + y + z = x' + y' + z' + 6 = 15 \text{이므로}$$

$$x' + y' + z' = 9 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 음이 아닌 세 정수 x', y', z' 에 대하여 순서쌍 (x', y', z')의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55$$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로 55이다.

8) <답> ⑤

조건 (가)에서

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

이므로 조건 (나)에 의하여

$$a + b + c = 12$$

$a' = a - 1, b' = b - 1, c' = c - 1$ 로 놓으면

$$a' + b' + c' = a + b + c - 3 = 9 \quad \dots \textcircled{1}$$

이 때 a', b', c' 은 음이 아닌 정수이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c')의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55$$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 55이다.

9) <답> 30

$(x+a)^5$ 의 전개식의 일반항은 ${}_5C_r x^r a^{5-r}$ 이므로 x^3 의 계수는

$${}_5C_3 a^2 = {}_5C_2 a^2 = 10a^2$$

x^4 의 계수는

$${}_5C_4 a = {}_5C_1 a = 5a$$

따라서 $10a^2 = 5a$ 에서 $2a^2 - a = 0$

$$a(2a - 1) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} (\because a > 0)$$

$$\therefore 60a = 60 \times \frac{1}{2} = 30$$

10) <답> 12

$(1+ax)^5$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_5C_r 1^{5-r} (ax)^r = {}_5C_r a^r x^r \text{ (단, } r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

이때 x^2 의 항은 $r=2$ 일 때이므로 x^2 의 계수는

$$\begin{aligned} {}_5C_2 a^2 &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times a^2 \\ &= 10a^2 = 1440 \end{aligned}$$

$$a^2 = 144$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$a = 12$$

11) <답> 3

$\left(ax + \frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_4C_r (ax)^{4-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r a^{4-r} x^{4-2r}$$

이때 상수항은 $r=2$ 일 때이므로 상수항은

$${}_4C_2 a^2 = 6a^2 = 54$$

$$\therefore a^2 = 9$$

$a > 0$ 이므로 $a = 3$

12) <답> ⑤

$\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (x^2)^r \left(\frac{2}{x^3}\right)^{n-r} = {}_nC_r 2^{n-r} x^{5r-3n}$$

이때 상수항을 가지려면 $5r = 3n$ 이어야 한다. 이때 3과 5는

서로소이므로 자연수 n 은 5의 배수이다. 따라서 n 의 최솟값은 5이다.