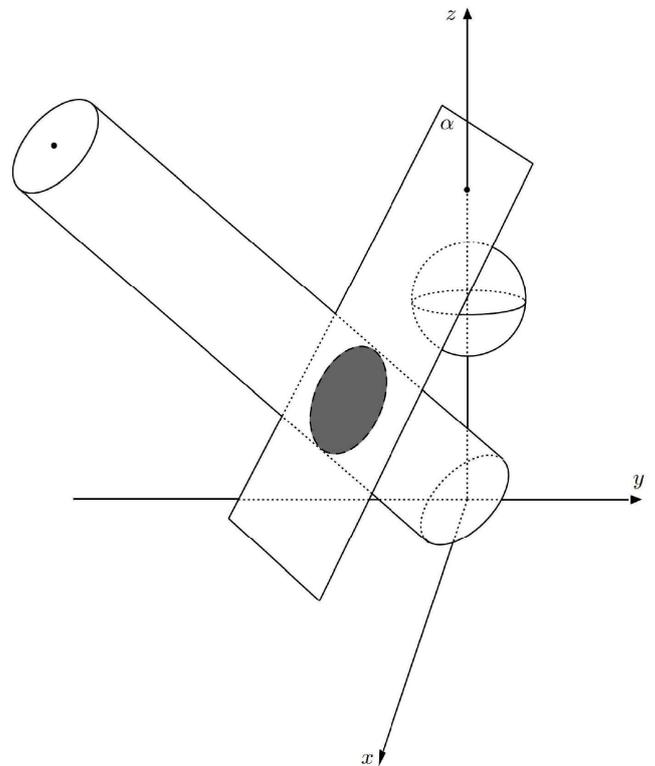




[WP] 001 좌표공간에서 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이고, 원점과 점(12, -12, 12)를 각각 두 밑면의 중심으로 하는 직원기둥이 있다. 구 $x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 4$ 와 접하고 점(0, 0, 10)를 지나 는 평면 α 로 원기둥을 자른 단면의 넓이의 최솟값은?
(단, 원기둥의 두 밑면은 평면 α 와 만나지 않는다.)

- ① $(8 - \sqrt{6})\pi$ ② $(4\sqrt{3} - \sqrt{6})\pi$ ③ $(6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\pi$
- ④ $(9 - 2\sqrt{3})\pi$ ⑤ $(12 - 4\sqrt{3})\pi$





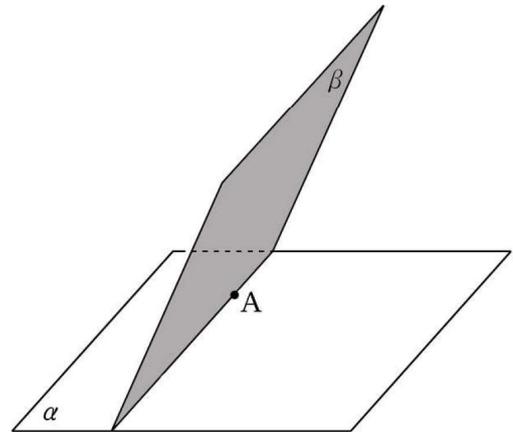
[EBS변형] 002] 다음 그림과 같이, 두 평면

$$\alpha : 2y + \frac{3}{2}z - 3 = 0, \beta : x + y - \frac{1}{2}z = 0 \text{ 이 있다.}$$

점 A, B 는 아래 조건을 만족한다.

- (가) 점 A 는 두 평면의 교선 위에 위치한다.
- (나) $\overline{AB} = 6$
- (다) 직선 AB 와 평면 α 가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

점 B 의 평면 β 위로의 정사영을 Q 라 할 때, 선분 AQ 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 $p + q\sqrt{2}$ 라 할 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라. [4점]





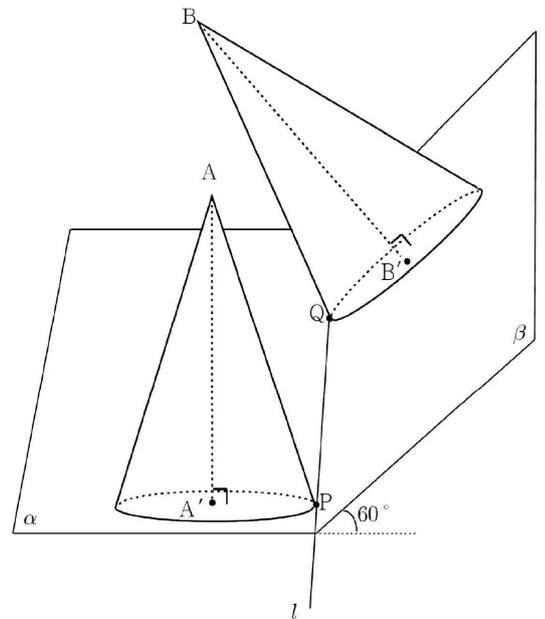
[WP] 003] 모선과 밑면이 60° 의 각을 이루고, 밑면의 반지름의 길이가 서로 같은 직원뿔 T_1, T_2 가 그림과 같이 서로 60° 의 각을 이루는 두 평면 α, β 위에 각각 놓여있다. 두 직원뿔 T_1, T_2 의 밑면의 둘레가 두 점 P, Q에서 각각 두 평면의 교선 l 과 접하고, 두 원뿔의 T_1, T_2 의 꼭짓점을 각각 A, B라 하자. 밑면의 중심을 각각 A', B' 라 할 때, 두 원뿔이 다음조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB} = \sqrt{7}$

(나) 원뿔 T_2 의 밑면의 둘레 위를 움직이는 점 R에 대하여

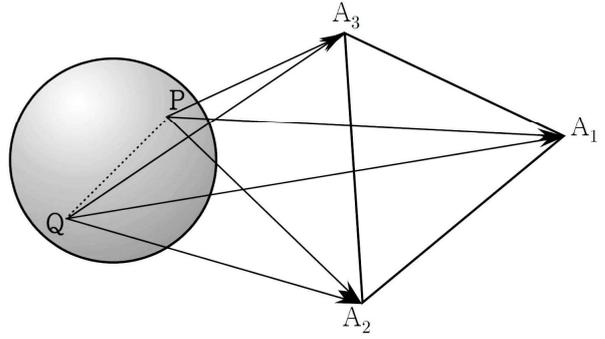
$\overline{A'R}$ 의 값이 최대가 될 때의 $\tan^2 \angle QB'R$ 값은 $\frac{7}{9}$ 이다.

삼각형 ABB' 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S 라 할 때, $4S^2$ 의 값을 구하시오.





[WP] 004] 좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 위의 두 점 P, Q가 $|\overrightarrow{PQ}| = 4$ 를 만족시키도록 움직이고 있다. 넓이가 $6\sqrt{3}$ 인 정삼각형 $A_1A_2A_3$ 의 한 변 A_1A_2 가 직선 $\frac{-x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$ 와 평행하고, 변 A_1A_2 의 중점의 좌표가 $(3, 3, 3)$ 이다. $\sum_{k=1}^3 \overrightarrow{PA_k} \cdot \overrightarrow{QA_k}$ 의 최댓값을 구하시오.

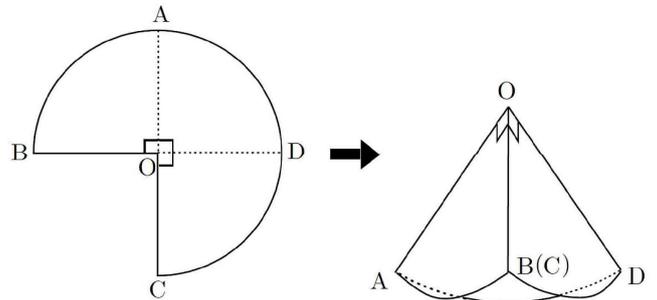




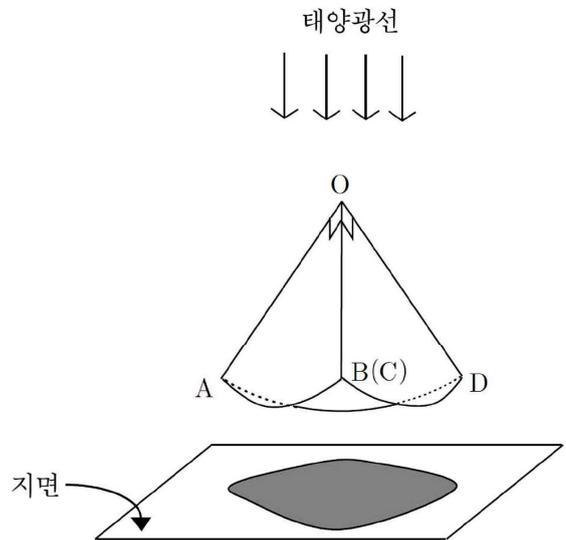
[WP] 005] 그림과 같이 중심이 O이고, 반지름의 길이가 6인 원의 네 사분점을 각각 A, B, C, D라 하고, 부채꼴OBC를 잘라낸 원의 일부가 두 선분 OA, OD를 각각 접는 선으로 하여 두 점 B, C가 서로 일치하도록 접었다. 그림과 같이 접힌 원을 평면ABD와 지면이 서로 평행하도록 고정시키고, 태양광선이 지면과 수직인 방향으로 비출 때, 지면에 생기는 그림자의 넓이는?
 (단, 원은 불투명한 종이 재질이다.)

- ① $6\sqrt{2}\pi$
- ② $18\sqrt{3}\pi$
- ③ $12\sqrt{3}\pi$
- ④ $8\sqrt{2}\pi$
- ⑤ $9\sqrt{3}\pi$

[1단계]

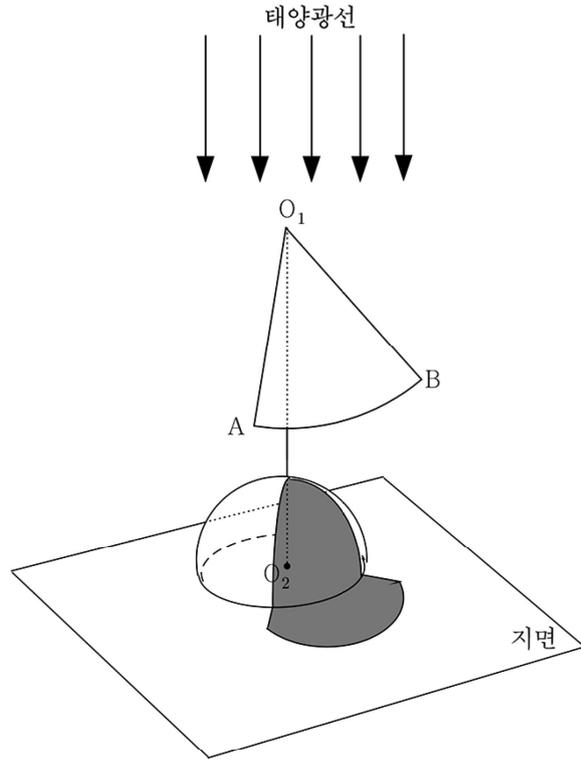


[2단계]





[WP] 006] 그림과 같이 지면으로부터의 거리가 각각 $6\sqrt{2}$ 인 두 점 A, B에 대하여 $\overline{O_1A}=6$, $\angle AO_1B = \frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 O_1AB 모양의 차광막이 있고, 중심이 O_2 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 반구가 지면 위에 놓여있다. 선분 O_1O_2 가 지면에 수직이고, $\overline{O_1O_2}=9\sqrt{2}$ 이다. 햇빛이 지면에 수직인 방향으로 비출 때, 이 차광막에 의해 구면과 지면에 드리워진 그늘의 넓이는?

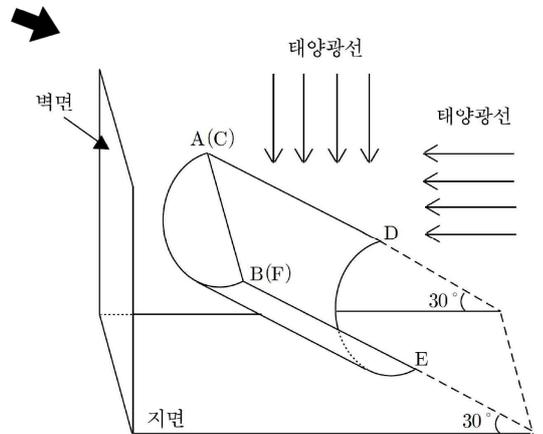
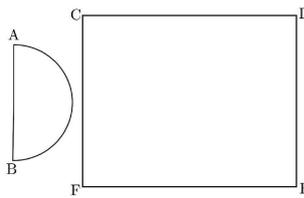


- ① $(2\sqrt{3}\pi - 1)\pi$ ② $(2\sqrt{3} + \frac{1}{2})\pi$ ③ $(2\sqrt{3} + 2)\pi$
 ④ $(2\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3})\pi$ ⑤ $(2\sqrt{3} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{3})\pi$



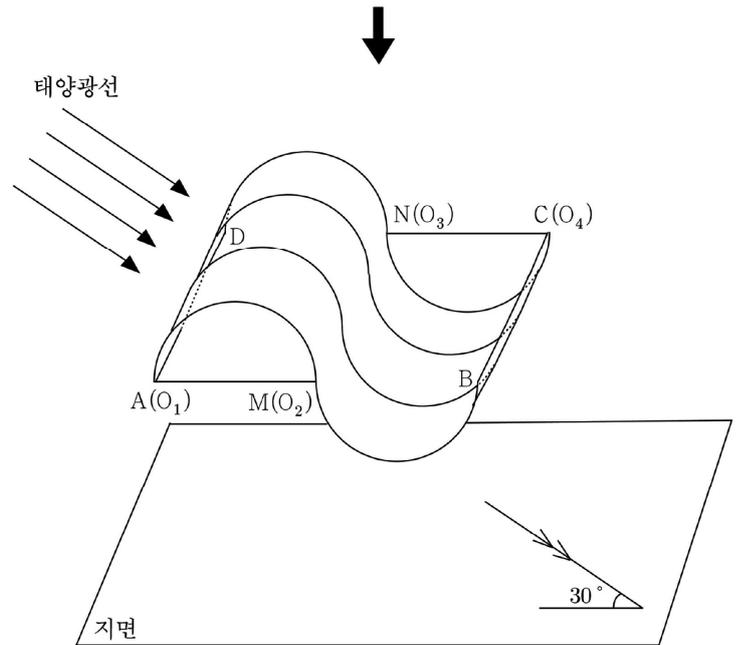
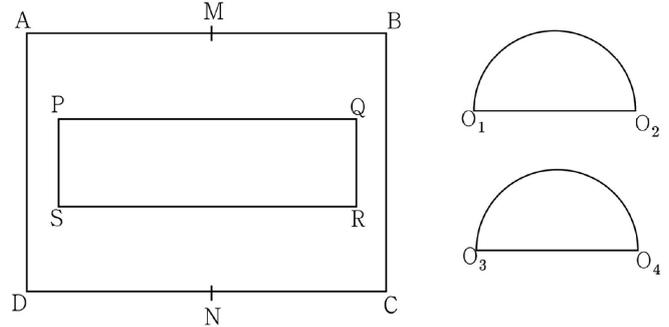
[WP] 007] 그림과 같이 길이가 2인 선분AB를 지름으로 하는 반원모양의 종이가와 $\overline{CD}=5$, $\overline{CF}=\pi$ 인 직사각형CDEF모양의 종이가 있다. 선분CF가 호AB와 일치하도록 그림처럼 직사각형 모양의 종이를 휘어 붙여 놓았다. 그림과 같이 지면과 벽면의 교선이 선분DE와 평행하고, 두 직선AD, BE가 각각 벽면과 수직인 지면과 30° 의 각을 이루도록 종이를 고정시킨다. 태양광선이 지면에 수직으로 비출 때의 지면에 생기는 그림자의 넓이를 S_1 , 벽면에 수직으로 비출 때의 벽면에 생기는 그림자의 넓이를 S_2 라 할 때, $\sqrt{3}S_2 - S_1$ 의 값은?

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$
 ④ $\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi$ ⑤ $5 + \frac{\pi}{2}$





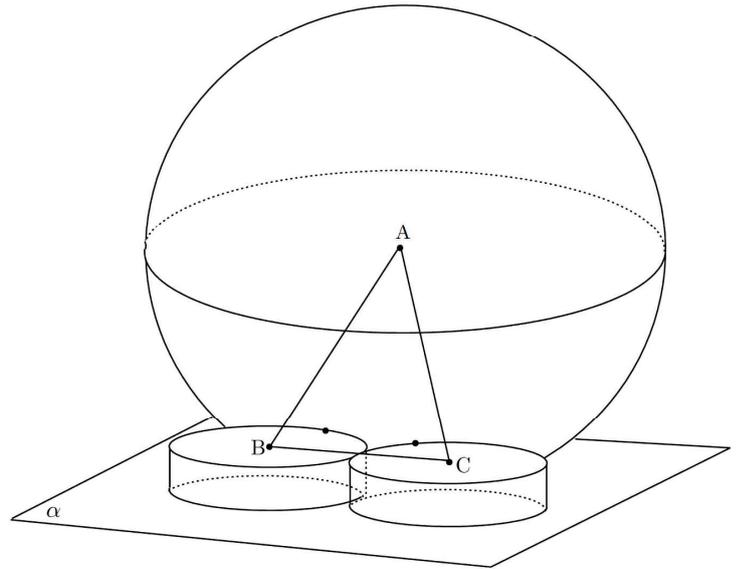
[WP] 008] $\overline{AB}=4\pi, \overline{AD}=9$ 인 직사각형 ABCD 모양의 종이의 길이가 4인 두 선분 O_1O_2, O_3O_4 를 각각 지름으로 하는 반원 모양의 두 원판이 있다. 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 그림과 같이 두 선분 CA, QS의 중점이 서로 일치하고, $\overline{PQ} // \overline{AB}, \overline{PQ} = \frac{10}{3}\pi, \overline{QR} = 3$ 을 만족시키는 직사각형 PQRS의 내부를 오려내어, 선분 AM은 호 O_1O_2 와, 선분 CN은 호 O_3O_4 와 일치하도록 종이를 휘어붙였다. 그림과 같이 평면 ABCD가 지면과 평행하고 태양광선이 직선 BC와 수직하면서 지면과 30° 의 각도를 이루며 비출 때, 지면에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 두 원판은 투명하다.)



- ① 45 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70



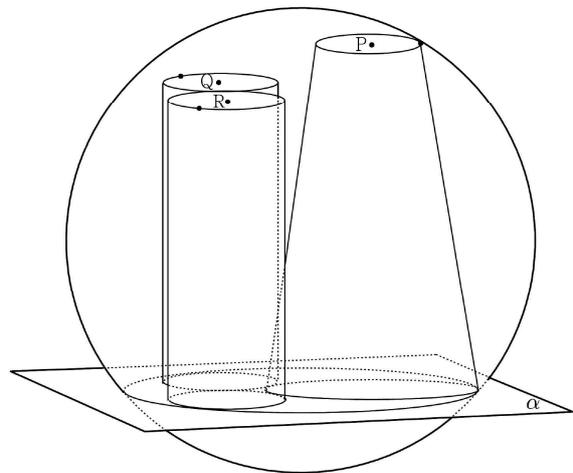
[WP] 009] 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2이고 높이가 1인 두 원기둥이 서로 외접하며 평면 α 위에 놓여있고, 중심이 A인 구 S가 평면 α 와 만나지 않는 두 원기둥의 밑면과 각각 한 점에서 만나며 평면 α 위에 놓여있다. 구 S와 만나는 두 원기둥의 밑면의 중심을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $8\sqrt{2}$ 이다. 구 S의 반지름의 길이가 r 일 때, $6r$ 의 값을 구하시오.
(단, $r > 1$)





[WP] 010] 반지름의 길이가 10인 구가 구의 중심으로부터 거리가 6인 평면 α 와 만나서 생기는 원을 C 라 하고, 그림과 같이 구 내부에 밑면의 반지름의 길이가 각각 $3, 3, r(r > 3)$ 인 두 직원기둥과 직원뿔대의 밑면의 둘레가 서로 외접 하면서 원 C 에 내접하고 있다. 원뿔대와 원기둥의 평면 α 와 평행한 밑면이 각각 구와 한 점에서 만나고, 이 밑면의 중심을 각각 P, Q, R 이라 하자. 원뿔대의 α 와 평행한 밑면의 반지름의 길이가 $\frac{14}{5}$ 일 때, 평면 PQR 이 평면 α 와 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. $36\tan\theta$ 의 값을 구하시오.

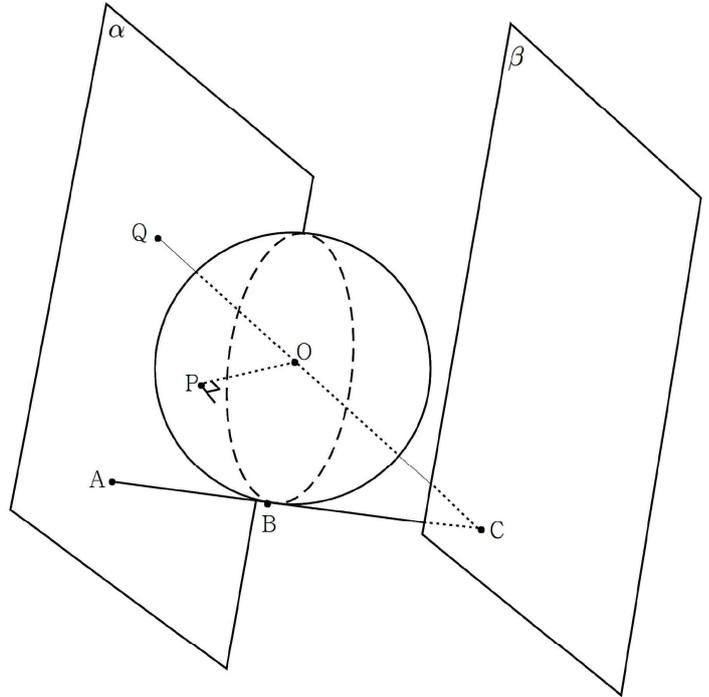
(단, 삼각형 PQR 은 평면 α 와 만나지 않는다.)





[공도백:고난도제] WP-MASTER

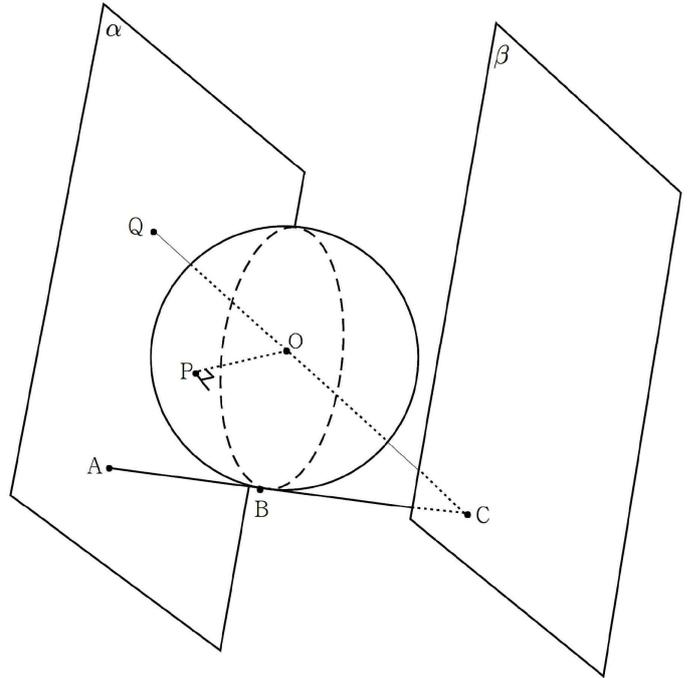
[WP변형문제] 011 좌표공간에서 평면 $\beta: \sqrt{3}y+z=16$ 가 있고, 평면 $\alpha: \sqrt{3}y+z=-8$ 와 구 $S: x^2+y^2+z^2=16$ 이 점 P에서 접한다. 평면 α 위의 점 $A(4, -3\sqrt{3}, 1)$ 에서 구 S에 그은 접선 l과 접점 B에 대하여 $\overline{PB}=4\sqrt{2}$ 를 만족시킬 때, 직선 l과 평면 β 의 교점을 C라 하고 직선 OC와 평면 α 의 교점을 Q라 하자. 평면 PQB와 평면 α 의 이면각을 θ 라 하면, $\tan^2\theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 를 구하여라. (단, O는 원점이다.)





[WP] 012] 좌표공간에서 평면 $\beta: \sqrt{3}y+z=16$ 가 있고, 평면 $\alpha: \sqrt{3}y+z=-8$ 와 구 $S: x^2+y^2+z^2=16$ 이 점 P에서 접한다. 평면 α 위의 점 A(4, $-3\sqrt{3}$, 1)에서 구 S에 그은 접선 l과 접점 B에 대하여 $\overline{PB}=4\sqrt{2}$ 를 만족시킬 때, 직선 l과 평면 β 의 교점을 C라 하고 직선 OC와 평면 α 의 교점을 Q라 하자. 이 때, 점 C와 평면 PQB사이의 거리는? (단, O는 원점이다.)

- ① $\frac{12\sqrt{21}}{7}$ ② $\frac{18\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{24\sqrt{21}}{7}$ ④ $\frac{36\sqrt{14}}{7}$ ⑤ $\frac{40\sqrt{7}}{7}$





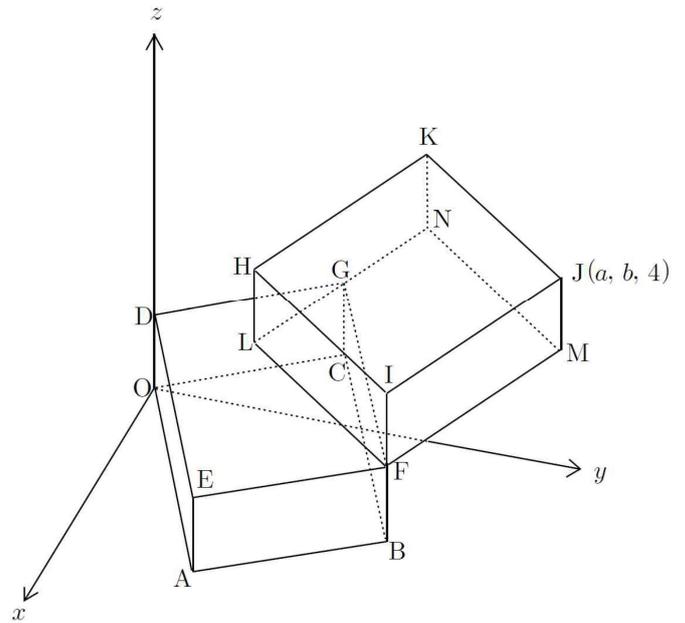
[WP] 013] 좌표공간에 그림과 같이 $\overline{OA} = \overline{IJ} = 4\sqrt{3}$, $\overline{AB} = \overline{MN} = 6$,

$\overline{OD} = \overline{MJ} = 2$ 인 두 직육면체 $OABC-DEFG$, $HIJK-LFMN$ 을 점G가 선분LN의 중점 위에 오도록 서로 붙여놓았다.

면OABC가 xy 평면 위에 있고, 면LFMN이 xy 평면과 평행하다.

점E의 좌표가 $(6, 2\sqrt{3}, 2)$ 이고 점J의 좌표가 $(a, b, 4)$ 일 때, $a+b^2$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)

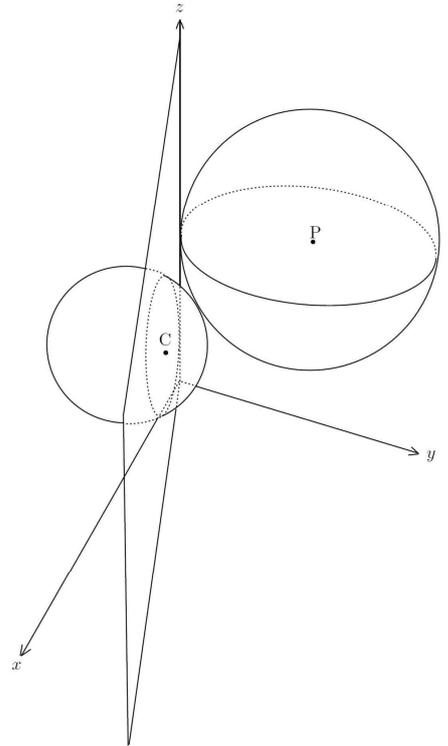
- ① 144 ② 147 ③ 148 ④ 150 ⑤ 152





[WP] 014] 좌표공간에서 구 $S_1 : (x-4)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$ 이

평면 $\alpha : x = \sqrt{3}y$ 와 만나서 생기는 원의 중심을 C라 하고,
반지름의 길이가 6인 구 S_2 의 중심 P의 y 좌표, z 좌표는 모두
2보다 큰 양수이다. 그림과 같이 구 S_2 가 z 축 위의 한 점에서
평면 α 와 접하고, 구 S_1 과 외접하고 있다. 직선 CP가 xy 평면과
이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $48\cos^2\theta$ 의 값을 구하시오.





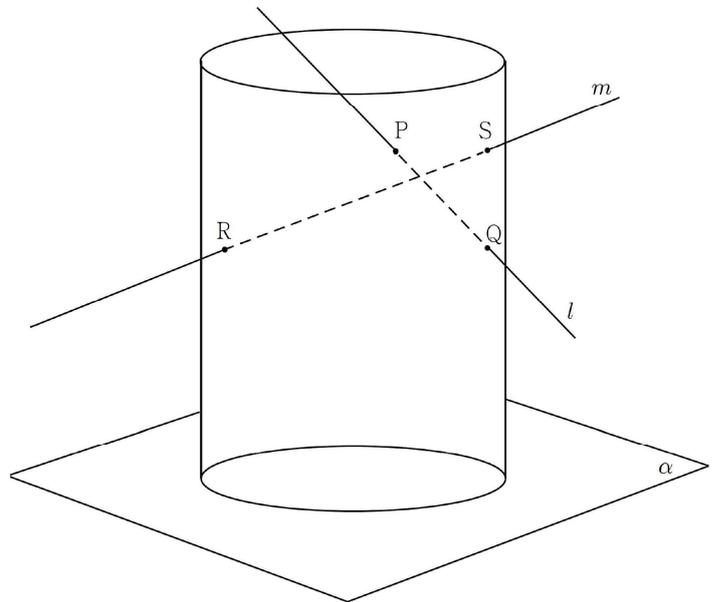
[WP] 016] 그림과 같이 밑면의 지름의 길이가 4인 원기둥이 평면 α 위에 놓여있다. 꼬인 위치인 두 직선 l, m 에 대하여 직선 l 이 원기둥의 옆면과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 m 이 원기둥 옆면과 만나는 두 점을 각각 R, S라 할 때, 네 점 P, Q, R, S가 다음조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{QR} // \alpha, \overline{PS} // \alpha$

(나) $\overline{QS} \perp \alpha, \overline{QS} = 2$

(다) $\overline{PR} = 4, \overline{RS} = \sqrt{20}$

점 R과 평면 PQS사이의 거리를 d , 두 평면 PQR, PQS가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\frac{d^2}{\cos^2 \theta}$ 의 값을 구하시오.





[WP] 017] 좌표공간에서 점 $A(0,0,2\sqrt{2})$ 와 평면 $y=z-4\sqrt{2}$ 위를 움직이는 점 P 가 다음조건을 만족시킬 때, 점 P 가 나타내는 도형의 길이는? (단, O 는 원점이다.)

(가) $|\overrightarrow{OP}|=4\sqrt{2}$

(나) $8 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \leq 12$

① $\frac{2}{3}\pi$

② $\frac{5}{6}\pi$

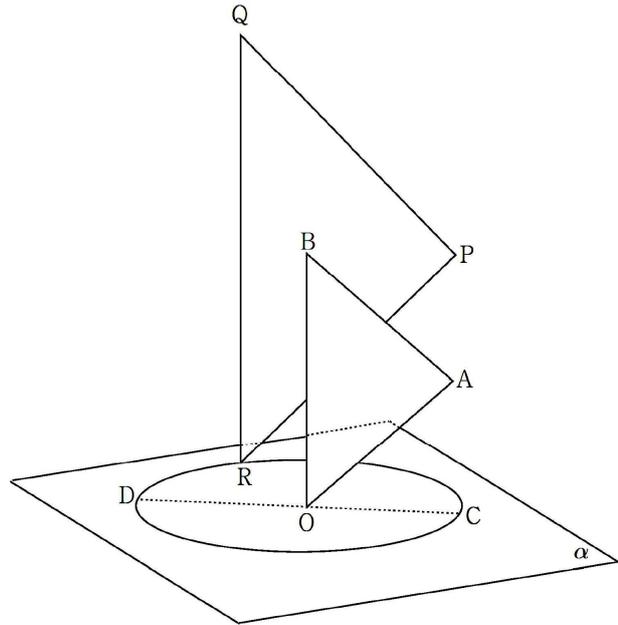
③ π

④ $\frac{4}{3}\pi$

⑤ 2π



[WP] 018] 그림과 같이 길이가 4인 선분CD를 지름으로 하고, 중심이 O인 평면 α 위의 원이 점R을 지나고, $\overline{OA}=\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{PQ}=\overline{PR}=2\sqrt{7}$ 인 두 삼각형 OAB, PQR이 있다. 두 점B, Q의 평면 α 위로의 정사영이 각각 O, R 이고, 두 점A, P의 평면 α 위로의 정사영이 점C이다. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DR}=2$ 일 때, $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{RB} - \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB}$ 의 값을 구하시오. (단, 선분BQ는 평면 α 와 만나지 않는다.)





[WP] 019] 좌표공간에서 다음조건을 만족하도록 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3 를 잡는다.

$$(가) \quad |\overrightarrow{A_0A_1}| = 2\sqrt{3}, \quad \overrightarrow{A_0A_1} \cdot \overrightarrow{A_0A_2} = |\overrightarrow{A_0A_2}| = 6$$

$$(나) \quad \overrightarrow{A_0A_3} \cdot \left(\frac{9}{8}\overrightarrow{A_0A_3} - \overrightarrow{A_0A_k}\right) = |4k - 10| \quad (k = 1, 2, 3)$$

두 평면 $A_1A_2A_3, A_0A_1A_3$ 이 서로 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때,
 $12\tan^2\theta$ 의 값을 구하시오.



[WP변형문제] 020] 평면 α 위에 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 선분 QR 이 있고,
평면 α 위가 아닌곳에 두 점 P, S 가 있다. 두 점의
평면 α 위로의 정사영을 각각 P', Q' 라 하자.

(가) $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{13}, |\overrightarrow{RS}| = 5$

(나) $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = 0, \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{RS} = 0$

(다) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{P'Q} = 9, \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RS'} = 9$

이 때, 직선 PS 와 직선 RS' 의 거리를 l 이라 할 때, l^2 을
구하시오. (단, 선분 $P'S'$ 와 선분 QR 은 한 점에서 만나고,
선분 PS 는 평면 α 와 만나지 않는다.)

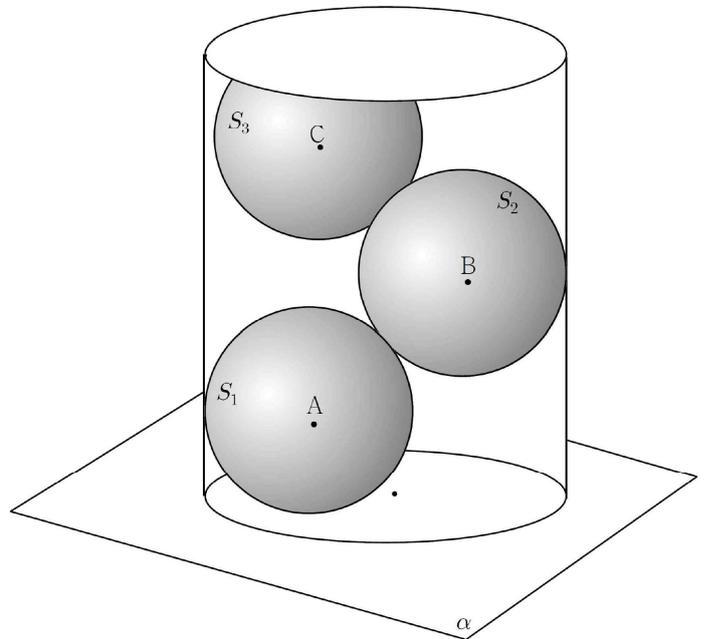


[WP] 021] 밑면의 지름의 길이가 10인 원기둥이 평면 α 위에 놓여있다. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 세 구 S_1, S_2, S_3 가 원기둥의 옆면에 내접하고, 구 S_1 은 구 S_2 와 외접하면서 평면 α 위에 놓여있다. 또, 구 S_3 는 평면 α 와 평행한 밑면과 접하면서 구 S_2 와 외접하고 있다. 세 구 S_1, S_2, S_3 의 중심을 각각 A, B, C라 할 때, 세 점 A, B, C의 평면 α 위로의 정사영 A', B', C' 가 다음조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{B'C'} = \frac{\sqrt{19}}{2}$

(나) 선분 $A'B'$ 의 중점은 원기둥의 밑면의 중심이다.

선분 CA가 평면 α 와 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta$ 의 값을 구하시오.
(단, 두 구 S_1, S_3 는 서로 만나지 않는다.)

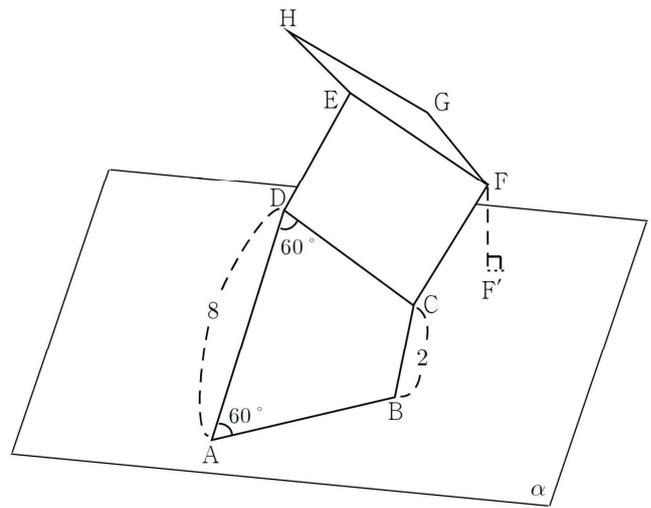




[WP] 022] 그림과 같이 평면 α 위에 $\overline{AD}=8, \overline{BC}=2, \angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$ 인 등변사다리꼴ABCD가 있다. 그림과 같이 점F의 평면 α 위로의 정사영F'가 등변사다리꼴 외부에 있을 때, 선분EF를 공유하는 두 정사각형CDEF, EFGH가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 점G의 평면DEF위로의 정사영은 선분CF의 중점이다.
- (나) 점G의 평면 α 위로의 정사영은 점C이다.

삼각형ADG의 평면DEF위로의 정사영의 넓이를 구하시오.





[WP] 023] 그림과 같이 평면 α 로부터의 거리가 각각 10, 4인 두 점A, B가 있고, 길이가 5인 선분CD가 평면 α 위에 있다. 네 점A, B, C, D가 $\overline{AD}=10$, $\overline{BC}=2\sqrt{7}$, $\overline{BC}\perp\overline{CD}$ 를 만족시킨다. 두 평면ABC, α 의 교선을 l 이라 할 때, 점A와 직선 l 사이의 거리는 d 이다. $\frac{8d^2}{25}$ 의 값을 구하시오.
(단, 선분AB는 평면 α 와 만나지 않는다.)

