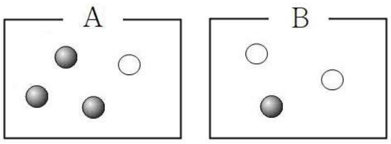
2018학년도 RISE 모의고사

수학 가형 4월 정답표

1	②	2	④	3	③	4	⑤	5	①
6	⑤	7	④	8	①	9	④	10	③
11	②	12	②	13	②	14	⑤	15	③
16	④	17	④	18	⑤	19	③	20	③
21	④	22	15	23	20	24	8	25	6
26	82	27	9	28	79	29	72	30	10

14. 답 : ⑤



문제에서 구하는 상황은

"참가자가 사회자가 선택한 '상자'를 맞출 확률"이다.

참가자가 상자 A로 정답을 맞출 확률은

사회자가 상자 A에서 빨간 공을 꺼내고, 동시에 참가자가 상자 A를 선택해야 하므로

$$\frac{{}_3C_1}{{}_4C_1}\times\frac{{}_1C_1}{{}_2C_1}$$

참가자가 상자 B로 정답을 맞출 확률은

사회자가 상자 B에서 흰 공을 꺼내고, 동시에 참가자가 상자 B를 선택해야 하므로

$$\frac{{}_2C_1}{{}_3C_1}\times\frac{{}_1C_1}{{}_2C_1}$$

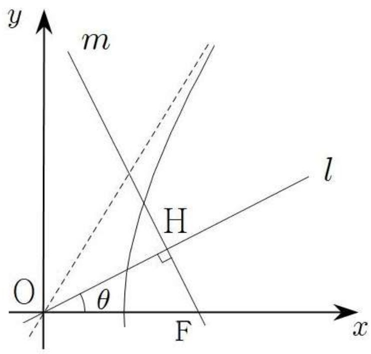
두 경우는 서로 다른 사건이므로
구하는 확률은

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{3}=\frac{17}{24}$$

18. 답 : ⑤

쌍곡선의 방정식이 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$이므로

편의상 제1사분면의 그래프를 그려내면 아래와 같은 상황이 된다.



두 직선 l, m의 교점을 H, 각 FOH의 크기를 θ라 하면

문제의 조건에서 $\overline{\mathrm{OH}}=2\sqrt{5}$
$\overline{\mathrm{OF}}=\mathrm{c}$
$\therefore\ \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{c}$

이때 쌍곡선의 방정식에서 $9+b^2=c^2$이고
제1사분면에서의 점근선의 방정식이 $y=\frac{b}{3}x$
이므로 $\tan2\theta=\frac{b}{3}$

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의해
$\cos2\theta=\frac{40}{c^2}-1$이고

$1+\tan^2 2\theta=\sec^2 2\theta$로부터
$\sec^2 2\theta=1+\frac{b^2}{9}=\frac{9+b^2}{9}=\frac{c^2}{9}$

$\therefore\ \frac{3}{c}=\frac{40}{c^2}-1\ (\because\ c>0)$

$\therefore\ c=5,\ b=4$

구하는 답은 9

21. 답 : ④

$g(x)$의 식을 정리하기 위해 $x-t=s$라 두면 치환적분법에 의해
$g(x)=\int_x^{x+1} te^{-t}f(x-t)\,dt$
$=\int_{-1}^{0}(x-s)e^{-(x-s)}f(s)\,ds$
$=xe^{-x}\int_{-1}^{0}e^s f(s)\,ds-e^{-x}\int_{-1}^{0}se^s f(s)\,ds$이고

부분적분법에 의해
$\int_{-1}^{0}e^s f(s)\,ds=\left[e^s f(s)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^s f'(s)\,ds$
$\int_{-1}^{0}\{se^s\times f(s)\}\,ds$
$=\left[(s-1)e^s f(s)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}(s-1)e^s f'(s)\,ds$

조건 (가)에서 $f(0)=f(-1)=0$ 이고
조건 (나)에서
$\int_{-1}^{0}e^s f'(s)\,ds=-e,\ \int_{-1}^{0}se^s f'(s)\,ds=-e$
이므로
$g(x)=xe^{-x+1}$ 이다.

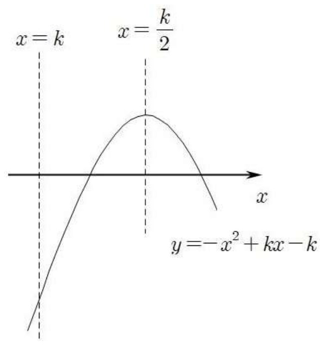
함수 $h(x)=\frac{g(x)}{x-k}$가 $x<k$에서 극값을 갖지 않으므로
$h'(x)=\frac{(e^{-x+1}-xe^{-x+1})(x-k)-xe^{-x+1}}{(x-k)^2}$
$=\frac{(-x^2+kx-k)e^{-x+1}}{(x-k)^2}$ 이고
$e^{-x+1}>0$에서
$-x^2+kx-k=0$인 x가 $x<k$에서 존재하지 않으면 된다.

따라서 두 가지 상황이 존재하게 된다.

(i) $D=k^2-4k\le0$일 때

x의 범위에 관계 없이 항상 $h'(x)<0$이므로
$0\le k\le4$

(ii) $D=k^2-4k>0$일 때



따라서 $h'(x)=0$인 x가 $x<k$에서 존재하지 않기 위한 k의 범위는

$k<\frac{k}{2}$, $-k^2+k\times k-k\leq 0$에서

$k<0$, $k\geq 0$ 이므로

모순.

따라서 (i)에서의 $0\leq k\leq 4$가 문제의 상황을 모두 만족시키는 실수 k의 범위이고

이때 k의 최댓값은 4

26. 답 : 82

아이템 강화를 위해 사용하는 돌 A의 개수를 a, B의 개수를 b, C의 개수를 c라 하면

구하는 경우의 수는

$a+b+c=18$ $(0\leq a,\ b,\ c\leq 10)$

인 정수 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수이다.

따라서 여사건을 활용하기 위해 전체 사건을 $a+b+c=18$ $(a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0)$ 이라 하고, 이 경우에서 적어도 한 종류의 돌을 11개 이상 쓰는 경우의 수를 빼주면 된다.

전체 경우의 수는 ${}_3H_{18}={}_{20}C_2=190$ 이고

두 종류 이상의 돌을 11개 이상 쓸 순 없으므로

한 종류의 돌을 11개 이상 쓰는 경우의 수를 구하려면, 예를 들어 a를 11개 이상 쓴다면

$b+c\leq 7$ $(b\geq 0,\ c\geq 0)$인

정수 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수를 구하면 된다.

이때 $b+c+d=7$ $(b\geq 0,\ c\geq 0,\ d\geq 0)$이라 두면 d의 값에 따라 $b+c\leq 7$인 모든 경우가 존재하므로

$b+c\leq 7$ $(b\geq 0,\ c\geq 0)$인

정수 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는

${}_3H_7={}_9C_2=36$ 이고

11개 이상 쓸 돌을 구하는 경우의 수가 ${}_3C_1$ 이므로

구하는 전체 경우의 수는

$190-3\times 36=82$ 이다.

29. 답 : 72

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H이라 하면, 조건 (가)에서

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HP})\cdot\overrightarrow{AB}$이고

$\overrightarrow{HP}\perp\overrightarrow{AB}$이므로

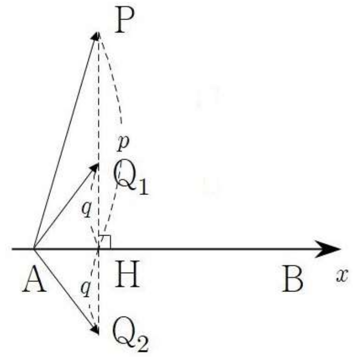
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=4$, $|\overrightarrow{AB}|=4$에서 $H(2,\ 0)$이다.

이때 조건 (가)에서

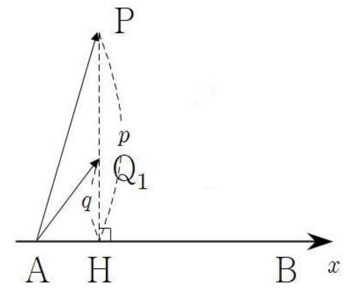
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}=4$ 이므로

점 Q에서 x축에 내린 수선의 발 또한 H이다.

따라서 아래의 두 가지 상황이 존재한다.



(i) $Q=Q_1$일 때



문제에서 서로 다른 세 점 P, Q, R이라 했으므로 조건 (나)에서 피타고라스의 정리에 의해 $0\leq q<p\leq 2$ 이고

조건 (다)에서

$\overrightarrow{BQ_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BR}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}$

$\overrightarrow{BR}=3\overrightarrow{BQ_1}-\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA}$

$\quad=\overrightarrow{BQ_1}+\overrightarrow{AQ_1}+\overrightarrow{PQ_1}$ 이므로

$|\overrightarrow{BR}|^2=|\overrightarrow{BQ_1}|^2+|\overrightarrow{AQ_1}|^2+|\overrightarrow{PQ_1}|^2$

$+2\overrightarrow{BQ_1}\cdot\overrightarrow{AQ_1}+2\overrightarrow{AQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_1}+2\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{BQ_1}$

에서

$\overrightarrow{BQ_1}\cdot\overrightarrow{AQ_1}=(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ_1})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HQ_1})$

$\overrightarrow{AQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_1}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HQ_1})\cdot\overrightarrow{PQ_1}$

$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{BQ_1}=\overrightarrow{PQ_1}\cdot(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ_1})$ 이므로

$|\overrightarrow{BR}|^2=(9+q^2)+(1+q^2)+(p-q)^2$

$+2\times\{1\times 3\times(-1)+q^2\}+2\times q\times(p-q)\times(-1)$

$+2\times(p-q)\times q\times(-1)$

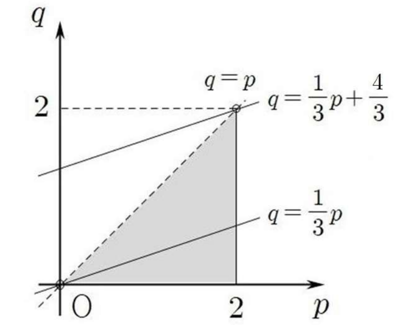
$=(p-3q)^2+4$ 이다.

이때 $0\leq q<p\leq 2$ 이므로

$p-3q=k$라 하면 $q=\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}k$에서 구하는 상황은 k^2의 최대와 최소이므로

아래와 같은 부등식의 영역에서

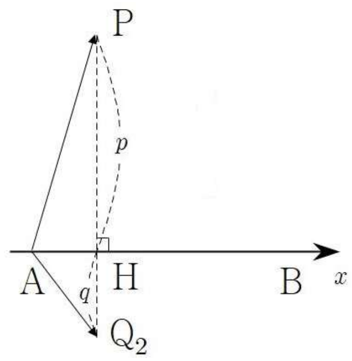
(실선은 포함, 점선은 제외)



k^2의 최댓값은 없고,

최솟값은 $p=3q\neq 0$일 때 0이다.

(ii) $Q=Q_2$일 때



문제에서 서로 다른 세 점 P, Q, R이라 했으므로 조건 (나)에서 피타고라스의 정리에 의해 $0\leq q\leq p\leq 2$ 이고

조건 (다)에서

$\overrightarrow{BQ_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BR}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}$

$\overrightarrow{BR}=3\overrightarrow{BQ_2}-\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA}$

$\quad=\overrightarrow{BQ_2}+\overrightarrow{AQ_2}+\overrightarrow{PQ_2}$ 이므로

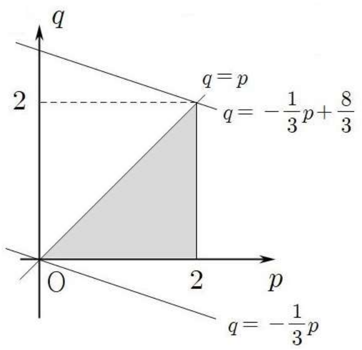
$|\overrightarrow{BR}|^2=|\overrightarrow{BQ_2}|^2+|\overrightarrow{AQ_2}|^2+|\overrightarrow{PQ_2}|^2$

$+2\overrightarrow{BQ_2}\cdot\overrightarrow{AQ_2}+2\overrightarrow{AQ_2}\cdot\overrightarrow{PQ_2}+2\overrightarrow{PQ_2}\cdot\overrightarrow{BQ_2}$

에서

$\overrightarrow{BQ_2}\cdot\overrightarrow{AQ_2}=(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ_2})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HQ_2})$
$\overrightarrow{AQ_2}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HQ_2})\cdot\overrightarrow{PQ_2}$
$\overrightarrow{PQ_2}\cdot\overrightarrow{BQ_2}=\overrightarrow{PQ_2}\cdot(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ_2})$ 이므로
$|\overrightarrow{BR}|^2=(9+q^2)+(1+q^2)+(p+q)^2$
$+2\times(1\times3\times1+q^2)+2\times q\times(p+q)\times1$
$+2\times(p+q)\times q\times1$
$=(p+3q)^2+4$ 이다.

이때 $0\le q\le p\le 2$ 이므로
$p+3q=k$라 하면 $q=-\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}k$에서
구하는 상황은 k^2의 최대와 최소이므로
아래와 같은 부등식의 영역에서
(실선은 포함)



k^2의 최댓값은 $p=q=2$일 때 64,
최솟값은 $p=q=0$일 때 0이지만 이때 그림에서 P=Q=H 이므로 서로 다른 세 점이라는 조건에 모순이다.

따라서 구하는 $|\overrightarrow{BR}|^2$의 최댓값은
(ii)에서 68, 최솟값은 (i)에서 4이다.

$\therefore\ M+m=72$

30. 답 : 10

조건 (나)를 통해 사차함수 $f(x)$를 구하자.

문제에서 $f(0)=1$,
조건 (가)에서 $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)\ln f(x)}{x^2}$
$=\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)}{x}\times\frac{\ln f(x)}{x}$
$=\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1}\times\frac{\ln\{1+f(x)-1\}}{f(x)-1}$
$\times\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 에서

$f(x)$는 실수 전체에서 미분가능하고
$f(0)=1$에서 $\lim_{x\to0}f(x)=1$이므로
$\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1}$, $\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)-1\}}{f(x)-1}$,
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 모두 수렴한다.

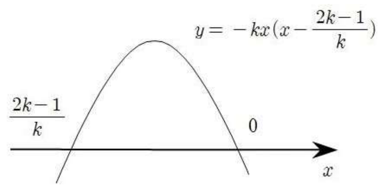
따라서
$\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)\ln f(x)}{x^2}=f'(1)\times1\times f'(0)=0$
이고
조건 (가)에서 $f'(0)=-1$이므로
$f'(1)=0$이다.

최고차항의 계수가 k인 사차함수 $f(x)$를
$f(x)=(x-1)^2(kx^2+lx+m)$ 이라 하면
$f(0)=1,\ f'(0)=-1$에서
$l=1,\ m=1$
$\therefore\ f(x)=(x-1)^2(kx^2+x+1)$이다.

따라서 $g(x)=(kx^2+x+1)e^{-x}$이다.

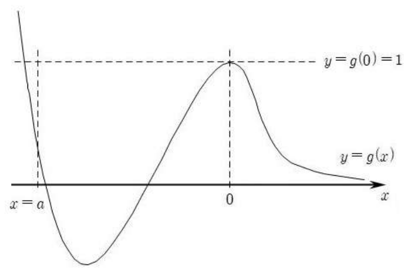
조건 (다)에서
구간 $[a,\ \infty)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(0)$이 성립하려면
$x\ge a$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $g(0)$이어야 하고
최대, 최소의 정리에 의해
함수 $g(x)$의 최댓값은 구간의 끝값 또는 극대이어야 하는데
조건에서 $a<0$ 이므로
$g(0)$은 최댓값이자 극댓값이다.

따라서 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가져야 하므로
$g'(x)=-kx(x-\frac{2k-1}{k})e^{-x}$에서 k는 양수,
$g'(x)=0$인 x값은 0 또는 $\frac{2k-1}{k}$ 이므로
그림과 같은 상황이어야 $g(x)$가 $x=0$에서 극대이다.



따라서 $\frac{2k-1}{k}<0$에서 $0<k<\frac{1}{2}$ 이다.

$\lim_{x\to\infty}g(x)=0$에서
함수 $y=g(x)$의 그래프는 아래와 같다.
(아래 그래프에서 극솟값과 0과의 대소 관계는 문제의 상황에 영향을 주지 않는다.)



따라서 $x\ge a$에서 함수 $y=g(x)$의 최댓값이 $g(0)$이기 위한 a가 최소일 때는
$g(a)=1$일 때이다.

이때 $(ka^2+a+1)e^{-a}=1$에서
$k=\frac{e^a-a-1}{a^2}$이고
이때의 a 값이 $a=h(k)$이므로
$h^{-1}(a)=k$
$\therefore\ h^{-1}(a)=\frac{e^a-a-1}{a^2}=F(a)$라 하면
$F(h(k))=k$에서 역함수의 미분법에 의해
$F'(h(k))\times h'(k)=1$
$F'(a)=\frac{(e^a-1)a^2-(e^a-a-1)\times2a}{a^4}$
$=\frac{(a-2)e^a+a+2}{a^3}$

$\therefore\ h'(k)=\frac{1}{F'(h(k))}$에서
$a=-1$일 때 $k=\frac{e^{-1}-(-1)-1}{(-1)^2}=\frac{1}{e}$이고
$h'(\frac{1}{e})=\frac{1}{F'(-1)}=\frac{-1}{(-3)e^{-1}+1}$이므로
$\frac{1}{h'(\frac{1}{e})}=\frac{3}{e}-1$에서 $p=3,\ q=-1$

따라서 구하는 값은 10 이다.