E.T's Eight Technics.

Ver. 2019

First Technic.

함수 다루기

함수를 정복할 수 있다면

수학의 반은 정복했다고 할 수 있다.

- E . T -

함수 레시피

1. 함수, 역함수, 합성함수 핵심개념

2. 유리 , 무리함수

3. 함수 심화

- E . T -

1. 함수, 역함수, 합성함수 핵심개념

Question. 01

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f(2)=0$
(나) 이차방정식 $f(x)-6(x-2)=0$의 실근의 개수는 1이다.

방정식 $(f \circ f)(x)=-3$의 서로 다른 실근을 모두 곱한 값은? [4점] [2016년 3월 교육청]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

Question. 02

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+6 & (x<0) \\ x+6 & (x \geq 0) \end{cases}, \quad g(x)=x+10$$

에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y \geq 0\}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[4점] [2016년 3월 교육청]

Question. 03

집합 $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$의 모든 원소 x에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$는 '$2x$를 5로 나눈 나머지'로 정의하고, X에서 X로의 함수 $g(x)$는 $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$를 만족시킨다. $g(1)=3$일 때, $g(0)+g(3)$의 값은?

[4점] [2016년 4월 교육청]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Question. 04

함수

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x\geq 0)\\ 4x & (x<0)\end{cases}$$

의 역함수 $g(x)$에 대하여 부등식 $g(x)\leq -\frac{1}{4}x^2+3$의 해가 $a\leq x\leq b$일 때, $a+b$의 값은?

[4점] [2017년 3월 교육청]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

Question. 05

실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x}+3 & (x<4) \\ -(x-a)^2+4 & (x \geq 4)\end{cases}$$

가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [4점] [2017년 4월 교육청]

Question. 06

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$에 대하여 두 함수 $f:X\to X$, $g:X\to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=8$, $f(3)\neq 6$

(나) 함수 $(g\circ f)(x)$는 항등함수이다.

(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)+g(x)$의 값은 일정하다.

$(f\circ f\circ f)(7)$의 값은?

[4점][2018년 3월 교육청]

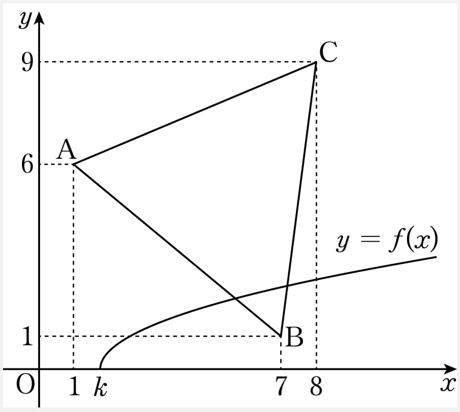
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. 유리함수 , 무리함수

Question. 07

무리함수 $f(x)=\sqrt{x-k}$ 에 대하여 좌표평면에 곡선 $y=f(x)$와 세 점 A(1, 6), B(7, 1), C(8, 9)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?

[4점] [2016년 3월 교육청]



① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

Question. 08

무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+1$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(1,\ 3)$에서 만날 때, $g(5)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

[4점] [2018년 3월 교육청]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

Question. 09

유리함수 $y=\dfrac{4}{x}\,(x>0)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 직선 $y=-x$ 사이의 거리가 5일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

[4점] [2016년 10월 교육청]

Question. 10

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\frac{6x+12}{2x-1},$$

$$g(x)=\begin{cases}1 & (x\text{가 정수인 경우})\\ 0 & (x\text{가 정수가 아닌 경우})\end{cases}$$

일 때, 방정식 $(g\circ f)(x)=1$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는?

[4점] [2017년 3월 교육청]

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

Question. 11

좌표평면에서 함수 $y=\dfrac{4x+1}{2x+a}$의 그래프의 두 점근선의 교점이 직선 $y=x+1$ 위에 있을 때, 상수 a의 값은?

[4점] [2017년 4월 교육청]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

Question. 12

함수 $f(x)=\dfrac{bx}{ax+1}$의 정의역과 치역이 같다.

곡선 $y=f(x)$의 두 점근선의 교점이 직선 $y=2x+3$ 위에 있을 때, $a+b$의 값은?

(단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [4점] [2017년 10월 교육청]

① $-\dfrac{2}{3}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

3. 함수 심화

Question. 13

좌표평면 위에 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & (x>0) \\ \dfrac{12}{x} & (x<0) \end{cases}$$ 의 그래프와 직선 $y=-x$가 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=-x$와 만나는 점을 Q, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=f(x)$와 만나는 점을 R라 할 때, 선분 PQ와 선분 QR의 길이의 곱 $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값을 구하시오.

[4점] [2016년 4월 교육청]

Question. 14

자연수 n과 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-n}+n$, $g(x)=\sqrt{x+n}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 $\mathrm{P}(a, b)$의 개수를 A_n이라 하자.

(가) 두 수 a, b는 자연수이다.
(나) $n < a \le 3n$, $g(a) < b < f(a)$

$n \le A_n \le 3n$을 만족시키는 모든 A_n의 값의 합은?

[4점] [2017년 10월 교육청]

① 22 ② 25 ③ 28 ④ 31 ⑤ 34

Question. Set형 문제 [E.T 자작 문항]

집합 $X=\{x\,|\,0\le x\le 40\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (0\le x\le 2)\\ (x-4)^2 & (2<x\le 4)\end{cases}$$

에 대하여 $f(x)=f(x+4)$을 만족할 때, 다음 물음에 답하여라.

15. $(f\circ f)(x)=1$을 만족하는 근의 총합은?

16. 새로운 함수 $g(x)=mx-8m+2$ 에 대해서 $f(x), g(x)$ 두 함수가 모두 집합 Y를 정의역으로 가질 때, '$f=g$' 를 만족한다고 한다. 이때 m값에 따른 가능한 정의역 Y의 개수를 $h(m)$이라 하자. $h(1)+h\left(\frac{1}{2}\right)+h\left(\frac{1}{4}\right)$의 값을 구하여라.

(단 Y는 공집합이 아니며, Y는 X의 부분집합이다.)

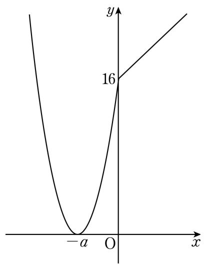
[First Technic. 함수 정답 및 해설]

1) [출제의도] 함수의 그래프와 방정식의 관계를 이해하여 실근의 곱을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의해
이차함수 $f(x)=ax(x-2)$ (a는 상수)꼴이다.
조건 (나)에 의해 $ax(x-2)-6(x-2)=0$이므로
$(ax-6)(x-2)=0$이다.
이차방정식의 실근의 개수가 1이므로 $ax-6=0$의 근도 $x=2$이다. 즉, $a=3$이다.
$f(x)=3x(x-2)=3(x-1)^2-3$이므로
이차함수 $f(x)$의 꼭짓점은 $(1,\ -3)$이다.
$f(f(x))=-3$을 만족하기 위해서는 $f(x)=1$이 되어야 함을 그래프에서 알 수 있다.
그러므로 $3x^2-6x=1$에서 $3x^2-6x-1=0$이다.
따라서 서로 다른 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에서 $-\dfrac{1}{3}$이다.

2) [출제의도] 합성함수의 성질을 이해하여 주어진 식의 미정계수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

합성함수 $(g\circ f)(x)=\begin{cases} x^2+2ax+16 & (x<0) \\ x+16 & (x\ge 0)\end{cases}$ 이다.
$a\le 0$이면
합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 16\}$이므로 문제의 치역과 달라 $a>0$이어야 한다.
$y=x^2+2ax+16$의 꼭짓점의 x좌표가 음수이므로
합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 0\}$이기 위해서는 꼭짓점의 y좌표가 0이다.



$y=x^2+2ax+16=(x+a)^2+16-a^2$에서
$16-a^2=0$, $a=\pm 4$
$a>0$이므로 $a=4$

3) [출제의도] 함수 이해하기

$f(x)$는 '$2x$를 5로 나눈 나머지'이므로
$f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=1,\ f(4)=3$이다.
함수 $g: X\to X$는 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시키므로
$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$에서 $f(3)=g(2)=1$
$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)$에서 $f(1)=g(4)=2$
$(f\circ g)(4)=(g\circ f)(4)$에서 $f(2)=g(3)=4$
$(f\circ g)(0)=(g\circ f)(0)$에서 $f(g(0))=g(0)$
$f(0)=0$이므로 $g(0)=0$ 이어야 한다.
$\therefore\ g(0)+g(3)=0+4=4$

4) [출제의도] 역함수와 무리함수의 성질을 활용하여 부등식의 해를 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x\ge 0)\\ 4x & (x<0)\end{cases}$
이므로 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면
$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & (x\ge 0)\\ \dfrac{1}{4}x & (x<0)\end{cases}$

i) $x\ge 0$인 경우
$g(x)\le -\dfrac{1}{4}x^2+3$
$\dfrac{1}{2}x^2\le -\dfrac{1}{4}x^2+3$
$\dfrac{3}{4}x^2\le 3$
$x^2\le 4$
$-2\le x\le 2$
$x\ge 0$이므로 $0\le x\le 2$

ii) $x<0$인 경우
$g(x)\le -\dfrac{1}{4}x^2+3$
$\dfrac{1}{4}x\le -\dfrac{1}{4}x^2+3$
$\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x-3\le 0$
$x^2+x-12\le 0$
$(x+4)(x-3)\le 0$
$-4\le x\le 3$
$x<0$이므로 $-4\le x<0$

i), ii)에서 부등식의 해는 $-4\le x\le 2$
따라서 $a+b=-2$

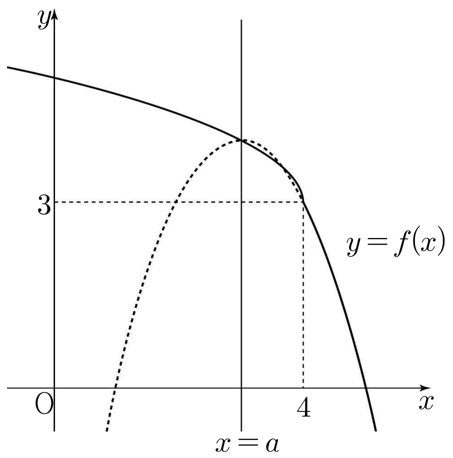
5) [출제의도] 일대일 대응을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되기 위해서는

곡선 $y=-(x-a)^2+4(x \geq 4)$가 점 $(4,\ 3)$을

지나야 하고, 곡선 $y=-(x-a)^2+4$의

축이 $x=a$이므로 $a \leq 4$이다.



$3=-(4-a)^2+4$

$a^2-8a+15=0$

$(a-3)(a-5)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=5$

$a \leq 4$이므로 $a=3$

6) [출제의도] 항등함수와 상수함수의 뜻을 이해하여 함수를 추론한다.

함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 아니라고 가정하면

합성함수 $g \circ f : X \rightarrow X$ 는

일대일 대응이 아니게 되므로 항등함수도 아니다.

이런 경우 조건 (나)를 만족시키지 않게 되므로

함수 f는 일대일 대응이어야 한다.

마찬가지 이유로 함수 g도 일대일 대응이다.

두 일대일 대응 $f,\ g$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{9} f(n)=1+2+\cdots+9=45,$$

$$\sum_{n=1}^{9} g(n)=1+2+\cdots+9=45 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\}&=\sum_{n=1}^{9} f(n)+\sum_{n=1}^{9} g(n)\\&=45+45\\&=90\end{aligned}$$

조건 (다)에서 $f(x)+g(x)$의 값은 일정하므로

$f(x)+g(x)=k$ (k는 상수)라 하자.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\}=\sum_{n=1}^{9} k=9k$ 이므로

$9k=90$ 에서 $k=10$

모든 $x \in X$ 에 대하여

$f(x)+g(x)=10$ …… ㉠

조건 (가)에서

$f(1)=8$ 이므로 조건 (나)에 의하여

$g(8)=1$

$g(8)=1$ 이므로 ㉠에 의하여

$f(8)=9$

$f(8)=9$ 이므로 조건 (나)에 의하여

$g(9)=8$

$g(9)=8$ 이므로 ㉠에 의하여

$f(9)=2$

$f(9)=2$ 이므로 조건 (나)에 의하여

$g(2)=9$

$g(2)=9$ 이므로 ㉠에 의하여

$f(2)=1$

$f(2)=1$ 이므로 조건 (나)에 의하여

$g(1)=2$

$f(5)=a$라 하면

조건 (나)에 의하여

$g(a)=5$

$g(a)=5$ 이면 ㉠에 의하여

$f(a)=5$

$f(a)=5$ 이면 조건 (나)에 의하여

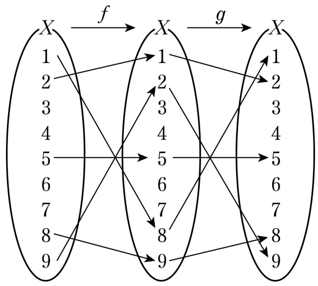
$g(5)=a$

이때 $10=f(5)+g(5)=a+a=2a$ 이므로

$a=5$

즉 $f(5)=5$ 이고 ㉠에 의하여 $g(5)=5$

이상의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



조건 (가)에 의하여 $f(3) \neq 6$ 이므로

(i) $f(3)=3$ 이면

조건 (나)에 의하여

$g(3)=3$

㉠에 의하여 $g(3)=7$ 이므로

이 경우는 불가능하다.

(ii) $f(3)=7$ 이면

조건 (나)에 의하여

$g(7)=3$

$g(7)=3$ 이면 ㉠에 의하여

$f(7)=7$

함수 f가 일대일 대응이 아니게 되므로 이 경우는 불가능하다.

(iii) $f(3)=4$ 이면

조건 (나)에 의하여

$g(4)=3$

$g(4)=3$ 이면 ㉠에 의하여

$f(4)=7$

$f(4)=7$ 이면 조건 (나)에 의하여

$g(7)=4$

$g(7)=4$ 이면 ㉠에 의하여

$f(7)=6$

$f(7)=6$ 이면 조건 (나)에 의하여

$g(6)=7$

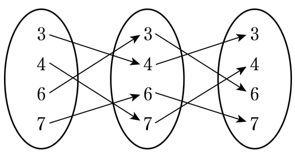
$g(6)=7$ 이면 ㉠에 의하여

$f(6)=3$

$f(6)=3$ 이면 조건 (나)에 의하여

$g(3)=6$

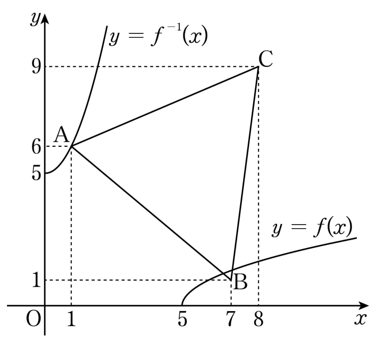
(iii)의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



따라서

$$(f\circ f\circ f)(7)=f(f(6))$$
$$=f(3)$$
$$=4$$

7) [출제의도] 평행이동한 무리함수의 역함수의 그래프를 추측하여 문제를 해결한다.



그림과 같이 k의 값이 증가하면 곡선 $y=\sqrt{x-k}$ 는 점 B를 지난 이후에 삼각형과 만나지 않고 곡선 $y=f(x)$가 점 B를 지날 때 $1=\sqrt{7-k}$ 이므로 k는 6이다.

즉, $k>6$이면 곡선 $y=f(x)$와 삼각형은 만나지 않는다.

또, $y=\sqrt{x-k}$ 의 역함수를 구하면 $y=x^2+k$ $(x\geq 0)$이다.

k의 값이 증가하면 곡선 $y=x^2+k$가 점 A를 지난 이후 삼각형과 만나지 않고 곡선 $y=x^2+k$가 점 A를 지날 때 $6=1^2+k$이므로 k는 5이다.

즉, $k>5$이면 곡선 $y=x^2+k$와 삼각형은 만나지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수의 그래프가 삼각형과 동시에 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 5이다.

8) [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 역함수의 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(1,3)$에서 만나므로 $f(1)=3$이고 $g(1)=3$이다.

이때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(1)=3$에서 $f(3)=1$

$f(1)=\sqrt{a+b}+1=3$에서

$a+b=4$ ...... ㉠

$f(3)=\sqrt{3a+b}+1=1$에서

$3a+b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의해

$a=-2,\ b=6$

그러므로 $f(x)=\sqrt{-2x+6}+1$

$g(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$f(k)=\sqrt{-2k+6}+1=5$에서 $\sqrt{-2k+6}=4$

$-2k+6=16$

$k=-5$

따라서 $g(5)=-5$

9) [출제의도] 유리함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 문제를 해결한다.

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 유리함수 $y=\dfrac{4}{x}\ (x>0)$의 그래프 위의 점이므로 $b=\dfrac{4}{a}$에서 $ab=4$ $(a>0,\ b>0)$

점 $\mathrm{P}(a,b)$와 직선 $x+y=0$ 사이의 거리가 5이

므로 $\dfrac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5$에서 $a+b=5\sqrt{2}$

따라서 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(5\sqrt{2})^2-2\times4=42$

10) [출제의도] 유리함수와 합성함수의 성질을 이해하여 방정식의 해의 개수를 구한다.

방정식 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=1$이므로

$g(x)$의 정의에 의해 $f(x)$는 정수이다.

$f(x)=\dfrac{6x+12}{2x-1}$

$=\dfrac{15}{2x-1}+3$이 정수가 되려면

$2x-1$은 15의 약수이어야 한다.

x가 자연수이므로 $2x-1$은 자연수이고,

$2x-1$은 15의 양의 약수이다.

$2x-1=1,\ 3,\ 5,\ 15$

$x=1,\ 2,\ 3,\ 8$

따라서 서로 다른 자연수 x의 개수는 4이다.

11) [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

유리함수 $y=\dfrac{4x+1}{2x+a}$은 $y=\dfrac{1-2a}{2x+a}+2$이므로

두 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{a}{2},\ y=2$

두 점근선의 교점은 $\left(-\dfrac{a}{2},2\right)$

점 $\left(-\dfrac{a}{2},2\right)$가 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$2=-\dfrac{a}{2}+1$

$\therefore\ a=-2$

12) [출제의도] 유리함수의 그래프와 일차함수의 성질을 이해하여 주어진 문제를 해결한다.

정의역 $\left\{x|x\neq-\dfrac{1}{a}\text{인 실수}\right\}$와 치역 $\left\{y|y\neq\dfrac{b}{a}\text{인 실수}\right\}$

가 같으므로 $-\dfrac{1}{a}=\dfrac{b}{a}$, $b=-1$이다. 두 점근선의 교점 $\left(-\dfrac{1}{a},-\dfrac{1}{a}\right)$이 직선 $y=2x+3$ 위에 있으므로

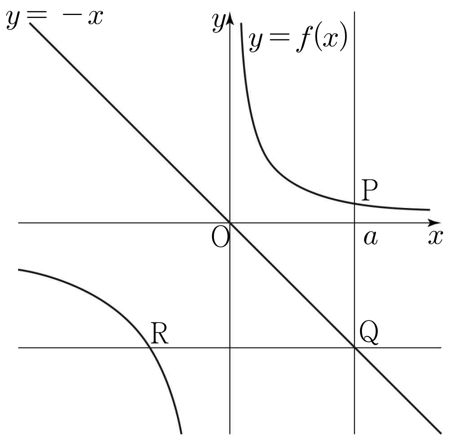
$-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{2}{a}+3,\ a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{1}{3}+(-1)=-\dfrac{2}{3}$

13) [출제의도] 유리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

점 P의 x의 좌표를 a라 하자.

(ⅰ) $a>0$일 때,



$\mathrm{P}\left(a,\dfrac{3}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,-a)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{12}{a},-a\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=a+\dfrac{3}{a}$, $\overline{\mathrm{QR}}=a+\dfrac{12}{a}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\left(a+\dfrac{3}{a}\right)\left(a+\dfrac{12}{a}\right)=a^2+\dfrac{36}{a^2}+15$

$\geq 2\sqrt{a^2\times\dfrac{36}{a^2}}+15=27$

등호가 성립하는 경우는 $a^2=\dfrac{36}{a^2}$, 즉 $a=\sqrt{6}$일 때이다.

그러므로 $a=\sqrt{6}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 27을

갖는다.

(ⅱ) $a<0$일 때,

$\mathrm{P}\left(a,\dfrac{12}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,-a)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{3}{a},-a\right)$이므로

(ⅰ)에서와 같이

$a=-\sqrt{6}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 27을 갖는다.따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값은 27

14) [출제의도] 유리함수와 무리함수의 그래프의 성질을 이용하여 점의 개수를 추론한다.

(ⅰ) $n=1$ 또는 $n=2$인 경우

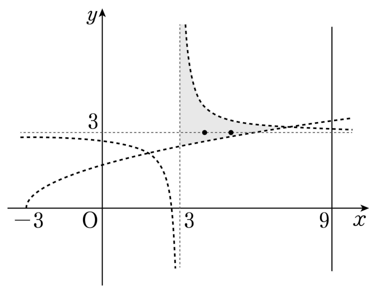
주어진 조건을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(a,b)$가 존재하지 않으므로 $A_1=0,\ A_2=0$

(ⅱ) $n=3$인 경우

$f(x)=\dfrac{1}{x-3}+3,\ g(x)=\sqrt{x+3}$ 이고

조건을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 $(4, 3)$, $(5, 3)$이므로

$A_3=2$

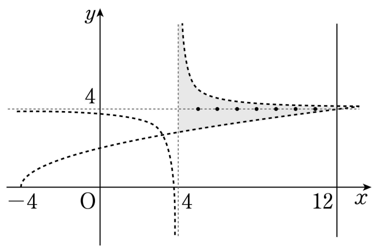


(iii) $n=4$인 경우

$f(x)=\dfrac{1}{x-4}+4,\ g(x)=\sqrt{x+4}$ 이고

조건을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 $(5, 4)$, $(6, 4)$, $(7, 4)$, $(8, 4)$, $(9, 4)$, $(10, 4)$, $(11, 4)$이므로

$A_4=7$

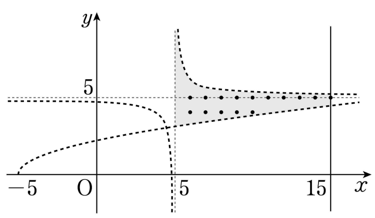


(iv) $n=5$인 경우

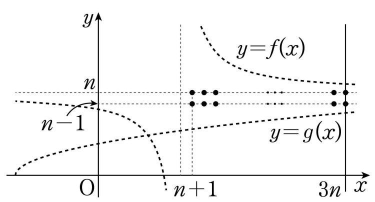
$f(x)=\dfrac{1}{x-5}+5,\ g(x)=\sqrt{x+5}$ 이고

조건을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 $(6, 4)$, $(7, 4)$, $(8, 4)$, $(9, 4)$, $(10, 4)$, $(6, 5)$, $(7, 5)$, $\cdots$, $(15, 5)$이므로

$A_5=15$



(v) $n\geq 6$인 경우



y좌표가 n인 $2n$개의

점 $(n+1, n)$, $(n+2, n)$, $\cdots$, $(3n, n)$과

y좌표가 $n-1$인 $2n$개의

점 $(n+1, n-1)$, $(n+2, n-1)$, $\cdots$, $(3n, n-1)$이

모두 조건을 만족시킨다.

즉, $A_n\geq 4n$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 $n\leq A_n\leq 3n$을 만족시키는 모든 A_n의 값의 합은 $A_4+A_5=7+15=22$

15) 정답 800

$f(x)=\alpha$ 일 때, 근의 개수 20개

$f(x)=\beta$ 일 때, 근의 개수 20개

'대칭성을 띈 두 근의 합 = 대칭축 × 근의 갯수'이므로

$(2+6+10+\cdots+38)\times 4=\dfrac{40\times 10}{2}\times 4=800$

16)

$h\left(\dfrac{1}{4}\right)+h\left(\dfrac{1}{2}\right)+h(1)=(2^9-1)+(2^5-1)+(2^2-1)=545$

기울기 $\dfrac{1}{4}$일 때 근의 개수 9개

기울기 $\dfrac{1}{2}$일 때 근의 개수 5개

기울기 1 일 때 근의 개수 2개

$f=g$가 되 기 위해서는 두함수의 정의역이 $f(x)=g(x)$의 근의 해집합에 대한 부분집합을 가져야 하므로

$h\left(\dfrac{1}{4}\right)+h\left(\dfrac{1}{2}\right)+h(1)=(2^9-1)+(2^5-1)+(2^2-1)=545$