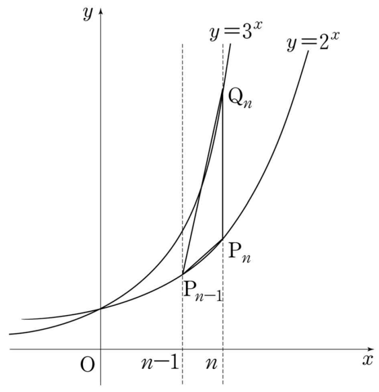
제 2 교시

수학 영역(나)

성명		수험 번호	

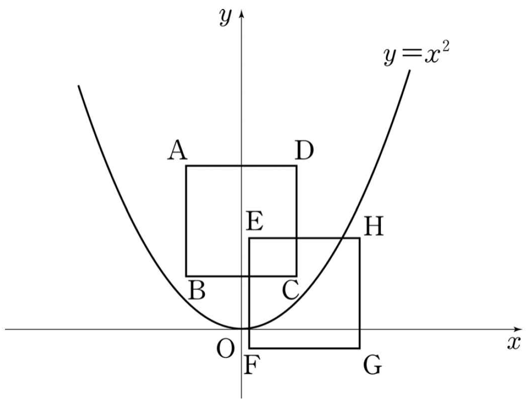
2011 - 06

20. 자연수 n 에 대하여 직선 $x=n$ 이 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$ 과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n 이라 하자. 삼각형 $P_nQ_nP_{n-1}$ 의 넓이를 S_n 이라 하고, $T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k$ 라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}$ 의 값은?
(단, 점 P_0 의 좌표는 $(0,\ 1)$ 이다.) [4점]



① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형 $ABCD$ 의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(0,\ 1)$ 이고, 한 변의 길이가 1 인 정사각형 $EFGH$ 의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x 축 또는 y 축에 평행하다.) [4점]



① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{11}{54}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

30. 100 이하의 자연수 전체의 집합을 S 라 할 때, $n \in S$ 에 대하여 집합

$$\{k \mid k \in S \text{이고 } \log_2 n - \log_2 k \text{는 정수}\}$$

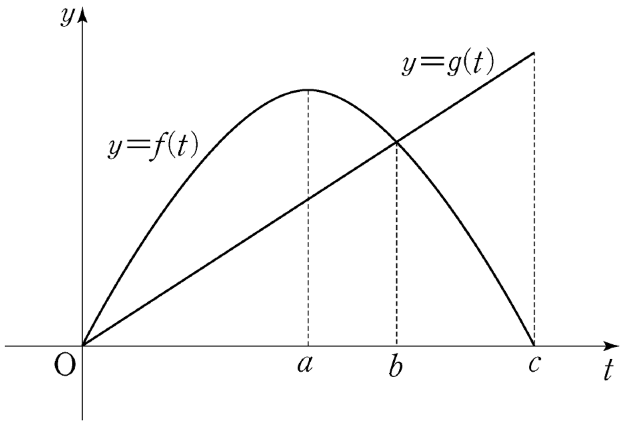
의 원소의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어, $f(10)=5$ 이고 $f(99)=1$ 이다. 이때, $f(n)=1$ 인 n 의 개수를 구하시오.[4점]

2011 - 09

20. 함수 $f(x)=x^2-x+a$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를
$g(x)=\begin{cases} f(x+1) & (x \leq 0) \\ f(x-1) & (x > 0) \end{cases}$이라 하자.
함수 $y=\{g(x)\}^2$ 이 $x=0$ 에서 연속일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

21. 같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 t $(0 \leq t \leq c)$ 에서 물체 A의 속도 $f(t)$ 와 물체 B의 속도 $g(t)$ 를 나타낸 것이다.



$\int_0^c f(t)dt = \int_0^c g(t)dt$ 이고 $0 \leq t \leq c$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것?

[보 기]

ㄱ. $t=a$ 일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$ 일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$ 일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 어느 학교 학생들의 통학 시간은 평균이 50 분, 표준편차가 σ 분인 정규분포를 따른다. 이 학교 학생들을 대상으로 16 명을 임의추출하여 조사한 통학 시간의 표본평균을 $\overline{X}$ 라 하자. $P(50 \leq \overline{X} \leq 56) = 0.4332$ 일 때, σ 의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

30. 자연수 n 에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n 이라 하자.

> (가) 정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n,\ 2^n)$ 이다.
> (나) 정사각형과 그 내부에 있는 점 $(x,\ y)$ 중에서 x 가 자연수이고, $y=2^x$ 을 만족시키는 점은 3 개뿐이다.

예를 들어 $a_1=12$ 이다. $\sum_{k=1}^{7} a_k$ 의 값을 구하시오.

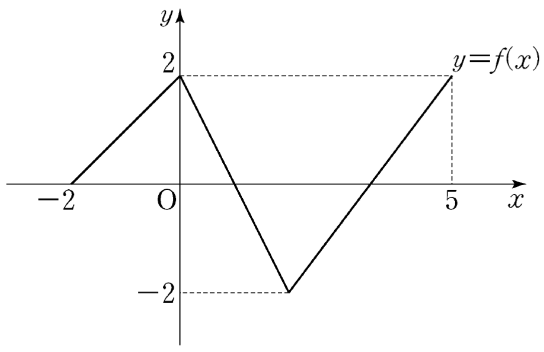
2011 - 수능

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

2012 - 06

20. 닫힌 구간 $[-2, 5]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$ 을 만족시키는 상수 a 의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

30. 3 보다 큰 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a 라 하자.

> (가) $a \geq 3$
> (나) 두 점 $(2, 0)$, $(a, \log_n a)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5)=4$ 이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$ 의 값을 구하시오.

2012 - 09

20. 어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 모평균이 m, 모표준편차가 $\frac{1}{2}$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 제품 중에서 25개를 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $[a,\ b]$일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le c) = 0.95$를 만족시키는 c를 a, b로 나타낸 것은?
(단, 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.) [4점]

① $3(b-a)$ ② $\frac{7}{2}(b-a)$ ③ $4(b-a)$

④ $\frac{9}{2}(b-a)$ ⑤ $5(b-a)$

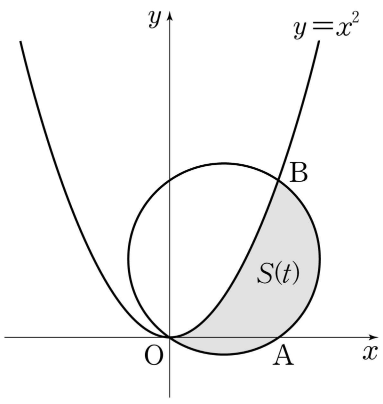
21. 좌표평면에서 두 함수

$$f(x) = 6x^3 - x, \quad g(x) = |x-a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{11}{18}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{7}{18}$

29. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 O(0, 0), A(t, 0), B(t, t^2)을 지나는 원 C가 있다. 원 C의 내부와 부등식 $y \le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\frac{p\pi+q}{4}$이다.
p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]



2012 - 수능

20. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -1 & (|x| \ge 1) \\ 1 & (|x|<1) \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} 1 & (|x| \ge 1) \\ -x & (|x|<1) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 1} f(x)g(x)=-1$
ㄴ. 함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

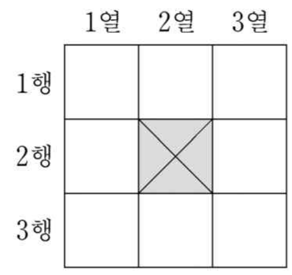
21. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

29. 다음 좌석표에서 2행 2열 좌석을 제외한 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 임의로 배정할 때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정될 확률은 p이다. $70p$의 값을 구하시오. (단, 2명이 같은 행의 바로 옆이나 같은 열의 바로 앞뒤에 있을 때 이웃한 것으로 본다.) [4점]



2013 - 06

21. 함수

$$f(x) = \begin{cases} a(3x - x^3) & (x < 0) \\ x^3 - ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단 a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

2013 - 09

21. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여, a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

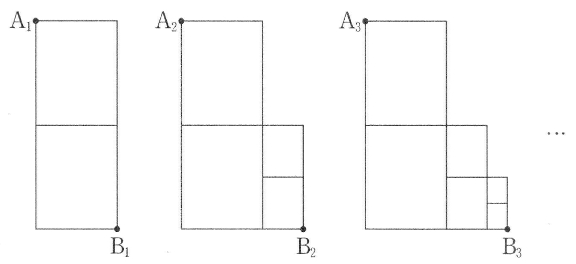
29. 그림과 같이 직사각형에서 세로를 각각 이등분하는 점 2개를 연결하는 선분을 그린 그림을 [그림 1]이라 하자.

[그림 1]을 $\frac{1}{2}$만큼 축소시킨 도형을 [그림 1]의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 하나의 꼭짓점으로 하여 오른쪽에 이어 붙인 그림을 [그림 2]라 하자.

이와 같이 3 이상의 자연수 k에 대하여 [그림 1]을 $\frac{1}{2^{k-1}}$만큼 축소시킨 도형을 [그림 $k-1$]의 오른쪽 만 아래 꼭짓점을 하나의 꼭짓점으로 하여 오른쪽에 이어 붙인 그림을 [그림 k]라 하자.

자연수 n에 대하여 [그림 n]에서 왼쪽 맨 위 꼭짓점을 A_n, 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 B_n이라 할 때, 점A_n에서 점B_n까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 a_n이라 하자.

a_7의 값을 구하시오. [4점]



[그림 1] [그림 2] [그림 3] …

30. 자연수 n에 대하여 부등식 $4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n \le 1$을 만족시키는 모든 자연수 k의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2013 - 수능

21. 좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 와 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 P 라 할 때, 원점에서 점 P 까지의 거리를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=2$
> (나) 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

29. 함수 $f(x)=3x^2-ax$ 가

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k}{n}\right)=f(1)$$

을 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [4점]

2014 - 06

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

g(5)의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

29. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

2014 - 09

20. 어느 나라에서 작년에 운행된 택시의 연간 주행거리는 모평균이 m 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 나라에서 작년에 운행된 택시 중에서 16 대를 임의 추출하여 구한 연간 주행거리의 표본평균이 $\overline{x}$ 이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95% 로 추정한 m 에 대한 신뢰구간이 $[\overline{x}-c,\ \overline{x}+c]$ 이었다. 이 나라에서 작년에 운행된 택시 중에서 임의로 1 대를 선택할 때, 이 택시의 연간 주행거리가 $m+c$ 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 주행거리의 단위는 km 이다.)

① 0.6242 ② 0.6635 ③ 0.6879
④ 0.8365 ⑤ 0.9292

21. 최고차항의 계수가 1 인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은?

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여
$6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$ 이다.

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

29. 구간 $[0,\ 3]$의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여
$\mathrm{P}(x \le X \le 3) = a(3-x)\ (0 \le x \le 3)$ 이
성립할 때, $\mathrm{P}(0 \le X < a) = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

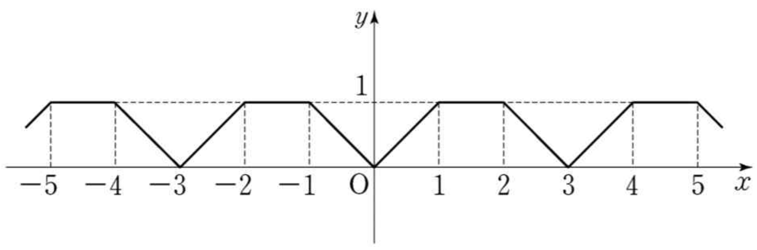
2014 - 수능

20. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3) = f(x)$를 만족시키고,

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x < 2) \\ -x+3 & (2 \le x < 3) \end{cases}$$

이다. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 13$일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18



21. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38 ④ 43 ⑤ 48

29. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=(x^3+2)f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

2015 - 06

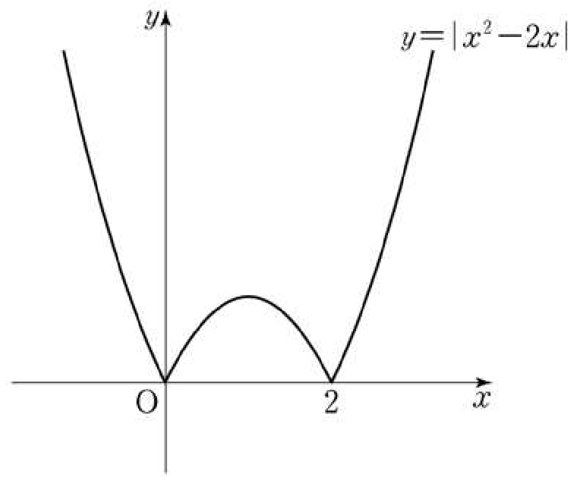
21. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

> (가) $f(n)=0$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은?

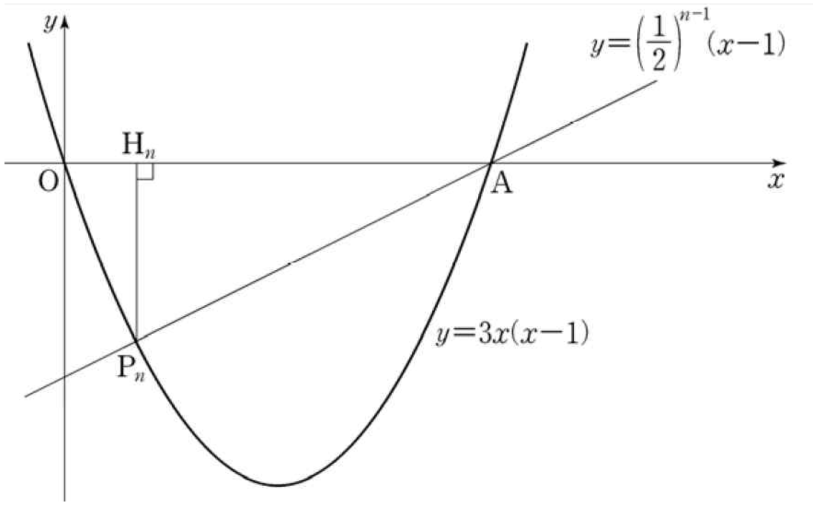
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

29. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오.



2015 - 09

20. 자연수 n 에 대하여 직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$ 과 이차함수 $y=3x(x-1)$ 의 그래프가 만나는 두 점을 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ 과 P_n 이라 하자. 점 P_n 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}$ 의 값은? [4점]



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{14}{9}$ ③ $\frac{29}{18}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{31}{18}$

21. 실수 t 에 대하여 직선 $x=t$ 가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, 점 A 와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$ 라 하자.

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to -0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t 의 값의 합은? [4점]

① -7 ② -3 ③ 1 ④ 5 ⑤ 9

29. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ 3^2)$을 따를 때,

$\sum_{n=1}^{7} \mathrm{P}(X \le n) = a$이다. $10a$의 값을 구하시오. [4점]

2015 - 수능

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3} (x+5)h'(x)\,dx = 10$$

일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

21. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? [4점]

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌 구간 $[3, 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{2}{15}$ ④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

29. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 |f(x)|dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$
(나) $\int_2^3 |f(x)|dx = \int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

2016 - 06

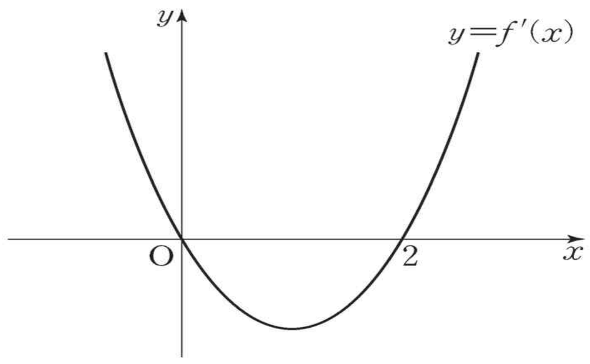
20. 첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(-1)^n\times 2 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+1 & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=43$일 때, a의 값은? [4점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

21. 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $f(0)<0$ 이면 $|f(0)|<|f(2)|$ 이다.

ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$ 이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값은 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$ 이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오.[4점]

30. 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

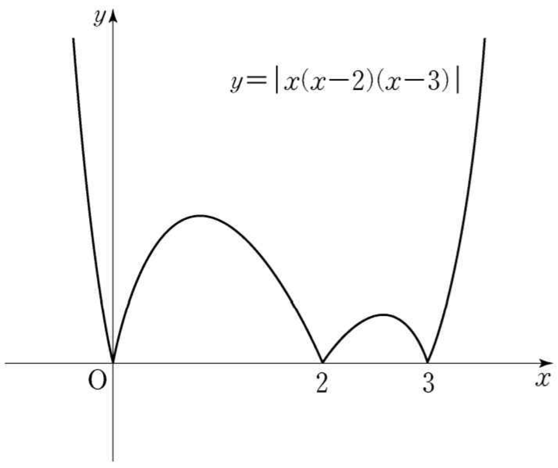
> $\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고
> $0<b-a\le\frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

2016 - 09

21. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
> (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

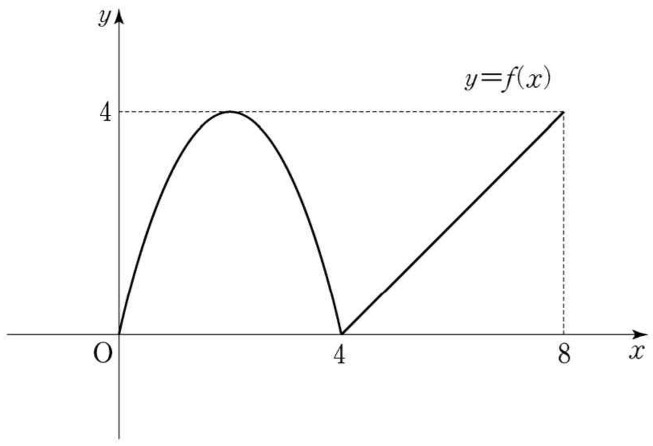
① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



29. 구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a\,(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)\,dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\left\{(x,\ y)\,\middle|\ 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{x+3}}{2}\right\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하자.

(가) 각 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 정수이다.
(나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

예를 들어 $f(14)=15$이다. $f(n) \le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [4점]

2016 - 수능

20. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)
(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)|\,dx = f(t)+f(0)$$

이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^k f'(x)\,dx < 0$
ㄴ. $0 < k \le 1$
ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 좌표평면에서 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+10 & (x<10) \\ (x-10)^2 & (x\geq 10) \end{cases}$$

과 자연수 n에 대하여 점 $(n, f(n))$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n이 있다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n, 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)$의 값은? [4점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

29. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10)>f(20)$
(나) $f(4)<f(22)$

m이 자연수일 때 $\mathrm{P}(17\leq X\leq 18)=a$이다. $1000a$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

30. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

2017 - 06

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1$ ($k>0$인 상수) 의 그래프 위의 서로 다른 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

21. 함수

$$f(x)=\frac{k}{x-11}+6 \quad (k \geq 36)$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 개수는?

> $|f(x)| \leq y \leq -x+5$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 2 이상 4 이하이다.

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

29. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1=a_1$$

이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} b_{n-1}+a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌경우}) \\ b_{n-1}-a_n & (n\text{이 3의 배수인경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10}=a_{10}$일 때, $\frac{b_8}{b_{10}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
> (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오.

2017 - 09

20. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

> 보기
> ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
> ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
> ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

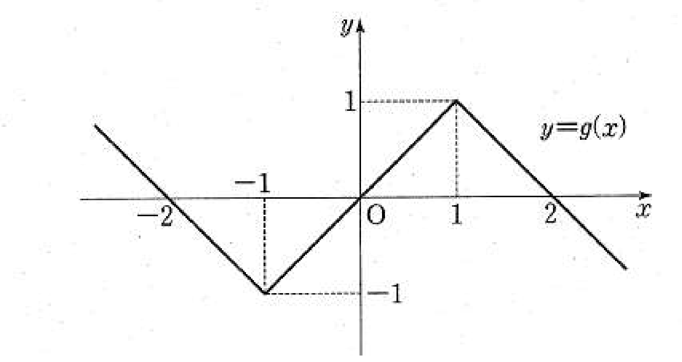
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 실수 a, b, c와 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ bx & (-1 \le x < 1) \\ x+c & (x \ge 1) \end{cases},$$
$$g(x)=|x+1|-|x-1|-x$$

에 대하여, 합성함수 $g \circ f$는 실수전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$의 값은?[4점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1
⑤ -2



29. 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

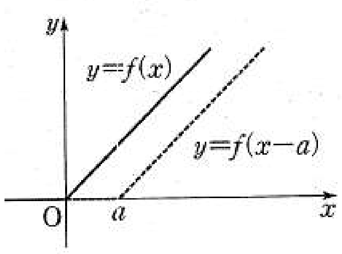
30. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

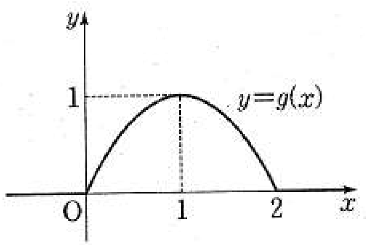
$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ x & (x>0) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x(2-x) & (|x-1| \le 1) \\ 0 & (|x-1|>1) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, b $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0 \le h(x) \le g(x)$일 때, $\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오.[4점]





2017 - 수능

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$
> (나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, k)$에서 $f'(x)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

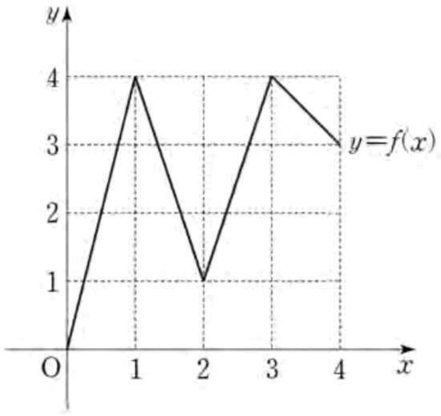
ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge -\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 닫힌 구간 $[0, 4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.



다음 조건을 만족시키는 집합 $X = \{a, b\}$의 개수는? (단, $0 \le a < b \le 4$) [4점]

> X에서 X로의 함수 $g(x) = f(f(x))$가 존재하고 $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$를 만족시킨다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

29. 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x > a) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x \le k) \\ 12(x-k) & (x > k) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$ 에 대하여 구간 $[0,\infty)$ 에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0\le x<1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
> (나) $n\le x<n+1$일 때,
> $$g(x)=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$$
> 이다. (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 $k\,(k\ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0\le x<5 \text{ 또는 } x\ge k) \\ 2x-g(x) & (5\le x<k)\end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\int_0^n h(x)dx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\dfrac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오. [4점]

2018 - 06

20. 자연수 n에 대하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^{8}a_n$의 값을 구하는 과정이다.

> 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여 $c+d=2k$이어야 한다.
> $c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 $k_1,\ k_2$에 대하여 $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 $k_3,\ k_4$에 대하여 $c=2k_3+1,\ d=2k_4+1$인 경우이다.
> (1) $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우 :$2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$개수는 [(가)] 이다.
> (2) $c=2k_3+1,\ d=2k_4+1$인 경우 :$2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$개수는 [(나)] 이다.
> (1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의개수 a_n은
> $a_n=$[(가)] + [(나)]이다. 자연수 m에 대하여
> $\sum_{n=1}^{m}$[(나)] $={}_{m+3}C_4$
> 이므로
> $\sum_{n=1}^{8}a_n=$ [(다)] 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n),\ g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r이라 할 때, $f(6)+g(5)+r$의 값은? [4점]

① 893 ② 918 ③ 943 ④ 968 ⑤ 993

21. 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)>-1$
(나) $f(1)-f(-1)>8$

[보기]

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x)\geq 0$이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b,(x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x,(x\geq 1) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

30. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 5이하의 모든 자연수 n에 대하여
> $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1)$이다.
> (나) $n=3$, 4,일 때, $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 아니다.

$128 \times f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]