수학 영역 (가형) ★ 해설

★ 1페이지

1. **답** ⑤ 2

2. $e^{2x}-1$이 아님! (2번 문제에 함정파는 인성) **답** ① -1

3. 재밌다 **답** ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. **답** ② $\frac{1}{\ln 2}$

5. **답** ② 2

6. 3+3+3+3+3 = 3+3+3+2+2+2 = 3+2+2+2+2+2+2 **답** ③ 3

7. 표를 그려서 조건부확률을 푼다 **답** ② $\frac{1}{3}$

★ 2페이지

8. $x>0$이므로 양변을 x로 나누면 $|\sin x|=\frac{1}{2}$ **답** ⑤ 8

9. $x=e^{y}$로 해서 y축 적분하면 $S(k)=e^{k}-e$ **답** ③ 6

10. $x^2-2x=2y$ 하고 완전제곱식으로 정리하면 (1, 0) **답** ④ 1

11. $\sec\theta=3$ 놓고 직각삼각형을 그려서 $f'(\theta)=\sec\theta\tan\theta$를 구하고 역수. **답** ① $\frac{\sqrt{2}}{12}$

12. $\sin\frac{\theta}{2}$랑 $\cos\frac{\theta}{2}$ 구한 다음 배각 공식 사용. **답** ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

★ 3페이지

13. 출제의도 : 공간벡터 + 등비수열

<table>
<tr><th>점</th><th>좌표</th><th>길이 l_n</th></tr>
<tr><td>A_1</td><td>$(1, 2, 4)$</td><td rowspan="4">) $4-\frac{1}{2}$
) $2-\frac{1}{4}$
) $1-\frac{1}{8}$
$\cdots$</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>$(1, 2, \frac{1}{2})$</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>$(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$</td></tr>
<tr><td>A_4</td><td>$(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$</td></tr>
</table>

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n=(4+2+1+\cdots)-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)=4+2+1$$

답 ⑤ 7

14. 출제의도 : 미분과 항등식 (난이도 중)

$\int_0^x (x-2t)f(t)dt=x^3+ax^2+bx+c$로 놓는다.

0 대입 → $c=0$

전개하고 x를 밖으로 빼서 미분한다.

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=3x^2+2ax+b$

0 대입 → $b=0$

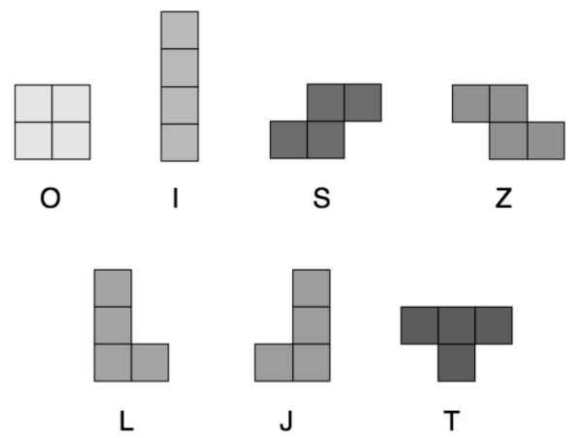
미분한다.

$f(x)-f(x)-xf'(x)=-xf'(x)=6x+2a$

0 대입 → $a=0$

따라서 $f'(x)=-6$이고 $f(0)=0$이므로 $f(x)=-6x$ **답** ① -6

15. 출제의도 : 네가 테트리스를 아느냐?



(귀찮아서 인터넷에서 테트리스 이미지를 퍼왔다)

먼저 타일 4개를 붙이는 모양을 결정한 다음, 색깔 4가지를 그 위에 배열한다. 모양은 위 그림과 같이 7가지가 있다. S, Z와 같이 뒤집으면 서로 다른 모양이 되는 경우가 있다는 걸 주의하자.

위 그림에서 'O' 모양에 색깔 4가지를 배열하는 방법은 원순열로 3!=6가지.

I, S, Z는 180도를 돌리면 같으므로 각각 4!을 2로 나눈 12가지. L, J, T는 돌려서 같은 모양이 나오는 경우가 없기 때문에 24가지.

따라서 6 + 3*12 + 3*24 = 114 **답** ④ 114

16. 출제의도 : 부채꼴 + 음함수의 미분

반지름을 r이라 하면 중심각이 x이므로 넓이가 $\frac{1}{2}r^2x=y$

$\therefore r=\sqrt{\frac{2y}{x}}$

부채꼴 둘레의 길이 = 호의 길이 + 반지름 2개의 길이

$=rx+2r=\sqrt{2yx}+2\sqrt{\frac{2y}{x}}=\sqrt{2y}\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

$f(x,y)=6$에서 $\sqrt{2y}\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=6$

x, y 모두 양수이므로 양변을 제곱하여도 같은 식이다.

$\rightarrow\ 2y\left(x+4+\frac{4}{x}\right)=36$, $\ y\left(x+\frac{4}{x}+4\right)=18$

$x=1$을 대입하면 $y=2$.

접선의 기울기 구하기 위해 미분한다.

$\frac{dy}{dx}\left(x+\frac{4}{x}+4\right)+y\left(1-\frac{4}{x^2}\right)=0$

$x=1,\ y=2$를 대입하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}$ **답** ⑤ $\frac{2}{3}$

★ 4페이지

17.

(가) 구하기 :

위치가 1인 지점을 선택했으면 나머지 하나는 $2\sim9$ 중에서 고르면 되므로 8가지, 위치가 9인 지점을 선택했으면 나머지 하나는 $1\sim8$ 중에서 고르면 되므로 8가지. 그런데 1이랑 9를 선택하는 게 양쪽에 다 포함되니까 1가지를 뺀다. 여기까지 15가지.

그 다음은 1이나 9는 안 고르고서 두 지점의 차가 1이 되게 고른다. (2,3) (3,4) (4,5) (5,6) (6,7) (7,8) 6가지가 가능.

따라서 (가) = 15 + 6 = 21.

(나) 구하기 :

6, 2, 2를 배열하는 경우의 수 3가지.

5, 3, 2를 배열하는 경우의 수 6가지.

4, 4, 2를 배열하는 경우의 수 3가지. 다 더하면 12가지.

확률질량함수를 이용하면 $E(X)=\frac{3}{2}$이다.

$\frac{a-b}{c}=(21-12)\times\frac{2}{3}=6$.

답 ③ 6

18. 출제의도 : 법선벡터와 정사영 정확한 이해.

C_2는 xy평면에 있는 타원인데 장축이 x축과 이루는 각도가 30°라는 것을 알 수 있다. 따라서 타원의 단축이 x축과 이루는 각도는 60°이다.

평면 α의 법선벡터를 xy평면에 정사영시키면 타원의 단축과 평행하게 된다. 따라서 법선벡터를 (n,m,k)라고 하면 $m=\pm\sqrt{3}n$이고, n을 1로 가정하면 $(1,\pm\sqrt{3},k)$라고 할 수 있다.

이제 나머지 조건을 활용해 평면의 방정식을 구한다. 평면 α와 xy평면이 이루는 각이 45°이므로 $\cos45^\circ=\left|\frac{k}{\sqrt{1+3+k^2}\sqrt{1}}\right|$에서 $k=\pm2$이다. 따라서 평면 α의 방정식은 $x\pm\sqrt{3}y\pm2z=c$이고, $(0,0,3)$이 평면 α 위의 점이므로 이를 대입하면 $c=\pm6$이다.

$\therefore a^2+b^2+c^2=3+4+36=43$ **답** ② 43

★ 5페이지

19. 출제의도 : $\frac{\alpha}{\theta}$ 변형시키기

선분 AB의 중점을 O라고 하면 $\angle COB=2\theta$, $\angle EOB=2\alpha$이다.

$\overline{OD}=\cos2\theta$, $\overline{DF}=\frac{1-\cos2\theta}{2}$

$\overline{EF}=\sqrt{\overline{OE}^2-\overline{OF}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2}$

$\theta\to0$이면 $\alpha\to0$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\alpha}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\alpha}{2\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\alpha}{2\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{EF}}{2\theta}\ \left(\because\lim_{2\alpha\to0+}\frac{\sin2\alpha}{2\alpha}=1\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{\left(1-\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)\left(1+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)}}{2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1-\cos2\theta}{2\theta^2}\right)\left(\frac{3+\cos2\theta}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{1\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

★계산이 더러운데 꿀팁 없나요??? 바로 반각 공식!!!!

$\frac{1+\cos2\theta}{2}=\cos^2\theta$ 이다!! 이렇게 하면 한 30% 쉬워진다!

20. 출제의도 : 곡선의 길이 구하기, 매개변수 잘 이용하기

주어진 곡선과 $y=mx$가 $(k\cos k, k\sin k)$ $(0<k\le\pi)$에서 만난다고 하자. 이때 $mk\cos k=k\sin k$에서 $m=\tan k$이다. 또 $0\le t\le k$일 때 주어진 곡선의 길이를 $g(k)$, 두 점 $(0,0)$과 $(k\cos k, k\sin k)$사이의 거리를 $h(k)$라 할 때 $f(m)=g(k)+h(k)$이다.

주어진 곡선에서 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t-t\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t$이므로

$$g(k)=\int_0^k\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^k\sqrt{1+t^2}\,dt$$

또 $h(k)=\sqrt{(k\cos k)^2+(k\sin k)^2}=k$

$$\therefore f(m)=f(\tan k)=\int_0^k\sqrt{1+t^2}\,dt+k$$

위 식의 양변을 미분하면 $f'(\tan k)\sec^2 k=\sqrt{1+k^2}+1$

$m\to0+$일 때 $k\to0+$이고, $m\to0-$일 때 $k\to\pi-$이므로

$$\lim_{m\to0+}f'(m)+\lim_{m\to0-}f'(m)=\lim_{k\to0+}f'(\tan k)+\lim_{k\to\pi-}f'(\tan k)$$

$=2+\sqrt{1+\pi^2}+1$ **답** ④ $\sqrt{1+\pi^2}+3$

★ 6페이지

21. 출제의도 : 정적분의 정의 (작년 6월 30번)

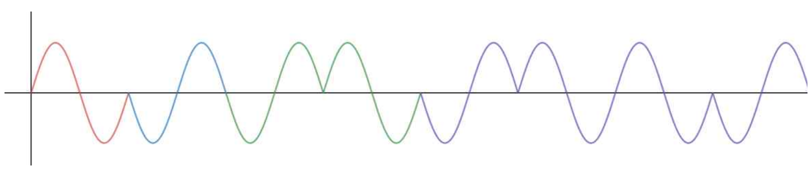
$\pi\sin\pi x$의 주기는 2이다.

조건 (나)에서
$k=1$을 대입하면 $0\le x<2$일 때 $f_1(x+2)=-f_1(x)$

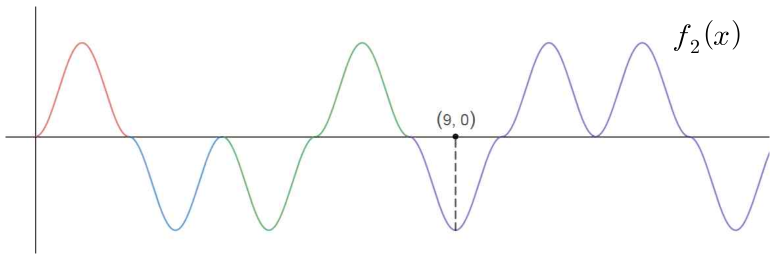
따라서 $2\le x<4$에서 $f_1(x)$의 모양은 $0\le x<2$에서와 위아래가 반대이다.

또 $k=2$를 대입하면 $0\le x<4$일 때 $f_1(x+4)=-f_1(x)$
따라서 $4\le x<8$에서 $f_1(x)$의 모양은 $0\le x<4$에서와 위아래가 반대이다.

이러한 과정을 거쳐 $f_1(x)$를 그리면 다음과 같다.



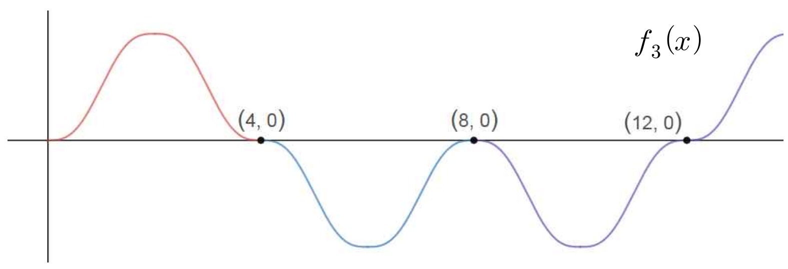
ㄱ. $f_1(x)$를 이용해 $f_2(x)$를 그리면 다음과 같다.



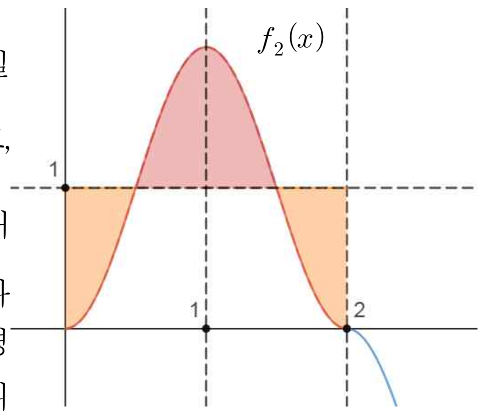
따라서 $f_2(9)$는 $f_2(x)$의 최댓값이 아니다. (거짓)

한편 위 그림에서 $f_2(x)$의 첫 번째 극댓값은 $\int_0^1 f_1(x)dx=2$인데, 음이 아닌 정수 k에 대해 $4k<x<4(k+1)$에서 $f_1(x)$의 그래프의 개형이 항상  모양 또는  모양이므로 $f_2(x)$의 그래프의 개형은 항상  모양 또는  모양이다. 따라서 $f_2(x)$의 최댓값은 $f_2(1)$과 같다.

ㄴ. (ㄱ)에서 구했듯 $g(2)=2$이다.
$f_2(x)$를 이용해 $f_3(x)$를 그리면 다음과 같다.

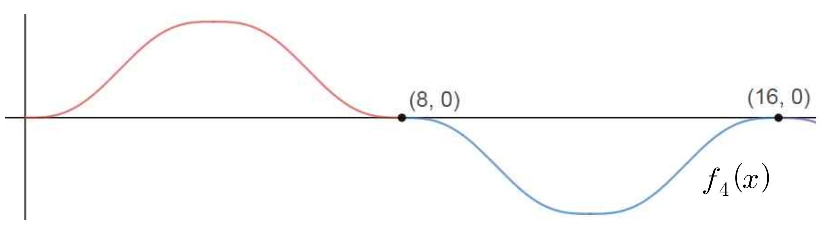


이때 (ㄱ)에서와 마찬가지의 방법으로 $f_3(x)$의 최댓값은 $f_3(2)=\int_0^2 f_2(x)dx$와 같음을 알 수 있다.



한편 $f_1(x)$가 $0<x<1$일 때 $x=\dfrac{1}{2}$에 대해 대칭이고, $1<x<2$일 때 $x=\dfrac{3}{2}$에 대해 대칭이기 때문에 그림과 같이 $f_2(x)$에서 빨간색 영역의 넓이와 주황색 영역의 넓이는 같다. 따라서 직사각형의 넓이를 이용하면 $\int_0^2 f_2(x)dx=2$이므로, $g(3)=2$이다.

마찬가지로 $f_3(x)$를 이용해 $f_4(x)$를 그리면 다음과 같다.

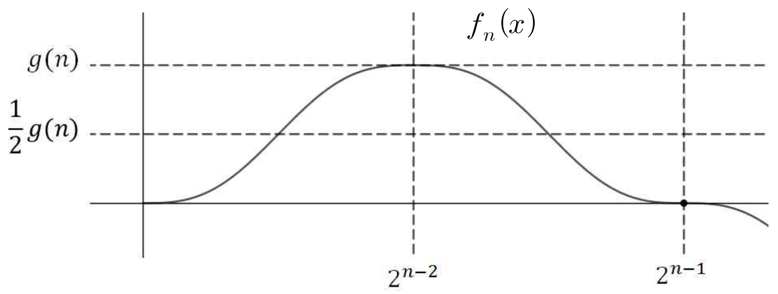


$f_4(x)$의 최댓값은 $f_4(4)$가 되며, $f_3(x)$에서 직사각형의 넓이를 이용하면 $\int_0^4 f_3(x)dx=4$이므로 $g(4)=4$이다.

또 $f_5(x)$의 최댓값은 $f_5(8)$이 되며, $f_4(x)$에서 직사각형의 넓이를 이용하면 $\int_0^8 f_4(x)dx=16$이므로 $g(5)=16$이다.

이상에서 $g(2)=2,\ g(3)=2,\ g(4)=4,\ g(5)=16$이므로 이들의 합은 24이다. (참)

ㄷ. (ㄴ)에서 $f_n(x)=0$이 되는 x의 값 중 0을 제외하고 가장 작은 것은 2^{n-1}임을 알 수 있다.



이때 위 그림에서 직사각형의 넓이를 이용하면

$$\int_0^{2^{n-1}} f_n(x)dx=2^{n-1}\times\frac{1}{2}g(n)=2^{n-2}g(n)$$

이때 $g(n+1)=f_{n+1}(2^{n-1})$이므로 $g(n+1)=2^{n-2}g(n)$ (참)

답 ④ ㄴ, ㄷ

22. <u>출제의도 : P랑 C 정의 복습</u>

${}_{10}\mathrm{P}_n=\frac{10!}{(10-n)!}$이고 ${}_{10}\mathrm{C}_n=\frac{10!}{n!(10-n)!}$이므로 $n!=1$에서 $n=0$ 또는 $n=1$이다. 따라서 ${}_{10}\mathrm{H}_0+{}_{10}\mathrm{H}_1=11$.

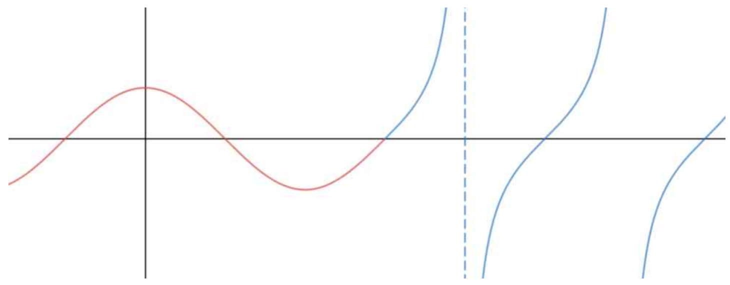
23. $f'(a)=2(a-2)^{\sqrt{2}-1}$가 자연수이려면 $a-2=1$이어야 한다. $\therefore a=3$.

24. $V(X)=9$이므로 $1-p=\frac{9}{10},\ p=\frac{1}{10},\ n=100$

$100-4\times9=64$.

★ 7페이지

25. $f(x)$가 미분가능하려면



$\cos x$는 기울기가 1 이하이고 $\tan x$는 기울기가 1 이상이기 때문에 그림처럼 기울기가 1인 부분에서 이어져야 한다.

이때 양수 a의 최솟값은 $\frac{3}{2}\pi$이다. 한편 $\tan x$의 주기는 π이기 때문에 양수 b의 최솟값은 $\frac{1}{2}\pi$이다. $20\times\frac{3}{2}+2\times\frac{1}{2}=31$.

26. 좌표평면에 점 25개를 그려서 풀면 도움이 많이 된다.

일단 크게 나누면 기울기가 양수인 경우, 0인 경우, 음수인 경우가 있다. 양수인 경우랑 음수인 경우는 상하 대칭이라서 경우의 수가 같다. (기울기가 없는 직선은 y축에 평행한 직선을 말한다. 기울기가 0인 직선은 기울기가 있는 것이다.)

기울기가 양수인 경우는 또 기울기가 1보다 작은 경우, 1인 경우, 1보다 큰 경우가 있는데, 1보다 작은 경우랑 1보다 큰 경우는 $y=x$ 대칭이라서 경우의 수가 같다.

기울기가 1보다 작은 경우를 다 세 보면 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{4}$ 5개다. (한 점을 $(0,0)$으로 잡고 세면 쉽다) (아니면 분자랑 분모에 1부터 4까지의 수를 넣는 경우의 수를 따져도 된다)

따라서 기울기가 양수인 경우의 수는 $5\times2+1=11$이고, 전체 경우의 수는 $11\times2+1=23$.

27. <u>출제의도 : 쌍곡선의 일부라는 걸 파악할 수 있는가</u>

$1+\tan^2 t=\sec^2 t$에서 $\tan t=\frac{y}{\sqrt{3}},\ \sec t=x$이므로

$1+\frac{y^2}{3}=x^2$, 정리하면 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$이다. 이때 주어진 t의 범위에서 $x\geq1$이므로 주어진 곡선은 쌍곡선의 $x>0$인 부분이다.

$|\overrightarrow{PF}|-|\overrightarrow{PF'}|$가 항상 양수로 일정하므로 F와 F'는 쌍곡선의 두 초점이고, F의 x좌표는 음수, F'의 x좌표는 양수이다.

따라서 $a=-\sqrt{1+3}=-2,\ k=2\times1=2$이므로 $10k+a=20-2=18$.

28. 출제의도 : 미분과 항등식 (난이도 상)

① 양변에 0 대입

$f(x)g(x)=\int_0^x f(k)f''(k)dk$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=0$ $\quad \therefore f(0)=0$ 또는 $g(0)=0$ ………… ㉠

② $f(x)$의 차수 구하기

$f(x)$가 1차 다항식이라면 $f''(x)=0$이므로 위 식의 우변이 $\int_0^x f(k)f''(k)dk=\int_0^x 0\,dk=0$이 되어 항등식이 성립하지 않는다. 따라서 $n\geq 2$이다. 또한 $f(x)g(x)$의 차수는 $n+1$, $\int_0^x f(k)f''(k)dk$의 차수는 $2n-1$이므로 $n+1=2n-1$에서 $n=2$이다.

③ 항등식의 계수비교

$f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=dx+e$라고 하자. ㉠에서 $c=0$ 또는 $e=0$이다.

$f(x)g(x)=\int_0^x f(k)f''(k)dk$의 양변을 미분하면

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=f(x)f''(x)$

$(2ax+b)(dx+e)+(ax^2+bx+c)d=(ax^2+bx+c)2a$를 전개해 양변의 계수를 비교하면

$3ad=2a^2$ ………………… ㉡

$2bd+2ae=2ab$ …………… ㉢

$be+cd=2ac$ ……………… ㉣

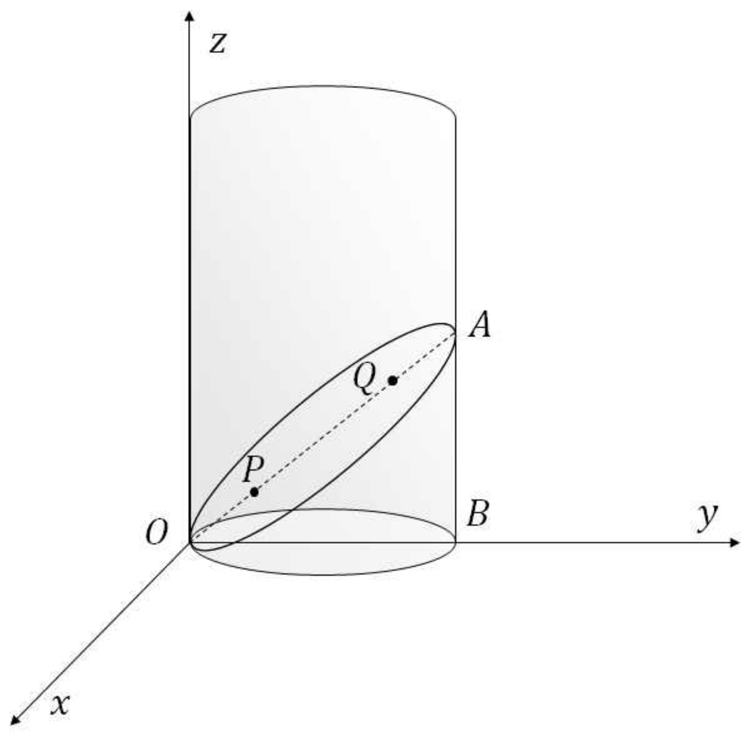
㉡에서 $d=\frac{2}{3}a$, 이를 ㉢에 대입하면 $b=3e$, 이를 ㉣에 대입하면 $3e^2=\frac{4}{3}ac$이다. 이때 $c=0$일 경우 $e=0$이고, $e=0$일 경우 $a\neq 0$이므로 $c=0$이다. 따라서 $c=e=0$이고, $b=0$이다.

$f(x)=ax^2$, $g(x)=\frac{2}{3}ax$이고 $a\neq 0$이므로

$$n\times\frac{f(6)}{g(1)}=2\times\frac{36a}{\frac{2}{3}a}=108.$$

★ 8페이지

29. 출제의도 : 참된 융합인재 (기벡+미2)



α와 C의 교선 위의 점 중 O에서 가장 먼 점을 A라고 하고, 점 $(0,\ 2,\ 0)$을 B라고 하자. $\overline{AB}=k$라고 할 때, α와 C의 교선은 장축의 길이가 $\sqrt{k^2+4}$이고 단축의 길이가 2인 타원이다. 이때 두 초점 사이 거리는 $\sqrt{\left(\sqrt{k^2+4}\right)^2-4}=k$이다.

$\overrightarrow{PQ}\,//\,\overrightarrow{OA}=(0,\ 2,\ k)$이므로

$\overrightarrow{OA}$와 벡터 $(0,3,-1)$이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때,

$\cos\theta=\frac{6-k}{\sqrt{4+k^2}\sqrt{10}}$이고,

$\overrightarrow{PQ}\bullet(0,3,-1)=|\overrightarrow{PQ}|\sqrt{10}\cos\theta=\frac{6k-k^2}{\sqrt{4+k^2}}$이다.

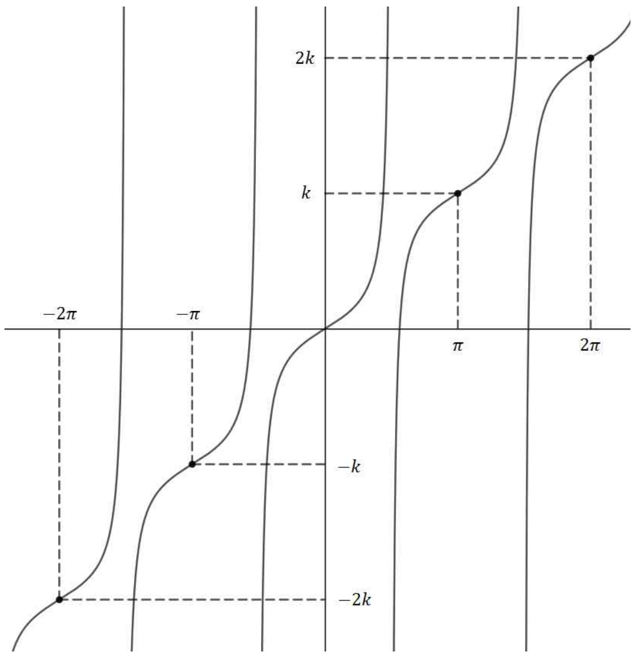
함수 $y=\frac{-x^2+6x}{\sqrt{x^2+4}}$를 미분하면

$$y'=\frac{(-2x+6)\sqrt{x^2+4}-(-x^2+6x)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}=\frac{-x^3-8x+24}{\sqrt{x^2+4}}$$

$x=2$일 때 $y'=0$이므로 $k=2$일 때 $\overrightarrow{PQ}\bullet(0,3,-1)$이 최대이고, 최댓값은 $\frac{6\times2-2^2}{\sqrt{4+2^2}}=2\sqrt{2}$이다. 따라서 $a^2=8$.

30. 출제의도 : 변수를 설정하여 식 세우기 (작년 수능 21번)

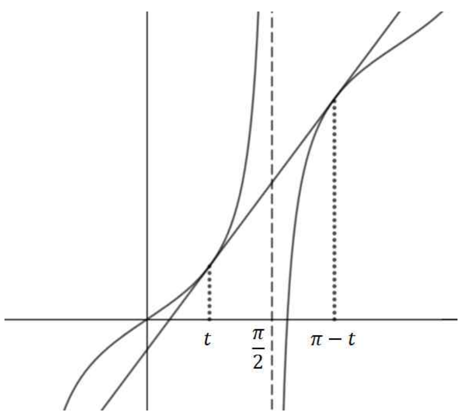
① 그래프를 그리고 상황 해석



함수 $f(x)$의 그래프는 위와 같다. $f'(0)=1$이므로 $k=\pi$인 경우 $(0,0)$을 지나고 $f(x)$에 2번 이상 접하는 직선이 단 하나 존재하고, $k<\pi$인 경우 $f(x)$에 2번 이상 접하는 직선은 존재하지 않으며, $k>\pi$인 경우 $f(x)$에 2번 이상 접하는 직선이 무수히 많이 존재한다. 따라서 $m=\pi$이다.

$f(x)$가 기함수이며 그래프의 개형이 π를 주기로 반복되므로, 서로 다른 두 점에서 접하는 직선에 대해 접점의 x좌표 중 하나가 t $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$라고 가정하자. 이때 접점의 x좌표의 차가 가장 작은 경우는 나머지 접점의 x좌표가 $\pi-t$인 경우이다.

② 직선의 방정식을 세워 $h(x)$ 구하기



$h(c)$는 위 그림에서 두 접점의 x좌표의 차가 c일 때의 k의 값과 같다.

$f(x)$와 서로 다른 두 점 $(t, \tan t)$, $(\pi-t, \tan(-t)+k)$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서 접하는 직선의 방정식을 $y=l(x)$라 하자. 이때 두 접점의 x좌표의 차는 $\pi-2t$이다.

$l(x)$는 $(t, \tan t)$에서 $f(x)$에 접하고, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서

$f'(x)=\sec^2 x$이므로

$l(x)=(x-t)\sec^2 t+\tan t$

여기에 $(\pi-t, \tan(-t)+k)$를 대입하면

$-\tan t+k=(\pi-2t)\sec^2 t+\tan t$

$k=(\pi-2t)\sec^2 t+2\tan t$

$\therefore h(\pi-2t)=(\pi-2t)\sec^2 t+2\tan t$

③ 합성함수의 미분으로 $h'(x)$ 구하기

위 식을 미분하면

$-2h'(\pi-2t)=-2\sec^2 t+2(\pi-2t)\sec^2 t\tan t+2\sec^2 t$

$\therefore h'(\pi-2t)=(2t-\pi)\sec^2 t\tan t$

④ 주어진 식 구하기

$\pi-2t=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{\pi}{3}$이고

$\pi-2t=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=\frac{\pi}{4}$이므로

$h\left(\frac{\pi}{3}\right)-h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{3}\sec^2\frac{\pi}{3}+2\tan\frac{\pi}{3}\right)+\left(-\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left(\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)-(-\pi)=\frac{7}{3}\pi+\sqrt{12}$

$a=\frac{7}{3}$, $b=12$이므로 $ab=28$.

여러분의 관심사와 흥미를 빅 데이터로 분석하여
가장 많은 짜증을 이끌어낼 만한 문제를 도출했습니다