110615 N제 해설

빠른 정답

1	80	2	①	3	243	4	⑤
5	②	6	4	7	③	8	②
9	④	10	①	11	④	12	⑤
13	④	14	①	15	③	16	②
17	④	18	⑤	19	③	20	⑤
21	④	22	⑤	23	②	24	②
25	⑤	26	①	27	③	28	①
29	①	30	①	31	③	32	①
33	①	34	③	35	18	36	④
37	②	38	⑤	39	490	40	③
41	17	42	36	43	82	44	④
45	③	46	24	47	③	48	431
49	105	50	③	51	②		

[소개]

1. 문항 제작 : 110615 (110615@naver.com)
2. 표지 제작 : penpoint (포만한 수학 연구소)
3. 해설 제작 : 사차함수 (포만한 수학 연구소)
4. 해설 강의 지원 : 서동범 선생님 (ET쌤)

https://class.orbi.kr/course/1547

[서평]

시중에 수많은 교재와 자료가 있지만,

"왜 수학 나형 응시자를 위한 양질의 자료는 잘 없을까?"

라는 생각을 항상 해왔습니다. 기출문제를 제외하면 학습소스가 부족한 나형 응시자들에게 110615 N제는 고득점을 위한 매우 귀중한 자료라고 생각합니다.

[문항별 난이도]

(해설 제작자의 주관에 따라 분류한 것임을 미리 밝힙니다.)

최상 : ★★★★
상 : ★★★
중상 : ★★
중 : ★

미적분 Ⅰ

1. 정답 80 (난이도: ★★★★)

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 정의하면 두 함수 $g_1(m)$와 $g_2(m)$는 각각 $F(x)=mx$의 실근 중 최솟값과 최댓값입니다.

즉, $y=F(x)$와 $y=mx$가 만나는 점의 x좌표 중에서 가장 작은 값이 $g_1(m)$이고 가장 큰 값이 $g_2(m)$입니다.

또한, $\dfrac{\int_0^{g_2(m)} f(t)dt-\int_0^{g_1(m)} f(t)dt}{g_2(m)-g_1(m)}=f(c)$ 에서

$\int_0^{g_1(m)} f(t)dt=F(g_1(m))$, $\int_0^{g_2(m)} f(t)dt=F(g_2(m))$이고, $f(c)=F'(c)$이므로 위 식을 다음과 같습니다.

$$\frac{F(g_2(m))-F(g_1(m))}{g_2(m)-g_1(m)}=F'(c)\ \cdots\ (1)$$

좌변은 $\mathrm{A}(g_1(m), F(g_1(m)))$와 $\mathrm{B}(g_2(m), F(g_2(m)))$의 기울기를 의미하고, 우변은 점 $\mathrm{C}(c, F(c))$에서의 접선의 기울기를 의미합니다. 또한,

$$g_1(m)<c<g_2(m)+1\ \cdots\ (2)$$

라는 조건도 만족시켜야 하므로 함수 $h(m)$은

"직선 AB의 기울기와 같은 접선의 기울기를 갖는 모든 점 $\mathrm{C}(c, F(c))$ 중에서 $g_1(m)<c<g_2(m)+1$인 C의 개수"

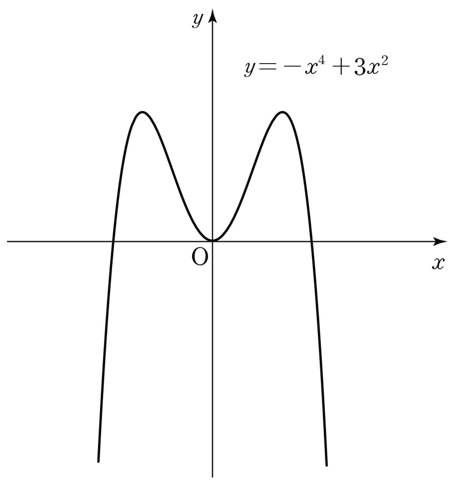
입니다. 이제 $h_1(m)$, $h_2(m)$를 구체적으로 살펴봅시다.

$$F(x)=\int_0^x(-4t^3+6x-1)dt=-x^4+3x^2-x$$

이므로 방정식 $F(x)=mx$는

$$-x^4+3x^2=(m+1)x$$

입니다. 위 식의 좌변의 함수 $y=-x^4+3x^2$의 그래프는



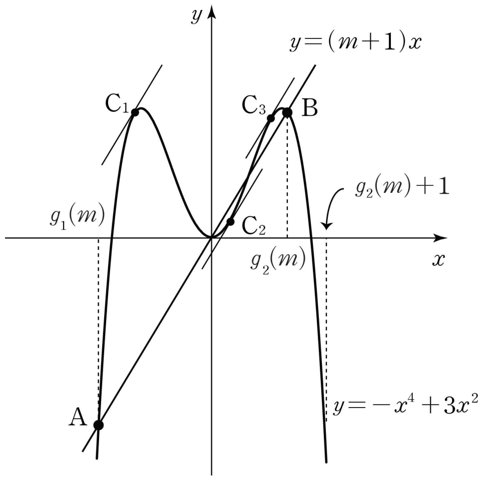
이고, 우변의 $y=(m+1)x$는 원점을 지나는 직선이므로 둘 사이의 관계를 파악하기 제대로 위해서는

"원점에서 곡선 $y=-x^4+3x^2$에 그은 접선"

을 미리 구해두시는 것이 좋습니다.
구해보시면 두 접선은 $y=2x$, $y=-2x$로 각각 나오고
두 접점은 각각 $(1,2)$, $(-1,2)$입니다.

<u>이제부터 m의 범위에 따라 나누어 생각합시다</u>.

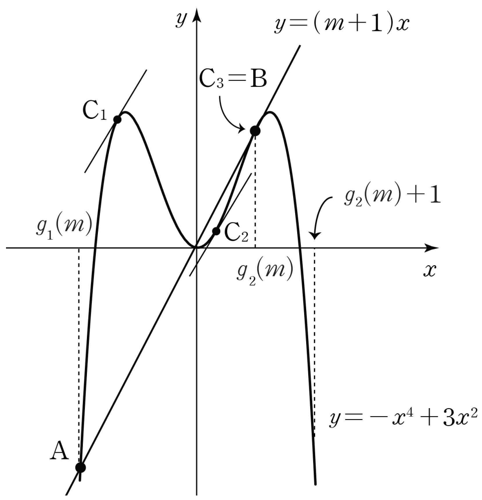
(i) $-3<m<1$인 경우



두 점 A, B는 위의 그림과 같고, 직선 AB의 기울기와 같은 접선의 기울기를 갖는 점 C는 3개 존재합니다.
여기서 $h(m)=3$이라고 바로 결론 내리면 안 되고, 세 점의 x좌표가 구간 $(g_1(m),\, g_2(m)+1)$에 속하는지를 검증하셔야 하는데, 위 그림에서 자명하게 속합니다.

$\therefore h(m)=3$

(ii) $m=1$인 경우

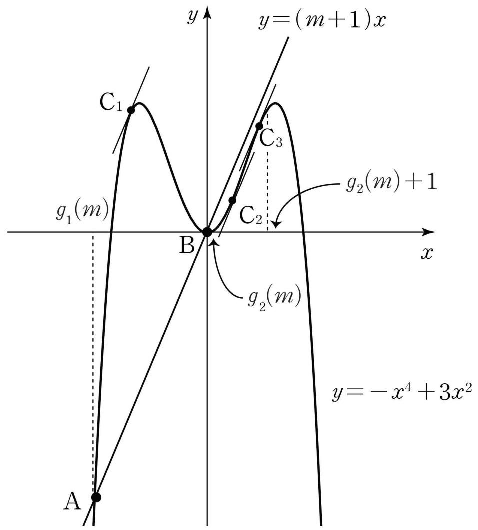


두 점 A, B는 위의 그림과 같고, 직선 AB와 같은 접선의 기울기를 갖는 점 C는 3개입니다. 또한, 이 경우에는 특별히 두 점 B, C_3가 서로 같은 점입니다.

마찬가지로 세 점의 x좌표가 구간 $(g_1(m),\, g_2(m)+1)$에 속하는지의 검증이 필요한데, 이 경우도 그림을 보시면 자명합니다.

$\therefore h(1)=3$

(iii) $1<m<2\sqrt{2}-1$인 경우



점 B가 원점이므로 $g_2(m)=0$이고, $g_2(m)+1=1$입니다.

가능한 점 C는 3개인데, 마찬가지로 세 점의 x좌표가 구간 $(g_1(m),\, g_2(m)+1)$에 속하는지 검증을 해봅시다.

우선, 점 C_1의 x좌표가 속하는 것은 자명합니다.
이제 C_2와 C_3의 x좌표도 속하는지 따져봐야 하는데,

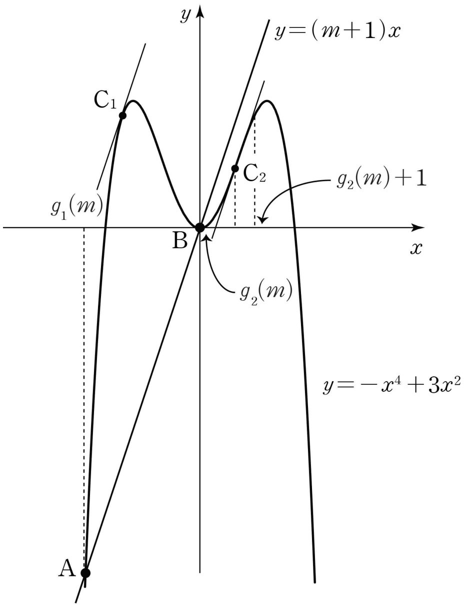
만약 C_3의 x좌표가 1보다 작을 경우 두 점 C_2, C_3의 x좌표는 주어진 구간에 속합니다.

그런데 원점에서 곡선 $y=-x^4+3x^2$에 그은 접점의 x좌표가 1이었던 것을 생각하면 C_3의 x좌표는 1보다 작아야 합니다.

따라서 세 점 모두 x좌표가 주어진 구간에 속하므로 $h(m)=3$입니다.

made by 110615 (110615@naver.com)

(iv) $m=2\sqrt{2}-1$인 경우[1]



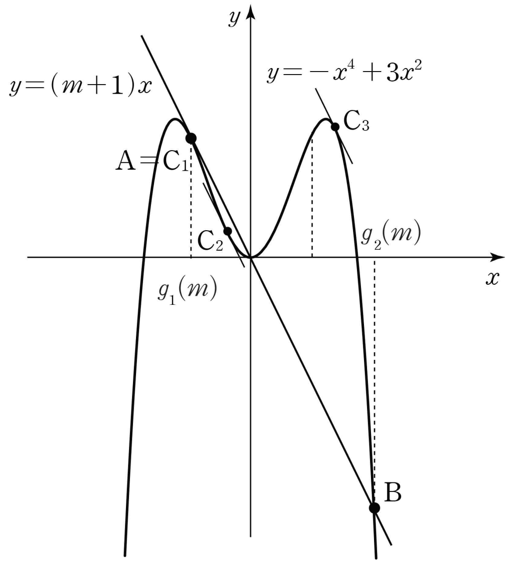
이 경우는 가능한 점 C가 2개이고, 두 점의 x좌표가 모두 구간 $(g_1(m),\ g_2(m)+1)$에 속하므로 $h(2\sqrt{2}-1)=2$ 입니다.

(v) $m>2\sqrt{2}-1$인 경우

더 이상 $x>0$인 영역에서 평행한 접선을 그을 수 없기 때문에 가능한 점 C는 오직 한 개입니다.

$\therefore\ h(m)=1$

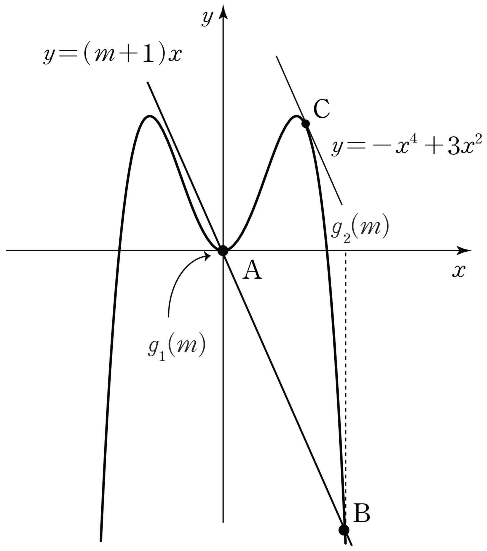
(vi) $m=-3$인 경우



두 점 A, B는 위 그림과 같고, 가능한 점 C는 세 개입니다. 또한, $A=C_1$이므로 C_1의 x좌표는 $g_1(m)$입니다.

따라서 C_1의 x좌표만 구간 $(g_1(m),\ g_2(m)+1)$에 속하지 않고, 나머지 점들은 모두 속하므로 $h(-3)=2$입니다.

(vii) $m<-3$인 경우



$m<-3$부터는 점 A가 원점이 되어 $g_1(m)=0$이므로 $x<0$인 영역에서 생기는 점 C에는 관심이 없습니다.

$x>0$인 영역에서 생기는 점 C는 항상 한 개이고, 구간 $(g_1(m),\ g_2(m)+1)$에 속하는 것을 알 수 있습니다.

$\therefore\ h(m)=1$

종합하면, 함수 $h(m)$이 $m=k$에서 불연속인 k의 값은 $k=2\sqrt{2}-1$과 $k=-3$입니다.

따라서 $(2\sqrt{2}-1)-3=2\sqrt{2}-4=\sqrt{8}-4$이므로 $a^2+b^2=80$입니다.

2. 정답 ① (난이도: ★)

함수 $f(x)$의 점 $(3,1)$에서의 접선은 다음과 같습니다.

$$y=f'(3)(x-3)+1$$

이 접선이 곡선 $y=x^2-7$과 접해야 합니다. 이차함수와 접하는 상황이므로 미분보다는 판별식을 활용합시다.
두 식을 연립한 식

$$x^2-f'(3)x+3f'(3)-8=0$$

에서 $D=\{f'(3)\}^2-4\times1\times\{3f'(3)-8\}=0$이므로

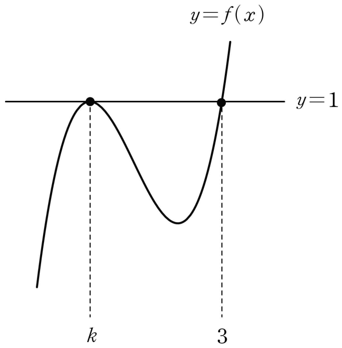
1) $m=2\sqrt{2}-1$인 경우는 접선의 기울기가 극대인 순간입니다. 변곡점에 대해서 아시는 분들은 변곡점에서의 접선의 기울기로 생각하셔도 될 듯합니다.

$$f'(3)=4 \text{ 또는 } f'(3)=8$$

입니다. 그런데 $f(x)$의 극댓값이 1인 것에 주목합시다.

함수 $f(x)$가 점 $(3,1)$을 지나는데, 이 점의 y좌표가 1이므로 극댓값과 동일한 값입니다. 그런데 이 점에서는 극대가 아닙니다. 만약 $(3,1)$에서 극대일 경우 $f'(3)=0$이기 때문입니다.

따라서 $f(x)$가 극대가 되는 점의 x좌표를 $k\ (k<3)$라 놓고, 다음과 같이 그림을 그려봅시다.



그림에서 $f(x)-1=(x-k)^2(x-3)$이라 세울 수 있고, $f'(x)=2(x-k)(x-3)+(x-k)^2$이므로

$$f'(3)=4 \text{ 또는 } f'(3)=8$$

의 두 경우에 대해서 검증해봅시다.

(i) $f'(3)=4$인 경우
$f'(3)=(3-k)^2=4 \Leftrightarrow k=1$ 또는 $k=5$

(ii) $f'(3)=8$인 경우
$f'(3)=(3-k)^2=8 \Leftrightarrow k=3-2\sqrt{2}$ 또는 $k=3+2\sqrt{2}$

문제 조건에서 $f(0)$이 정수이므로
$f(0)-1=(0-k)^2(0-3)$에서
$f(0)=-3k^2+1$의 값이 정수가 되어야 합니다.

$k<3$이므로 가능한 $k=1$인 경우만 가능합니다.

$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-3)+1 \Rightarrow f(2)=0$

3. 정답 243 (난이도: ★★)

함수 $g(x)$는 다음을 만족시킵니다.

$$g(x)=(x+1)f(x) \cdots (1),\ g(x)=g(-x) \cdots (2)$$

식 (1)에 $x=-1$을 대입하면 $g(-1)=0$이고,
식 (2)에 $x=-1$을 대입하면 $g(-1)=g(1)=0$입니다.

함수 $g(x)$는 $x=\pm 1$을 근으로 갖고, y축 대칭이므로

$$g(x)=a(x^2-1)(x^2+b) \cdots (3)$$

라 세울 수 있고, 이를 식 (1)과 비교하면

$$f(x)=a(x-1)(x^2+b) \cdots (4)$$

를 얻습니다. 그런데 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고, (나) 조건에서 $f(0)=-ab>0$이므로 $a>0$, $b<0$입니다.

$f(x)=0$의 실근의 개수는 다음과 같이 분류됩니다.

(i) $b=-1$
이 경우 $f(x)=a(x-1)^2(x+1)$이므로
$f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2가 됩니다.

(ii) $b\neq -1$인 음수
이 경우 $f(x)=a(x-1)(x^2+b)=0$이므로
$x=1$과 $x=\pm\sqrt{-b}$로 총 3개가 됩니다.

(다) 조건에서 함수 $|h(x)f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다는 것은 방정식 $h(x)f(x)=0$의 모든 실근의 중복도가 2 이상임을 의미합니다.[1)]

따라서 (ii)의 경우는 가능하지 않습니다.

왜냐하면 일차함수 $h(x)=0$의 실근이 어떤 값을 갖더라도 방정식 $h(x)f(x)=0$의 모든 실근의 중복도가 2 이상이 되도록 할 수는 없기 때문입니다.

따라서 (i)와 같이 $b=-1$이고,
$f(x)=a(x-1)^2(x+1)$입니다.

또한, 방정식 $h(x)f(x)=0$의 모든 실근의 중복도가 2 이상이려면 $h(-1)=0$이므로 $h(x)=m(x+1)$입니다.

함수 $f(x)=a(x-1)^2(x+1)$는
$x=-\dfrac{1}{3}$에서 극댓값 $\dfrac{32}{27}a$을 갖기 때문에
$h(0)=-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{32}{27}a=32$입니다.

계산해보면 $\begin{cases} m=-\dfrac{1}{3} \\ a=27 \end{cases}$ 이므로 구하는 값은

$-f(h(5))=-f(-2)=243$

---

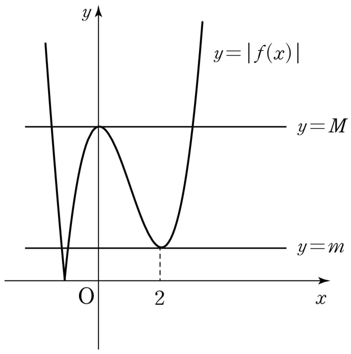
1) 예를 들어 $y=\left|x^2(x-1)(x-2)^3\right|$는 $x=0$과 $x=2$에서는 미분가능한데, $x=1$에서는 미분가능하지 않습니다.

made by 110615 (110615@naver.com)

4. 정답 ⑤ (난이도: ★★)

$f'(x) = 3x(x-2)$이므로 $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$입니다.
C의 범위 따라 $y = |f(x)|$의 개형을 분류해봅시다.

(i) $C > 4$인 경우[1]



그림에서 $||f(x)|-t|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는

$$g(t) = \begin{cases} 3 & (t > M) \\ 3 & (t = M) \\ 5 & (m < t < M) \\ 3 & (t = m) \\ 3 & (0 < t < m) \end{cases}$$

임을 알 수 있습니다.[2]

(+문제의 조건을 확인해보면 $t \le 0$인 구간에서의 $g(t)$에는 관심이 없기 때문에 양수인 구간에서만 생각하겠습니다.)

그런데 이 경우는 $\lim_{t\to1-} g(t) - \lim_{t\to3+} g(t) > 2$라는 조건을 항상 만족시키지 못합니다.

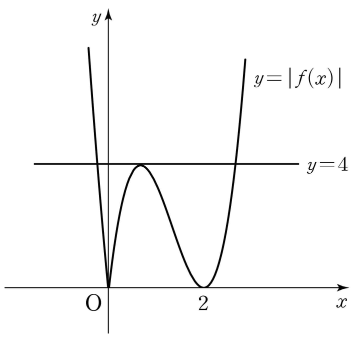
따라서 (i)는 우리가 원하는 경우가 아닙니다.

1) $C > 4$인 경우는 $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$의 극솟값이 양수입니다.

2) 혹시나 이 과정이 이해가 안 되시는 분들은 아래의 기출문제를 다시 풀어보시길 권합니다.

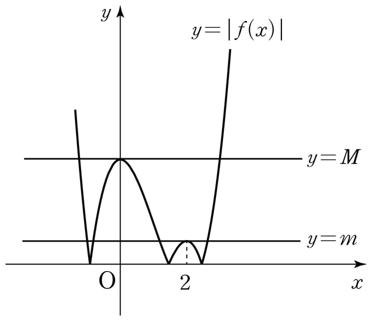
> **[2011학년도 수능 수리 가형 24번]**
> 최고차항의 계수가 1이고, $f(0) = 3$, $f'(3) < 0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를
>
> $S = \{a \mid$ 함수 $|f(x)-t|$가 $x = a$에서 미분가능하지 않다.$\}$
>
> 라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t = 3$과 $t = 19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

(ii) $C = 4$인 경우



이 경우 $g(t) = \begin{cases} 3 & (t \ge 4) \\ 5 & (0 < t < 4) \end{cases}$이므로 (i)에서와 같은 이유로 주어진 조건을 만족시키지 못합니다.

(iii) $2 < C < 4$인 경우



이 경우에는 $f(2) < 0 < f(0)$, $|f(0)| > |f(2)|$입니다.

또한, $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차이가 4이므로
$f(0) - f(2) = 4 \Leftrightarrow M + m = 4$라는 점에도 주목합시다.

함수 $g(t)$는 다음과 같습니다.

$$g(t) = \begin{cases} 5 & (t \ge M) \\ 7 & (m \le t \le M) \\ 9 & (0 < t < m) \end{cases}$$

$\lim_{t\to1-} g(t) - \lim_{t\to3+} g(t) > 2$를 만족시키기 위해서는
$\lim_{t\to1-} g(t) = 9$, $\lim_{t\to3+} g(t) = 5$가 되는 경우 밖에 없습니다.

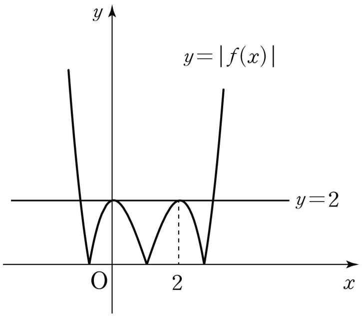
또한, $\lim_{t\to1+} g(t) = \lim_{t\to3-} g(t)$가 성립하기 위해서는
함수 $g(t)$가 $t = 1, 3$에서 각각 불연속이어야 하므로
$M = 3$, $m = 1$가 되어야 합니다.

즉, $f(x)$의 극댓값이 3, 극솟값이 -1이므로
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$입니다.

$f(x) = x$의 정수근이 존재하는지 확인해야 하는데,
$x^3 - 3x^2 + 3 - x = (x-3)(x^2-1) = 0$에서 $x = 3, \pm1$입니다.

즉, 정수근이 존재하므로 조건에 위배됩니다.

(iv) $C=2$인 경우



이 경우 $g(t)=\begin{cases}5 & (t \geq 2)\\ 9 & (0<t<2)\end{cases}$이므로

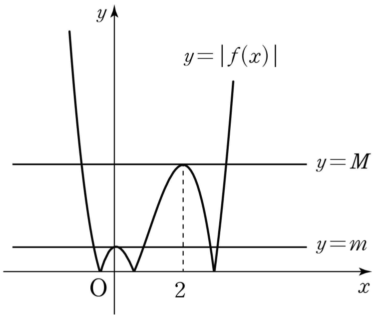
$$\lim_{t\to 1-}g(t)-\lim_{t\to 3+}g(t)>2$$

가 성립하는 경우는 가능하지만,

$$\lim_{t\to 1+}g(t)=\lim_{t\to 3-}g(t)$$

까지 동시에 만족시키는 경우는 존재하지 않습니다.

(v) $0<C<2$인 경우



이 경우는 (iii) $2<C<4$인 경우와 좌우 대칭이므로 함수 $g(t)$가 동일합니다.

다만 달라지는 것은 $f(x)$의 극댓값이 1이고,
극솟값이 -3이 된다는 것입니다.

즉, $f(x)$가 $x=0$에서 극대이므로 $f(0)=1$에서
$f(x)=x^3-3x^2+1$입니다.

이 경우에도 방정식 $f(x)=x$의 정수근이 존재하는지 검증이 필요한데, $p(x)=f(x)-x=x^3-3x^2-x+1$이라 정의하면

$$p(-1)=-2<0$$
$$p(0)=1>0$$
$$p(1)=-2<0$$
$$p(2)=-5<0$$
$$p(3)=-2<0$$
$$p(4)=13>0$$

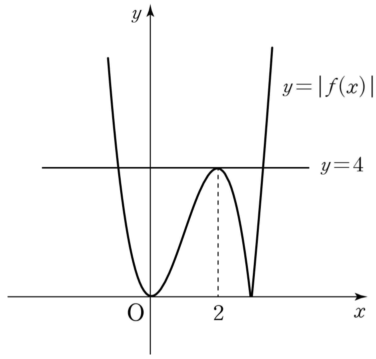
이므로 $p(x)=0$의 세 실근은 $(-1,0)$, $(0,1)$, $(3,4)$에 각각 존재합니다. 즉, 정수근은 존재하지 않습니다.

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+1$로 확정 지을 수 있습니다.

$\therefore f(5)=5^3-3\times 5^2+1=51$

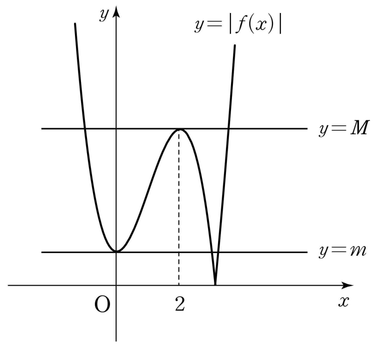
(+문제 푸는 입장에서는 지금 마무리 지어도 되지만,
공부하는 입장이므로 남은 경우까지 확인해보겠습니다.)

(vi) $C=0$인 경우



이 경우는 (ii) $C=4$인 경우와 좌우 대칭이므로 $g(t)$가 동일합니다. 따라서 조건에 위배됩니다.

(vii) $C<0$인 경우



이 경우는 (i) $C>4$인 경우와 좌우 대칭이므로 함수 $g(t)$가 동일합니다. 따라서 조건에 위배됩니다.

5. 정답 ② (난이도: ★)

(나) 조건에서 $[f'(x)]$의 $x=-3$과 $x=-1+\sqrt{5}$에서의 좌극한의 값이 각각 주어져 있습니다.

$$\lim_{x\to -3-}[f'(x)]=0,\quad \lim_{x\to(-1+\sqrt{5})-}[f'(x)]=0$$

그런데 (가) 조건에서 각각의 우극한 값들의 곱이

$$\lim_{x\to -3+}[f'(x)]\times\lim_{x\to(-1+\sqrt{5})+}[f'(x)]=-1$$

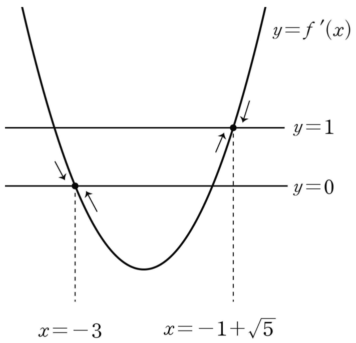
made by 110615 (110615@naver.com)

라는 조건을 통해 $[f'(x)]$의 $x=-3$, $x=-1+\sqrt{5}$에서의 우극한 값은 모두 0이 아닌 것을 알 수 있습니다.

따라서 함수 $[f'(x)]$는 $x=-3$, $x=-1+\sqrt{5}$에서의 좌극한 값과 우극한 값이 서로 다르기 때문에 $x=-3$, $x=-1+\sqrt{5}$에서 각각 불연속입니다.

이로부터 $f'(x)$의 $x=-3$, $x=-1+\sqrt{5}$에서의 함숫값이 모두 정수가 되어야 한다는 추론을 해볼 수 있습니다.[1]

가능한 정수의 조합 중에서 주어진 (가), (나) 조건을 동시에 만족시키는 경우는 그림의 경우 밖에 없습니다.



삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이므로 이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 1입니다.

이차함수 $f'(x)$의 꼭짓점의 좌표를 (a, b)라 하면 $f'(x)=(x-a)^2+b$라 세울 수 있습니다.

이제 $f'(-3)=0$, $f'(-1+\sqrt{5})=1$라는 조건을 활용하여 미지수만 결정해주면 됩니다.

그런데 여기서 한 가지 꼼수(?)를 생각해보면 $f'(x)=(x-a)^2+b$이므로 $f'(-1+\sqrt{5})=1$를 먼저 대입하여

$$(-1+\sqrt{5}-a)^2+b=1$$

를 얻어냅니다. 그리고 루트가 나오면 싫으니까 $a=-1$이라 믿어봅시다. 그러면 위 식은 $5+b=1$이므로 $b=-4$입니다.

결국 $f'(x)=(x+1)^2-4$이므로 위 식이 맞는지 확인하기 위해서 $f'(-3)=0$인지만 검증하면 됩니다. 대입해보면 성립합니다. 따라서 믿음이 통했습니다.

1) 가우스 함수의 불연속 후보는 함숫값이 정수가 되는 지점입니다. 이는 다음의 필요충분 관계를 생각해보면 알 수 있습니다.

$$[x]=n \Leftrightarrow n \le x < n+1 \text{ (단, } n\text{은 정수)}$$

$f'(x)=(x+1)^2-4$이므로 방정식 $f'(x)=0$을 풀어보면

$$x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

가 나옵니다. 따라서 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖습니다.

결국 (다)에서 $x \ge 0$에서 $f(x)$의 최솟값이 0이라는 조건은 $f(1)=0$이라는 것과 같습니다.

$f'(x)$를 적분하여 $f(x)=\frac{1}{3}(x+1)^3-4x+C$라 세운 뒤 $f(1)=0$을 대입하면 $f(x)=\frac{1}{3}(x+1)^3-4x+\frac{4}{3}$을 얻습니다.

$\therefore f(4)=\frac{125}{3}-16+\frac{4}{3}=27$

6. 정답 4 (난이도: ★★)

개념을 하나 소개하기 위해 문제를 던져 보겠습니다.

[문제] : 실수 t에 대하여 두 점 $\mathrm{P}(t, 2t)$, $\mathrm{Q}(2, 0)$ 사이의 거리의 최소가 되는 t의 값은?

이 문제를 어떻게 푸셨나요?
아마 대부분 다음 두 가지 중에 하나로 푸셨을 겁니다.

① 두 점 사이의 거리 공식을 활용하는 방법
② 점 P가 $y=2x$ 위의 점이라는 것을 통해 그래프로 접근하는 방법

여기서는 ①의 풀이에 초점을 맞춰봅시다.

두 점 사이의 거리를 $d(t)$라 하면
$d(t)=\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(t-2)^2+(2t)^2}=\sqrt{5t^2-4t+4}$ 입니다.

이제 $d(t)$가 최소가 되는 순간을 구해야 하는데, 아마 대부분이 그냥 루트 안쪽이 최소여야 하므로 $5t^2-4t+4$가 최소가 되는 순간을 구해서 푸셨을 것 같습니다.

즉, $d(t)$가 최소가 되는 순간을 구하기 위해 이미 자연스럽게 $\{d(t)\}^2=5t^2-4t+4$이 최소가 되는 순간을 구했을 겁니다.

이처럼 어떤 함수의 제곱의 최대 최소가 되는 순간은 그 함수의 절댓값이 최대 최소가 되는 순간과 같습니다. 극대/극소도 이와 마찬가지로 이해할 수 있습니다.

made by 110615 (110615@naver.com)

즉, 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

임의의 연속함수 $f(x)$에 대하여
"$|f(x)|$의 최대, 최소(or 극대, 극소)에 대한 논의는 $\{f(x)\}^2$의 최대, 최소(or 극대, 극소)의 논의와 같다."[1]

위의 지식을 바탕으로 <u>주어진 문제를 풀어봅시다.</u>

$f(x)=\{2x^3-3(k+1)x^2+6kx\}^2$이므로
편의상 $g(x)=2x^3-3(k+1)x^2+6kx$라고 해봅시다.

$f(x)=\{g(x)\}^2$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수가 3이라는 조건은 결국 $|g(x)|$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수가 3이라는 것과 동일한 조건입니다.

$g(x)=2x^3-3(k+1)x^2+6kx$을 미분해봅시다.

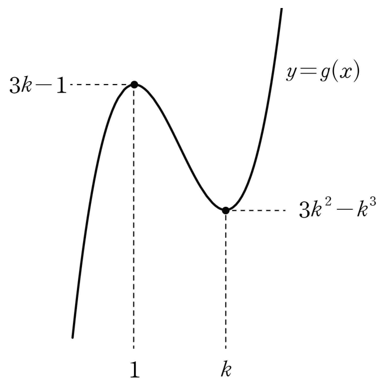
$$\begin{aligned} g'(x)&=6x^2-6(k+1)x+6k \\ &=6(x-1)(x-k) \\ &=0 \end{aligned}$$

만약 $k=1$일 경우 모든 실수 x에 대하여
$g'(x)\geq 0$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 실수 전체의 집합에서 증가합니다.

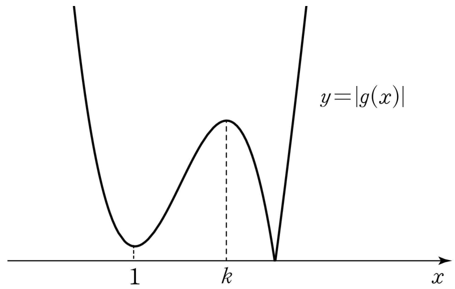
이 경우는 $y=|g(x)|$의 극대 또는 극소가 되는 x의 개수가 무조건 1입니다. 따라서 조건에 모순입니다.

이제 $k>1$ 또는 $k<1$로 경우를 나누어 생각합시다.

(i) $k>1$인 경우



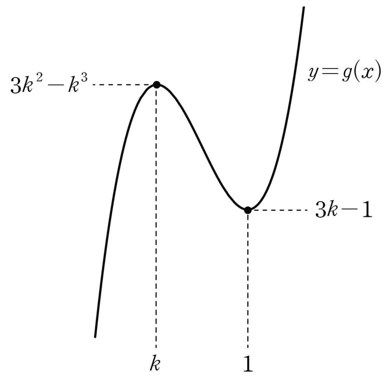
$y=|g(x)|$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값이 3개면서 $y=|g(x)|$가 $x=1$에서 극솟값을 갖도록 하는 경우는 다음과 같습니다.



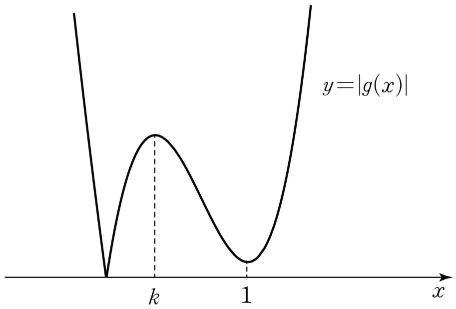
$y=|g(x)|$가 위 그림과 같이 되기 위해선
$g(1)=3k-1$의 값이 0보다 작거나 0이 되어야 합니다.

즉, $g(1)=3k-1\leq 0$이므로 $k\leq\dfrac{1}{3}$인데, 이는 $k>1$인 것에 모순입니다.

(ii) $k<1$인 경우



마찬가지로 조건을 만족시키는 $y=|g(x)|$의 그래프는 다음과 같습니다.



즉, $g(1)=3k-1$의 값이 0 이상이 되어야 하므로
$g(1)=3k-1\geq 0$에서 $k\geq\dfrac{1}{3}$입니다.

$\therefore \dfrac{1}{3}\leq k<1$

k의 최솟값은 $\dfrac{1}{3}$이므로 $p+q=4$

1) 물론 극대 극소의 정의를 통해서도 $|f(x)|$의 극대 극소와 $\{f(x)\}^2$의 극대 극소는 논의가 같음을 보일 수 있습니다. 증명을 해보시면 생각보다 당연한 결과라고 느껴지실 겁니다.

7. 정답 ③ (난이도: ★)

$f(x)$의 극댓값이 $f(0)$이고, 극솟값이 $f\left(\frac{1}{3}\right)$이라는 것과

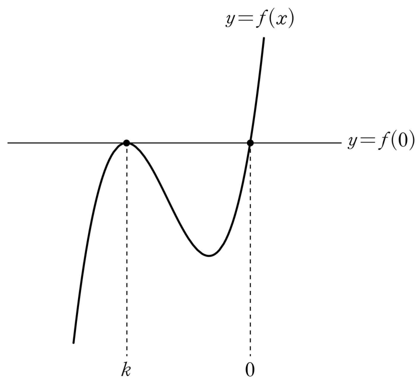
$f(x)$가 $x=0$, $x=\frac{1}{3}$에서 극대, 극소라는 것이
필요충분관계가 아니라는 것을 먼저 인식해야 합니다.
($\Leftarrow$ 방향만 참)

만약 $f(x)=ax^3+bx^2+ax$가 $x=0$에서 극대라고
가정해봅시다. 그러면 $f'(0)=0$이므로 $a=0$이 나옵니다.

그런데 이는 $f(x)$가 삼차함수라는 조건에 모순입니다.
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대가 아닙니다.

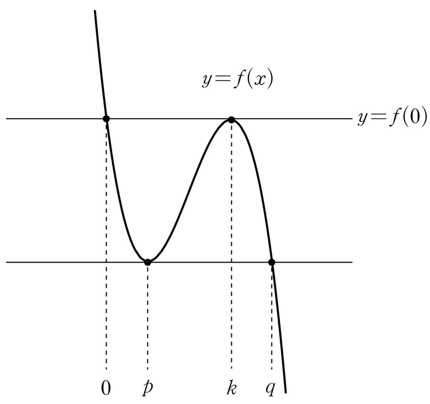
$y=f(x)$의 개형을 파악하기 위해 a에 따라 나눕시다.

(i) $a>0$



그림을 보면 $x>0$인 구간에서 극솟값이 발생할 수 없기
때문에 $f\left(\frac{1}{3}\right)$이 극솟값이 될 수 없습니다.

(ii) $a<0$



구간 $[-1,2]$에서 $f(x)$의 최댓값이 12이므로
$f(-1)=12$가 되어야 합니다. 또한 $f\left(\frac{1}{3}\right)$가 극솟값이
되기 위해서는 $p=\frac{1}{3}$ 또는 $q=\frac{1}{3}$입니다.

① $p=\frac{1}{3}$이라면, $k=1$이므로 $f(x)=ax(x-1)^2$입니다.
$f(-1)=12$을 통해 $a=-3$을 얻게 되고, 다시 전개하여
$f(x)=ax^3+bx^2+ax$와 비교하면 $b=6$을 얻습니다.

② $q=\frac{1}{3}$이라면, $k=\frac{1}{4}$이므로 $f(x)=ax\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$입니다.
그런데 $f(x)=ax^3+bx^2+ax$와는 일차항의 계수부터가
다르기 때문에 $f(x)=ax\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$는 불가능 합니다.

따라서 ① 의 경우인 $\begin{cases} a=-3 \\ b=6 \end{cases}$ 입니다.

$\therefore\ f(2)=10a+4b=-6$

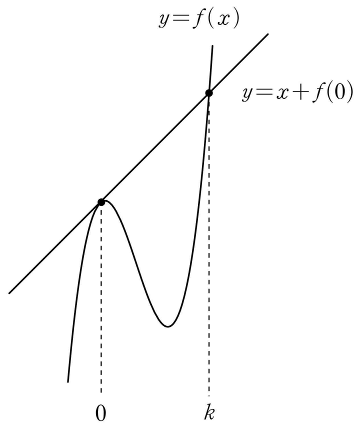
8. 정답 ② (난이도: ★)

(다) 조건을 먼저 생각해봅시다.

두 함수 $y=x+f(0)$와 $y=f(x)$가 서로 다른 두 점에서
만난다는 것은 삼차함수의 특성상 두 교점 중에
한 점에서는 반드시 접할 수밖에 없음을 의미합니다.

또한 점 $(0, f(0))$이 두 그래프의 교점 중 하나인 것이
자명한데, 이 점이 접점일지 단순 교점일지는
다음 두 가지 경우로 나누어 생각해봅시다.

(i) (접점의 x좌표)$<$(교점의 x좌표)



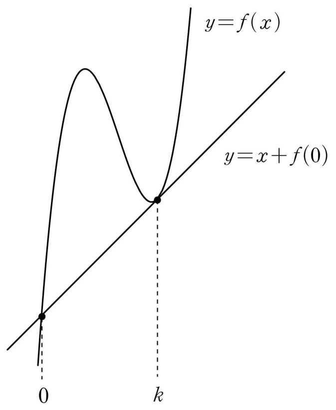
이 경우에는 점 $(0, f(0))$이 반드시 접점입니다.
만약 접점이 아닌 단순 교점일 경우에는 $f'(1)=0$을
만족시키지 못하기 때문입니다.

그림에서 $f(x)-(x+f(0))=x^2(x-k)$이므로 미분하면
$f'(x)-1=3x^2-2kx$이고, $f'(1)=0$에서 $k=2$입니다.

$\therefore\ f'(x)=3x^2-4x+1\ \Rightarrow\ f'(-1)=8$

made by 110615 (110615@naver.com)

(ii) (접점의 x좌표) > (교점의 x좌표)



이 경우에는 $f'(1)=0$을 만족시키기 위해서는
점 $(0, f(0))$이 두 그래프의 접점이 아닌 교점이어야 합니다. $f(x)-(x+f(0))=x(x-k)^2$을 미분하면
$f'(x)-1=3x^2-4kx+k^2$이므로 $f'(1)=0$을 활용하면
$k=2$입니다.

$\therefore f'(x)=3x^2-8x+5 \Rightarrow f'(-1)=16$

가능한 모든 $f'(-1)$의 값의 합은 $8+16=24$

9. 정답 ④ (난이도: ★★★)

한 가지 눈여겨볼만한 포인트는
주어진 함수 $|f(|x|-a)+b|$가 우함수인데,
미분가능하지 않은 점의 개수는 5 또는 7로 홀수인 것입니다.

만약 우함수가 $x=k\,(k\neq 0)$에서 미분가능하지 않다면,
대칭성에 의해 $x=-k$에서도 미분가능하지 않습니다.

즉, 미분가능하지 않은 점의 개수는 '쌍'으로 존재하는데,
홀수개의 점에서 미분가능하지 않다는 것은

"$x=0$에서 미분가능하지 않음"

을 의미합니다.

또한, 미분가능하지 않은 점의 개수가 5 또는 7이라는 조건으로부터 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하지 않은 점의 개수가 2 또는 3인 것을 추가로 확인할 수 있습니다.

이제부터 구간 $[0, \infty)$에서만 생각하도록 합시다.

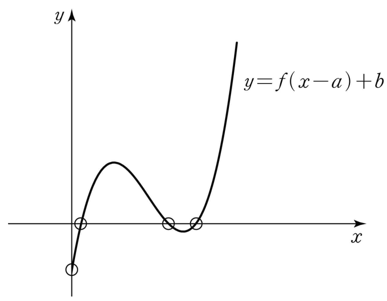
구간 $[0, \infty)$에서 주어진 함수는 $|f(x-a)+b|$이므로
$y=f(x)$를 x축으로 $+a$, y축으로 $+b$만큼 평행이동 시킨 뒤에 절댓값을 씌운 것으로 해석할 수 있습니다.

① $a=1, 2, 3, 4$인 경우

함수 $y=f(x-a)+b$의 $x=0$에서의 미분계수인
$f'(-a)$의 값이 0이 아닙니다.

그러면 함수 $y=f(|x|-a)+b$를 생각했을 때,
이 함수는 $x=0$에서 미분가능하지 않습니다.

또한, $|f(x-a)+b|$의 구간 $(0, \infty)$에서의 미분가능하지 않은 점의 개수가 2 또는 3이 되기 위해서는
$y=f(x-a)+b$의 그래프가 다음과 같아야 합니다.



즉, 이 함수의 극댓값과 극솟값의 부호가 달라야 하므로
$(f(0)+b)(f(4)+b)=(0+b)(-4+b)<0$
즉, $0<b<4$이므로 $b=1, 2, 3$입니다.

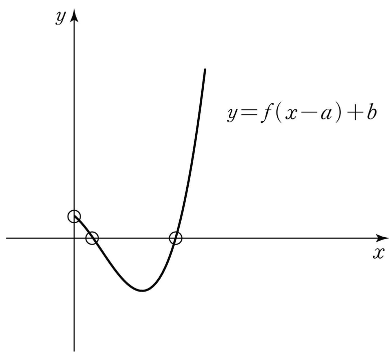
따라서 이 경우 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4\times 3=12$

② $a=0$인 경우

$f'(0)=0$이므로 $|f(|x|)+b|$가 $x=0$에서 미분가능 합니다. 그 다음은 볼 것도 없습니다.

③ $a=-1, -2, -3$인 경우

주어진 조건을 만족시키기 위해선
함수 $y=f(x-a)+b$가 다음 그림과 같아야 합니다.



즉, $x=0$에서의 함숫값과 $f(x-a)+b$의 극솟값이 부호가 달라야 합니다.

즉, $(f(-a)+b)(-4+b)<0$

(1) $a=-1$인 경우 : $(f(1)+b)(-4+b)<0$
즉, $\frac{5}{8}<b<4$이므로 $b=1, 2, 3$

(2) $a=-2$인 경우 : $(f(2)+b)(-4+b)<0$
즉, $2<b<4$이므로 $b=3$

(3) $a=-3$인 경우 : $(f(3)+b)(-4+b)<0$
즉, $\frac{27}{8}<b<4$이므로 정수 b는 존재하지 않습니다.

따라서 이 경우 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3+1+0=4$

④ $a \le -4$

이 경우는 $f(x-a)+b$가 양수 전체의 집합에서 증가하는 개형이므로 조건을 만족시킬 수 없습니다.

따라서 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $12+4=16$

10. 정답 ① (난이도: ★)

(나) 조건을 보자마자

$$f(x)-2=(x-a)(x-k)^3 \quad (a<0)$$

로 세울 수 있어야 합니다. 이게 바로 떠오르지 않으면 아래 기출문제를 다시 공부합시다.[1]

조건 (가)에 주어진 $f(|x|)$는 구간에 따라 정의된 함수입니다.

$$\begin{cases} f(x) & (x \ge 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이 함수가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 $f'(0)=-f'(0)$가 되어야 합니다. 즉, $f'(0)=0$이어야 합니다. 그런데 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{3a+k}{4}$ 또는 $x=k$입니다.

만약 $k=0$일 경우 $f(0)=2$이고, $f(x)$가 $x>0$에서 증가하므로 $f(|x|)$의 최솟값은 $\frac{5}{16}$가 아니라 2입니다.

따라서 $\frac{3a+k}{4}=0$이므로 $k=-3a$가 되어야 합니다.

함수 $f(x)=(x-a)(x+3a)^3+2$는 $x=0$에서 최소이므로 $f(|x|)$의 최솟값은 $f(0)$와 같습니다.
즉, $\frac{5}{16}=-27a^4+2$이므로 $a=-\frac{1}{2}$입니다.

$$\therefore f(1)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3}{2}\right)^3+2=\frac{29}{16}$$

11. 정답 ④ (난이도: ★)

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$에서 초항 a와 공비 r만 구하면 됩니다.

두 삼각형 BAF와 BQD는 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{AF}}=3:1$인 것으로부터 $\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{QD}}=3:1$입니다.
편의상 $\overline{\mathrm{BQ}}=3k$, $\overline{\mathrm{QD}}=k$라 합시다.

점 B에서 선분 DC의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\angle \mathrm{BAF}=60^\circ$인 것으로부터
$\overline{\mathrm{QH}}=\frac{3}{2}k$, $\overline{\mathrm{BH}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}k$임을 얻은 뒤에 삼각형 BDH에서 피타고라스 정리를 활용하면 $k=\frac{4}{3\sqrt{7}}$입니다.

또한 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DQ}}=\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{DB}}=1:\frac{1}{\sqrt{7}}$에서
$\overline{\mathrm{CD}}:\frac{4}{3}=1:\frac{1}{\sqrt{7}}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{4\sqrt{7}}{3}$이고,
$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{CD}}-k-3k=\frac{4\sqrt{7}}{3}-4\times\frac{4}{3\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}$가 나옵니다.

두 삼각형 ABC와 PQR의 길이의 비는
$4:\frac{4}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}:1$이므로 넓이의 비는 $7:1$입니다.
즉, $r=\frac{1}{7}$

또한, 초항은 색칠된 세 개의 삼각형의 넓이의 합인데,
$\overline{\mathrm{DQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=\frac{4}{3\sqrt{7}}:\frac{4}{\sqrt{7}}=1:3$이므로 세 삼각형의 넓이의 합은 삼각형 PQR의 넓이와 같습니다.
즉, $a=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

---

1) 기출 문제

[2010학년도 6월 평가원 수리 가형 24번]
사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

made by 110615 (110615@naver.com)

12. 정답 ⑤ (난이도: ★★)

함수 $g(x)$는 $g(x)=f'(-2)(x+2)+f(-2)$입니다.
(나) 조건으로부터 다음 두 가지를 얻습니다.

(1) $f'(-2)\le -1$인 정수
(2) $2f'(-2)+f(-2)\ge 1$인 정수

그런데 (가)에서 $f(-2)<4$이므로
가능한 경우는 $f'(-2)=-1$, $f(-2)=3$ 밖에 없습니다.

또한 $f(0)<0$이므로 사이값 정리에 의하여
구간 $(0,2)$에 $f(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재합니다. 그런데 $f(x)=0$의 실근이 정수이므로
$f(-1)=0$입니다.

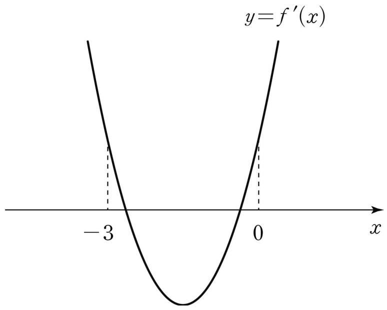
$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$로 놓고 연립하면
$a=-7$, $b=-17$, $c=-11$가 나옵니다.

$\therefore f(x)=-x^3-7x^2-17x-11 \Rightarrow f(0)=-11$

13. 정답 ④ (난이도: ★)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 정수)라고
세운 뒤에 (가), (나)에서 조건을 최대한 뽑아내봅시다.

먼저 (가)에서 $f'(1)=12$이므로 $2a+b=9 \cdots (1)$
또한 (나)에서 $f(x)$가 구간 $(0,3)$에서 극대와 극소를 갖는다고 했기 때문에 아래 그림을 생각할 수 있습니다.



① 축의 위치 : $-3<-\frac{a}{3}<0 \Leftrightarrow 0<a<9 \cdots (2)$
② 판별식 : $(2a)^2-4\times3\times b>0 \Leftrightarrow a^2-3b>0 \cdots (3)$
③ 함숫값 : $f'(0)>0 \Leftrightarrow b>0 \cdots (4)$
④ 함숫값 : $f'(-3)>0 \Leftrightarrow -6a+b+27>0 \cdots (5)$

바로 부등식 영역 (a,b)을 생각하기에는 다소 복잡하므로 "방정식"을 통해 부등식을 간단히 해봅시다.

식 (1)에서 $b=9-2a$로 놓고 나머지에 대입하면,
식 (3) : $a>3$ 또는 $a<-9$
식 (4) : $a<\frac{9}{2}$
식 (5) : $a<\frac{9}{2}$

입니다. 이때, a가 정수이므로 $a=4$로 나옵니다.
따라서 $b=1$이므로 $f'(x)=3x^2+8x+1$입니다.

$\therefore f'(2)=29$

14. 정답 ① (난이도: ★)

합성함수 $g(f(x))$가 불연속이 되는 후보는 다음과 같습니다.

(i) $f(x)$가 불연속인 모든 x의 값
(ii) $g(X)$가 불연속인 X에 대하여 $f(x)=X$인 x의 값

여기서 $g(x)$는 삼차함수이므로 (ii)의 경우는 존재하지 않습니다. 따라서 (i)의 경우만 생각하도록 합시다.

그림에서 $y=f(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속입니다.

① $x=1$인 경우

$$\lim_{x\to1-}g(f(x))=g(1),\ \lim_{x\to1+}g(f(x))=g(3),\ g(f(1))=g(1)$$

② $x=3$인 경우

$$\lim_{x\to3-}g(f(x))=g(0),\ \lim_{x\to3+}g(f(x))=g(-1),\ g(f(3))=g(0)$$

(가) 조건에서 오직 한 점에서만 불연속이므로
다음 두 가지 경우가 존재합니다.

(i) $x=1$에서 연속, $x=3$에서 불연속

$g(1)=g(3)$이고, $g(0)\ne g(-1)$입니다.
$g(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 상수항이 -9이며
$g'(3)=0$이므로 $g(x)=(x-3)^2(x-1)$입니다.

여기서 검증할 것은 다음 두 가지입니다.

$g'(a)=0$인 $a\,(a\ne3)$가 $a>0$를 만족시키는가?
$g(-1)\ne g(0)$인가?

직접 해보시면 두 가지 모두 쉽게 검증됩니다.
따라서 $g(x)=(x-3)^2(x-1)$로 확정지을 수 있습니다.

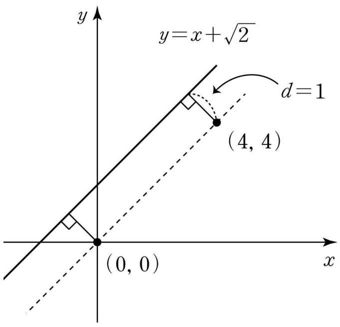
(ii) $x=1$에서 불연속, $x=3$에서 연속

이번에는 $g(0)=g(-1)$을 가정해놓고 얻어낸 $g(x)$에 대해서도 검증해보시면 되는데, 이 부분이 크게 어려운 부분이 아니니 직접 해보시길 바랍니다.

$\therefore g(5)=(5-3)^2(5-1)=16$

15. 정답 ③ (난이도: ★★)

사차함수 $f(x)$가 두 점 $(0,0)$와 $(4,4)$을 지나는데, 두 직선 $y=x$와 $y=x+\sqrt{2}$ 사이의 거리가 1인 것을 파악했다면, $t=1$, $t=4$가 원소인 것이 확인됩니다.



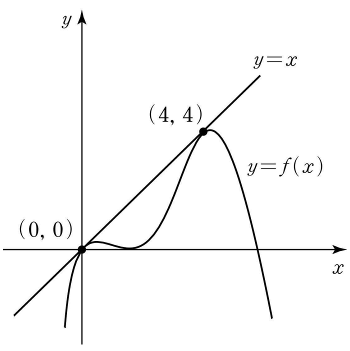
이제 더 이상 원소가 존재하지 않아야 하므로
모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le x$가 되어야 합니다.
편의상 $f(x)-x\le 0$으로 보고 등호가 성립하는 순간이 극대인 것을 통해 미분계수가 0임을 활용합시다.

$x=0$: $f(0)-0=0 \Rightarrow f'(0)-1=0$
$x=4$: $f(4)-4=0 \Rightarrow f'(4)-1=0$

따라서 $f(x)-x$라는 사차함수는 $(x-0)^2$과 $(x-4)^2$을 각각 인수로 갖기 때문에 다음과 같이 세울 수 있습니다.

$$f(x)-x=ax^2(x-4)^2 \text{ (단, } a<0)$$

위 식의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같습니다.[1]



1) 상황 이해를 위한 그림이지, 정확한 정보를 담고 있진 않습니다.

마지막 조건에서 $f(x)=0$과 $f'(x)=1$의 공통근이 2개인데, 일단 $x=0$이 두 방정식의 공통근인 것은 자명합니다. 0이 아닌 공통근을 k라 하면

$$f(k)-k=ak^2(k-4)^2 \cdots (1)$$
$$f'(k)-1=4ak(k-2)(k-4) \cdots (2)$$

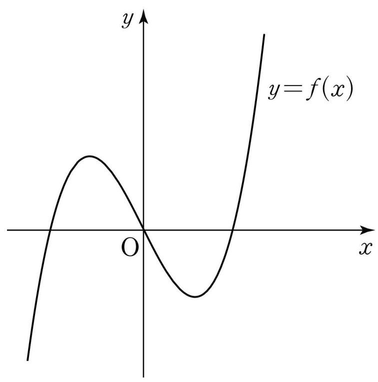
가 각각 성립해야 하므로 (2)에서 $k=2$가 나오고,
이를 식 (1)에 대입하면 $0-2=16a$가 나옵니다.

$\therefore a=-\dfrac{1}{8}$

16. 정답 ② (난이도: ★)

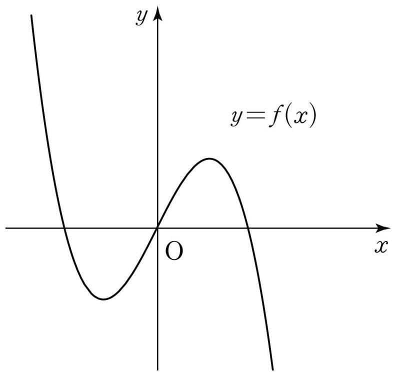
극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 다음 두 가지 경우가 가능합니다.

(i) $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수

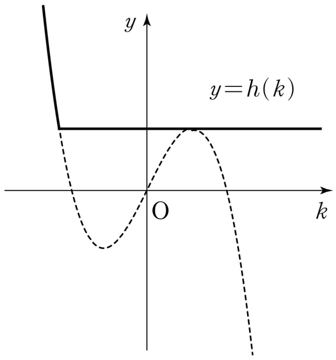


$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 구간 $[k,\infty)$에서 $f(x)$의 최댓값은 존재하지 않습니다. 즉, 함수 $h(k)$가 정의되지 않으므로 이 경우는 모순입니다.

(ii) $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수



함수 $h(k)$의 그래프는 다음과 같습니다.[1]



이를 수식으로 표현하면 다음과 같습니다.

$$h(k)=\begin{cases} f(k) & (k < -2p) \\ M & (k \geq -2p) \end{cases}$$

(단, $f(x)$는 $x=p$에서 극댓값 M을 가짐)

그런데 (가) 조건에서 $h(2)=f(2)$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖습니다.

또한, $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 $x=-2$에서 극솟값을 갖습니다.

(나) 조건은 $h'(2)=0$임을 활용하면 다음과 같습니다.

$$\lim_{x \to -2}\frac{g(x)}{f'(x)}=\lim_{x \to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

1. $\lim_{x \to -2}\frac{g(x)}{f'(x)}=0$에서 $g(x)$는 $(x+2)^2$을 인수로 갖고,
2. $\lim_{x \to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$에서 $g(x)$는 x^2을 인수로 가져야 합니다.

그런데 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $g(x)=x^2(x+2)^2$입니다.

$\therefore g(3)=225$

1) 이해가 되지 않을 경우 아래 기출문제를 다시 공부합시다.

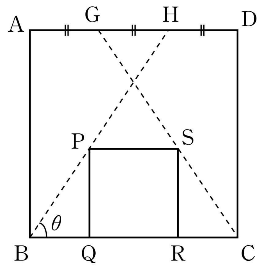
[2010학년도 수능 수리 가형 24번]
삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t\,(t \geq -1)$에 대하여 $-1 \leq t \leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17. 정답 ④ (난이도: ★)

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$이므로 a와 r만 각각 구해주면 됩니다.

$a=$(삼각형 넓이)+(반원의 넓이)
$=\left(\frac{1}{2}\times 2\times 3\right)+\left(\frac{1}{2}\times\pi\times 1^2\right)$
$=3+\frac{\pi}{2}$

아래 그림의 두 정사각형 ABCD와 PQRS의 넓이 비가 곧 공비입니다.



$\angle$PBQ$=\theta$라 하면 $\angle$BHA$=\theta$이므로
$\tan\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}=\frac{3}{2}$입니다.
그런데 $\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}=\tan\theta$이므로 $\overline{PQ}:\overline{BQ}=3:2$입니다.

이제 $\overline{BQ}+\overline{QR}+\overline{RC}=\overline{BC}$인 것을 활용하면,
두 정사각형의 길이의 비는 $3:7$입니다.

따라서 공비 r은 $\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{9}{49}$입니다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{a}{1-r}=\frac{49\left(3+\frac{\pi}{2}\right)}{40}$

18. 정답 ⑤ (난이도: ★★★)

집합 A와 B는 각각 방정식

$$f(t)=t-2,\ f(t)=-t+2$$

의 서로 다른 실근의 개수를 의미합니다.
그런데 두 식은 삼차방정식이므로 가능한 원소의 개수는 1, 2, 3인데 (가) 조건에 의하여 2 또는 3입니다.

집합 C는 $A\cup B$이라 생각할 수 있습니다.
(나) 조건에서 $n(C)=3$이므로 다음이 성립합니다.

$$n(A)+n(B)-n(A\cap B)=3 \cdots (1)$$

처음 결과에서 $\begin{cases} n(A)=2 \text{ 또는 } 3 \\ n(B)=2 \text{ 또는 } 3 \end{cases}$ 이고,
$n(A\cap B)$는 $f(t)=t-2=-t+2$를 만족시키는 실수 t의 개수이므로 0 또는 1입니다.[1)]

그러므로 식 (1)을 만족시키는 가능한 조합은
$n(A)=2$, $n(B)=2$, $n(A\cap B)=1$인 경우 밖에 없습니다.

$n(A)=2$인 조건부터 생각해봅시다.
두 그래프 $y=f(x)$와 $y=x-2$는 한 점에서는 만나고, 다른 한 점에서는 접해야 합니다.

그런데 $2\in A$이므로 점 $(2,0)$이 두 그래프의 단순 교점일지, 접점일지에 대하여 두 경우로 나누어봅시다.

(i) 단순 교점인 경우

점 $(2,0)$이 $y=f(x)$와 $y=x-2$의 단순 교점일 경우에는

$$f(x)-(x-2)=2(x-2)(x-p)^2 \text{ (단, } p\neq 2)$$

이라 세울 수 있습니다. 이제 $n(B)=2$에 대해서 생각해보면 두 그래프 $y=f(x)$와 $y=-x+2$가 두 점에서 만나기 때문에 연립하여 얻어낸 방정식

$$(x-2)\{(x-p)^2+1\}=0$$

가 서로 다른 실근을 가져야 합니다.
그런데 오직 한 개의 실근 밖에 없으므로 모순입니다.

(ii) 접점인 경우

접점인 경우에는 $f(x)-(x-2)=2(x-2)^2(x-p)$입니다.
$n(B)=2$를 만족시키기 위해선 $y=-x+2$와 두 점에서 만나야 하므로 다음 식의 실근의 개수가 2입니다.

$$-2(x-2)=2(x-2)^2(x-p)\ \cdots\ (2)$$

식 (2)를 정리하면

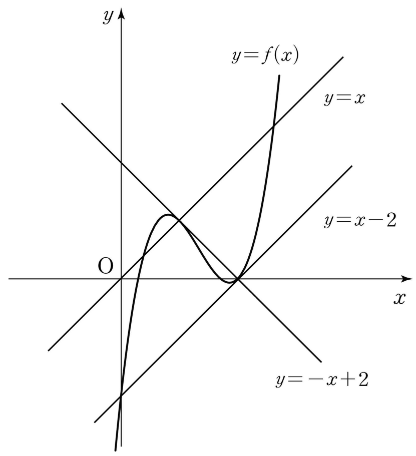
$$(x-2)\{x^2-(p+2)x+2p+1\}=0$$

이고, 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되어야 하므로 판별식을 활용하면,
$(p+2)^2-4(2p+1)=0$에서 $p=0$ 또는 $p=4$입니다.

이제, 마지막 조건 $n(D)=3$을 통해 $p=0$와 $p=4$의 두 가지 중에서 걸러내면 $p=0$입니다.

$$\therefore f(x)=2x(x-2)^2+(x-2) \Rightarrow f(3)=7$$

[참고]: $y=f(x)$의 그래프



19. 정답 ③ (난이도: ★★★)

$f(x)=\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b-a}{2}x^2-bx$를 미분하면,

$$f'(x)=ax^2+(b-a)x-b=(ax+b)(x-1)$$

이므로 다음 두 가지 상황이 존재합니다.

Case 1. $f'(x)=0$가 중근

$f'(x)=a(x-1)^2$이므로
함수 $|f(x)+t|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (t=-f(1)) \\ 1 & (t\neq -f(1)) \end{cases}$$

입니다. 그런데 이 경우는 $f(1)$이 어떤 값을 갖는다고 하더라도 방정식 $2g(t)=mt+6$의 실근이 존재하도록 하는 실수 m의 '최솟값'은 존재하지 않습니다.

Case 2. $f'(x)=0$가 서로 다른 두 실근

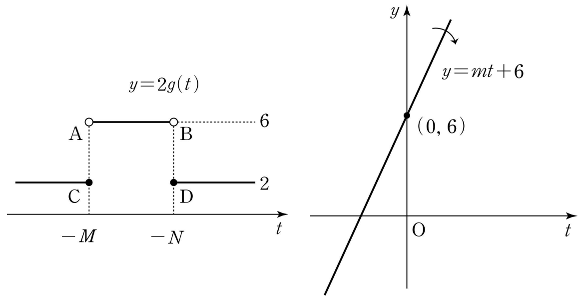
$f(x)$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, N이라 하면 함수 $g(t)$는 다음과 같습니다.

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t\leq -M) \\ 3 & (-M<t<-N) \\ 1 & (t\geq -N) \end{cases}$$

1) 구체적으로는 다음과 같습니다.

$f(2)=0$인 경우 : $n(A\cap B)=1$
$f(2)\neq 0$인 경우 : $n(A\cap B)=0$

방정식 $2g(t)=mt+6$을 두 그래프
$y=2g(t)$와 $y=mt+6$의 교점의 개수로 생각합시다.



두 그래프의 교점이 존재하도록 하는 m의 최솟값이 -1이 되기 위해서는 점 A가 $(0,6)$이 되어야 하고, $m=-1$인 순간 직선 $y=mt+6$가 점 D를 지나야 합니다.[1)]

따라서 $M=0$이고, $N=-4$입니다.

그런데 $f(0)=0$, $f'(1)=0$과 최고차항의 계수가 양수인 것을 통해 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -4을 갖습니다.

$\therefore f(1)=-4$

20. 정답 ⑤ (난이도: ★)

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $-\dfrac{1}{3}$이므로
이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 -1입니다.

방정식 $f'(x)=x$의 두 실근이 a, b이므로
<u>인수정리</u>를 통해 $f'(x)$의 식을 세우면 다음과 같습니다.

$$f'(x)-x=-(x-a)(x-b)$$

〔보기 ㄱ〕
$f'(2)=2-(2-a)(2-b)$인데,
$a<b=0$이므로 $f'(2)=2(a-1)<0$입니다. (참)

〔보기 ㄴ〕
$f'(x)=-x^2+(a+b+1)x-ab$인데,
$a+b=ab$이므로
$f'(1)=-1+(a+b+1)-ab=0$입니다.

그런데 만약 방정식 $f'(x)=0$가 $x=1$에서 중근을 가질 경우에는 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 갖는다고 할 수 없습니다.

따라서 이 부분에 대한 추가적인 검증이 필요합니다.

만약 $f'(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지면
$f'(x)=-(x-1)^2$입니다. 이를 전개하여
$f'(x)=-x^2+(a+b+1)x-ab$의 계수와 비교하면
$a+b=1$, $ab=1$입니다.

이때, a와 b를 방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이라 생각하면 둘 다 실수가 아니므로 문제의 조건에 모순입니다. 따라서 $f'(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖습니다. (참)

〔보기 ㄷ〕
우리는 지금까지 $f(x)$가 아닌 $f'(x)$에 관하여 다루었습니다.
따라서 $f(a)<f(b)$라는 질문을 $\int_a^b f'(x)dx>0$으로 바꾸어서 생각하도록 합시다.

주어진 명제의 가정은 $f'(1)=a+b-ab>0$,
$ab>0$이므로 $a+b>ab>0 \cdots (1)$

주어진 명제의 결론은

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)dx &= \int_a^b \{x-(x-a)(x-b)\}dx \\ &= \int_a^b xdx - \int_a^b (x-a)(x-b)dx \\ &= \frac{b^2-a^2}{2}+\frac{(b-a)^3}{6} \\ &= \frac{(b-a)\{3(a+b)+(b-a)^2\}}{6}>0 \cdots (2)\end{aligned}$$

결국 $(1)\rightarrow(2)$가 참이냐고 묻는 질문인데,
문제의 조건에서 $b-a>0$인 것도 고려하면 참입니다.
(참)

21. 정답 ④ (난이도: ★)

$f(x)=x^3-f(1)x^2+f(2)$인데 언뜻 보면 $f(x)$가 정해진 함수가 아닌 걸로 착각할 수 있겠지만,

주어진 식을 x에 대한 항등식으로 생각하고
<u>수치대입법</u>을 활용하면 $f(1)$, $f(2)$를 구할 수 있습니다.

$x=1$ 대입 : $f(1)=1-f(1)+f(2) \cdots (1)$
$x=2$ 대입 : $f(2)=8-4f(1)+f(2) \cdots (2)$

(1), (2)에 의하여 $f(1)=2$, $f(2)=3$가 나옵니다.

$$\therefore f(x)=x^3-2x^2+3$$

점 $(0,t)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 '접선의 개수'가 언급되어 있는데, 이러한 유형은 접점을 $(k,f(k))$로

1) 당연히 충분한 관찰 이후에 얻어낸 결론입니다.
그 결론에 도달하기 위한 과정은 스스로 고민해보셔야 합니다.

설정한 뒤에

(서로 다른 실수 k의 개수)=(접선의 개수)

라고 생각하시면 됩니다.[1)]
접선의 방정식 $y=f'(k)(x-k)+f(k)$에 $(0,t)$를 대입하면

$$t=-2k^3+2k^2+3$$

이고, 이 식을 만족시키는 실수 k가 2개 이상이 되도록 하는 실수 t의 '최솟값'을 물어봤기 때문에
함수 $y=-2k^3+2k^2+3$의 극솟값을 구하면 됩니다.

함수 $y=-2k^3+2k^2+3$는 $k=0$에서 극솟값 3을 가지므로 실수 t의 최솟값은 3입니다.

22. 정답 ⑤ (난이도: ★)

이차함수 $f'(x)$에 대하여 $y=f'(|x|)$의 그래프는

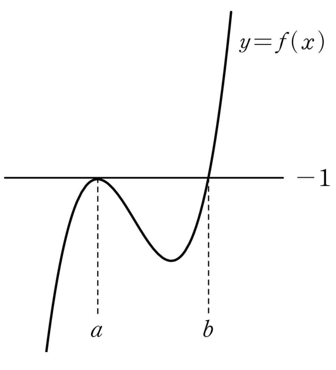
(대칭축) >0인 경우 W자
(대칭축) ≤ 0인 경우 V자 모양입니다.

그런데 W자 개형에서는 어떤 경우에도 $f'(|x|)=f(1)$가 오직 한 실근만을 가질 수는 없습니다.

따라서 $y=f'(|x|)$는 V자 개형이어야 하고,
$f'(|x|)=f(1)$가 오직 한 개의 실근을 갖는다고 했기 때문에 반드시 $x=0$이 되어야 합니다.

즉, $f'(0)=f(1)$

그런데 (가) 조건에서 $f(1)=-1$이고 $f(x)$의 극댓값이 -1이므로 다음 두 가지 경우가 가능합니다.



(i) $b=-1$인 경우

: $f'(0)=-1$이 될 수 없으므로 불가능합니다.

(ii) $a=-1$인 경우

: $f(x)=(x+1)^2(x-b)-1$이므로
$f'(0)=-1$을 활용하면 $b=1$을 얻습니다.

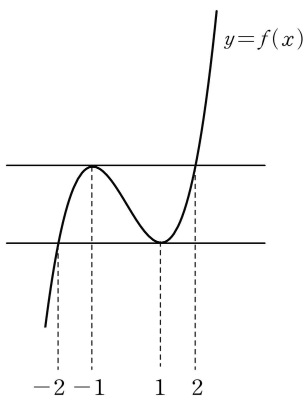
$\therefore f(x)=(x+1)^2(x-1)-1 \Rightarrow f(3)=31$

23. 정답 ② (난이도: ★★)

16번 문항에서도 살펴보았겠지만,
특정 구간에서 최댓값 또는 최솟값으로 정의되는 함수는 반드시 원래 함수의 극댓값, 극솟값을 '특정 구간에서의 상수함수'로 가지는 형태가 되어야 합니다.[2)]

따라서 $g(a)=0$의 실근이 무수히 많다는 조건은
$f(x)$의 극댓값 또는 극솟값 중에 하나는 0임을 의미합니다.[3)]

$f'(x)=3(x^2-1)$을 통해 $y=f(x)$의 그래프를 그립시다.



아직 '축'의 위치가 결정되지 않았기 때문에 나머지 조건을 살펴보아야 합니다.

$g(-3)=0$이므로 구간 $[-3,-2]$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 곱이 0이므로 $f(-3)f(-2)=0$입니다.

따라서 $f(-2)=0$이므로 $f(x)=(x+2)(x-1)^2$가 되어 $f(3)=20$입니다.

---

1) 사차함수의 경우에는 접선 하나당 접점이 여러 개가 발생하는

"공통접선"

의 상황이 존재할 수도 있겠으나. (cf. 15번)
삼차함수는 공통접선의 상황이 존재하지 않기 때문에
접점과 접선이 일대일로 대응된다고 보시면 됩니다.

2) 극대/극소의 정의가 '어떤 열린구간에서 최대/최소인 것'을 생각해보면 충분히 타당성 있는 추론입니다.

3) 정확한 증명은 귀류법으로 하시면 됩니다.

24. 정답 ② (난이도: ★★)

곡선 $y=f(x)$의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 방정식은

$$y=f'(3)(x-3)+f(3)$$

이고, 이것이 곡선 $y=x^2-7$과 접하는 상황이므로 판별식을 활용하도록 합시다.

두 식을 연립하면
$x^2-f'(3)x+3f'(3)-f(3)-7=0$이므로
판별식 $D=\{f'(3)\}^2-4\{3f'(3)-f(3)-7\}=0$에서

$$f(3)=-\frac{\{f'(3)\}^2-12f'(3)+28}{4}$$

입니다. 조건에서 $f(3)>0$이고 $f'(3)$은 6이 아닌 자연수이므로 가능한 $f'(3)$의 값은 4, 5, 7, 8입니다.

즉, 다음 네 가지 경우가 나옵니다.

$$\begin{cases} f(3)=1 \\ f'(3)=4 \end{cases}, \begin{cases} f(3)=\frac{7}{4} \\ f'(3)=5 \end{cases}, \begin{cases} f(3)=\frac{7}{4} \\ f'(3)=7 \end{cases}, \begin{cases} f(3)=1 \\ f'(3)=8 \end{cases}$$

$f(x)$의 최고차항의 계수와 극댓값이 1인 것과 $f(2)=0$인 것도 모두 만족시켜야 하므로 가능한 경우는

$$\begin{cases} f(3)=1 \\ f'(3)=4 \end{cases}$$

입니다.[1] 함수 $f(x)$를

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-3)^2(x-k)+f'(3)(x-3)+f(3) \\ &=(x-3)^2(x-k)+4x-11 \end{aligned}$$

으로 놓고, $f(2)=0$을 계산해보면 $k=-1$이 나오고, 극댓값을 구해보면 1로 정확하게 나옵니다.

$\therefore f(5)=(5-3)^2(5+1)+4(5)-11=33$

25. 정답 ⑤ (난이도: ★★)

(가) 조건에 $x=\pm1$을 대입하면 $g(1)=0$입니다.

즉, 삼차함수 $g(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖기 때문에 $g(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$이라 세울 수 있습니다.

이를 (가) 조건에 다시 대입하면 $b=0$을 얻습니다.
또한, 문제 조건에서 $ag(0)=-8$이므로 $ac=8$입니다.

이제 (나) 조건을 생각해봅시다.

부등식 $f(x)g(x)\le 0$라는 조건이 제시되어 있는데, $g(1)=0$임을 감안하면 위 부등식은 $x=1$인 지점에서 등호가 성립함을 알 수 있습니다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 극대이므로

$$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=0$$

가 되어야 합니다. 그런데 $g(1)=0$, $g'(1)\neq0$이므로[2] 결국 $f(1)=0$입니다. 그런데 일차함수 $f(x)$는 $f(2)=1$이므로 $f(x)=x-1$로 결정됩니다.

이제 (나) 조건의 부등식을 다시 보면

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(ax^2+c)\le0$$

이므로 이것이 모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해선

$\begin{cases} a<0 \\ c<0 \end{cases}$ 가 되어야 합니다.

또한 함수 $f(x)g(x)$의 극값의 개수가 1개이므로[3] 함수 $y=(x-1)^2(ax^2+c)$의 도함수의 부호변화가 한 번만 발생해야 합니다.

즉, $y'=2(x-a)(2ax^2-ax+c)$의 부호변화가 한 번만 발생해야 하므로 $D=a^2-4\times(2a)\times c\le0$입니다.

그런데 $ac=8$이므로 $a^2-64\le0$입니다.

또한, 문제의 조건에서 $a^2\ge64$이므로 $a^2=64$입니다.
따라서 $a=-8$입니다. ($\because a<0$)

$\therefore g(x)=(x-1)(-8x^2-1)$

$g(-3)=(-3)(-33)=99$

26. 정답 ① (난이도: ★★)

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$이므로 a와 r을 각각 구해봅시다.

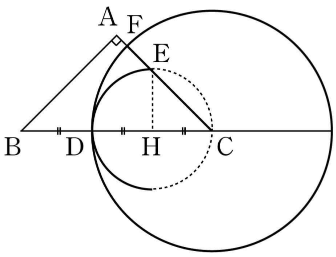
---

1) 나머지 케이스는 직접 계산 해보시길 바랍니다. ㅠㅠ

2) $g(x)=(x-1)(ax^2+c)$에서 $g'(1)=a+c$인데, $ac=8$이므로 $g'(1)\neq0$입니다. (a와 c의 부호가 같기 때문)

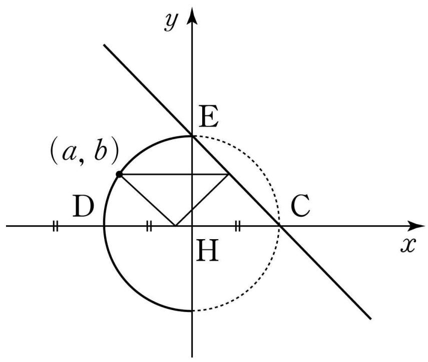
3) 사실 극값의 개수가 1개인 것은 극점의 개수가 1개인 것과 같은 조건이 아닙니다. 예를 들어 사차함수가 W 모양일 경우 극값은 2개지만 극점이 3개이기 때문입니다.
하지만 지금은 그런 예외적인 경우는 고려하지 않아도 됩니다.

made by 110615 (110615@naver.com)



$$a=(\text{부채꼴 CDF})-(\text{사분원 HDE})-(\text{삼각형 CHE})$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}-1$$

공비 r은 두 직각삼각형의 넓이의 비로 생각하는 게 좋습니다. 좌표를 활용하여 작은 직각삼각형의 길이를 구해봅시다.



원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 (a, b)를 지나고 x축과 평행한 직선이 $x+y=\sqrt{2}$와 만나는 점은 $(\sqrt{2}-b, b)$입니다.

그런데 직각이등변삼각형의 성질에 의하여

$$(\sqrt{2}-b)-a=2\times b$$

입니다. 이를 $a^2+b^2=2$와 연립하면 다음을 얻습니다.

$$\begin{cases} a=-\dfrac{4\sqrt{2}}{5} \\ b=\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

그러므로 넓이의 비는 $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 : \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2=25:4$이고 공비 r은 $r=\dfrac{4}{25}$입니다.

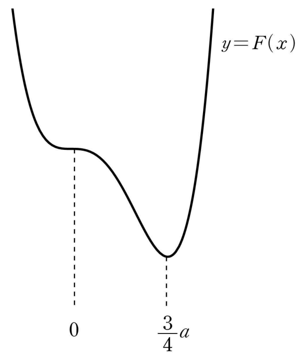
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25(\pi-2)}{42}$$

27. 정답 ③ (난이도: ★)

함수 $f(x)=4x^3-3ax^2$의 한 부정적분을 $F(x)$이라 하면,

$$F'(x)=f(x)=4x^2\left(x-\frac{3}{4}a\right)$$

이므로 $y=F(x)$의 개형은 다음과 같습니다.



함수 $g(x)=\int_b^x f(t)dt=F(x)-F(b)$가

$x=3$에서 x축과 접하기 때문에 $\begin{cases} F(3)=F(b) \\ F'(3)=0 \end{cases}$ 입니다.

그런데 $F'\left(\frac{3}{4}a\right)=0 \ (a>0)$이므로 $\frac{3}{4}a=3$이어야 하고,

$F(x)$가 $x=\frac{3}{4}a$에서만 최소이므로 $b=\frac{3}{4}a=3$입니다. [1]

$\therefore a=4,\ b=3$

$$g(1)=\int_b^1(4t^3-3at^2)dt$$
$$=\left[t^4-4t^3\right]_3^1$$
$$=24$$

28. 정답 ① (난이도: ★)

함수 $g(x)$를 구하면 다음과 같습니다.

$$g(x)=3x-10$$

$y=g(x)$는 $y=f(x)$의 점 $(3, f(3))$에서의 접선이므로

$$f(x)-g(x)=(x-3)^2(ax+b)$$

1) $y=F(x)$의 그래프를 보시면 아시겠지만,

$$F(x)=F(k)$$

을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수는 $k\neq\frac{3}{4}a$인 경우 2개, $k=\frac{3}{4}a$인 경우 1개 존재합니다.

가 성립하고, 이를 $f(x)$에 관하여 정리하면

$$f(x)=(x-3)^2(ax+b)+3x-10 \cdots (1)$$

가 됩니다. 이때, 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선이 $y=g(x)$와 평행하므로 $f'(-1)=3$입니다. 식 (1)을 미분하여 $x=-1$을 대입하면 $b=3a$를 얻습니다.

함수 $h(x)$의 기울기가 -1이므로 $f'(1)=-1$임을 활용합시다. 마찬가지로 식 (1)의 양변을 미분하여 $x=1$을 대입하면 $b=1$이 나옵니다.

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}(x-3)^2(x+3)+3x-10$

그러므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖습니다.[1]

$\therefore f(2)=-\frac{7}{3}$

29. 정답 ① (난이도: ★★)

함수 $f(x)$를 $f(x)=(x+5)^2+m$이라 세울 수 있습니다. 그러면 함수 $g'(x)$는

$$g'(x)=(x-k+5)^2-(-k+5)^2$$

이므로 $k-5=a$라 치환해서 다시 정리하면

$$g'(x)=x^2-2ax$$

가 됩니다. 이제 (가) 조건을 살펴봅시다.

(가) 조건을 단순하게 생각하면

$$(\text{사차함수})\geq 0$$

라는 부등식입니다. 부등식의 등호가 성립하는 x는

$$-2,\ -2+2a,\ 2,\ 2-2a$$

으로 네 개가 존재하는데, 모든 실수 x에 대하여 부등식을 만족시키기 위해서는 사차함수가 W자 개형이어야 합니다.[2]

따라서 $\{-2+2a, 2-2a\}=\{-2, 2\}$가 되어야 하고 결국 $a=0$ 또는 $a=2$가 나오는데,

$a=0$인 경우는 $k=5$가 되므로 문제의 조건에 모순입니다. 따라서 $a=2$이고, $k=7$입니다.

이제 (나) 조건을 봅시다.

곡선 $y=g(x)$의 $(3, g(3))$에서의 접선은 $y=g'(3)(x-3)+g(3)$이고, 이것의 x절편이 $k=7$이므로 $0=g'(3)(7-3)+g(3)$입니다.

$g'(x)=x^2-4x$이므로 위 식에서 적분상수만 잘 정해주면 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+21$가 나옵니다.

$\therefore g(-3)=-6$

30. 정답 ① (난이도: ★)

$g(x)$는 삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분입니다. 그런데 (가)에서 $g'(x)=f(x)$가 원점에 대한 점대칭이므로 $g(x)$는 $x=0$에 대한 선대칭입니다.

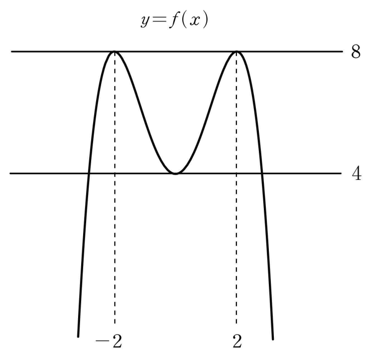
(나) 조건을 생각해봅시다.

$0<a<b<2$인 모든 실수 a, b에 대하여 $\int_a^b f(x)dx=g(b)-g(a)>0$이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0,2)$에서 증가하고,

$2<c<d$인 모든 실수 c, d에 대하여 $\int_c^d f(x)dx=g(d)-g(c)<0$이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(2,\infty)$에서 감소합니다.

(다) 조건은 간단하게 나타내면 $\begin{cases} g(0)=4 \\ g(-2)=8 \end{cases}$ 입니다.

(가), (나), (다) 조건을 모두 만족시키는 사차함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같습니다.



$f(x)=a(x+2)(x-2)^2+8$이라 세우고 $f(0)=4$를 대입하면 최고차항의 계수는 $a=-\frac{1}{4}$입니다.

1) 꼭 직접 미분하셔서 확인해보세요.
2) 다른 개형도 가능한데, 이 문제는 최소 2개의 서로 다른 실근이 확보되었기 때문에 W자 개형만 가능합니다.

made by 110615 (110615@naver.com)

31. 정답 ③ (난이도: ★)

$f(x)$와 $f(x-2)$가 $x=\alpha$에서 극값을 갖는다는 것은 $f(x)$를 기준으로 생각하면 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\alpha-2$에서 극값을 갖는다는 것입니다. 이로부터 두 극점의 x좌표의 간격이 2임을 알 수 있습니다.[1]

그런데 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=\dfrac{2}{3}k$에서 극값이므로 $\left(\dfrac{2}{3}k\right)-(0)=2$입니다. 이로부터 $k=3$을 얻습니다.

이제 $f(x)=x^2(x-3)$로 결정되었으니 $y=f(x)$의 점 $(3,0)$에서의 접선과의 교점의 x좌표는 어렵지 않게 구하실 수 있습니다.[2]

구해보시면 정답은 -3입니다.

32. 정답 ① (난이도: ★★)

일반적인 형태의 연속성 문제는 '함수'에 미지수를 끼워 넣은 뒤에 연속성을 통한 미지수의 결정을 요구했다면, 이 문제는 반대로 함수를 제시해주고서 연속이 되도록 하는 '구간'을 잘 설정해보라는 형식입니다.

이러한 유형에 대한 해법은

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(x-2) & (f'(x)\le 0)\\ x+4 & (f'(x)>0)\end{cases}$$

의 구간별 함수를 각각 실수 전체의 집합에서 그려놓고, 주어진 연속 조건에 맞도록 함수만 잘 갈아타주면 됩니다. 이때, 함수를 갈아탄 지점이 구간의 경계가 바뀌는 순간이므로 그 지점에서 $f'(x)=0$입니다.

문제 조건을 구체적으로 살펴봅시다.

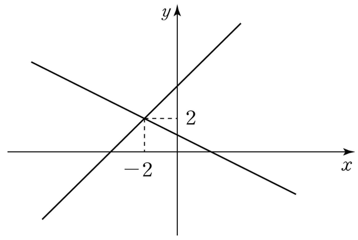
삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖고, 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이라 나와 있습니다. 이로부터 $f(x)$를

$$f(x)=a(x^3-3b^2x)\ (\text{단, } b>0)$$

이라 세울 수 있습니다.

그러면 $f'(x)=0$인 x의 값이 $x=-b$ 또는 $x=b$이므로 이것이 $g(x)$의 불연속인 지점의 후보가 됩니다.

그런데 조건에서 $g(x)$는 $(-\infty,0]$에서 연속이라고 되어 있기 때문에 $x=-b$에서도 연속이 되어야 합니다.



$g(x)$가 $x=-b$에서 연속이 되도록 함수를 갈아타야 하므로 $b=2$입니다. 이제 $f(x)=a(x^3-12x)$까지 정해졌으니 a만 잘 정해주면 됩니다.

(가) 조건에 $|f(x)-f(g(0))|$의 미분가능성이 언급이 되어 있는데, $g(0)$이 무엇인지부터 따져봐야 합니다.

(i) $a>0$

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(x-2) & (-2<x<2)\\ x+4 & (x\ge 2\text{ 또는 }x\le -2)\end{cases}$$

이므로 $g(0)=1$입니다. 그런데 이 경우 $|f(x)-f(1)|$의 미분가능한 점의 개수는 3이므로 조건에 모순입니다.

(ii) $a<0$

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(x-2) & (x\ge 2\text{ 또는 }x\le -2)\\ x+4 & (-2<x<2)\end{cases}$$

이므로 $g(0)=4$입니다. 이 경우 $|f(x)-f(4)|$의 미분가능한 점의 개수는 1이므로 조건을 만족시킵니다.[3]

따라서 $a<0$입니다.

이제 (나) 조건인 곡선 $y=|f(x)|$의 $x=3$에서의 접선은 $f(x)=a(x^3-12x)$에서 $f(3)=-9a>0$이므로

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)$$

입니다. 점 $(0,27)$을 대입하면 $a=-\dfrac{1}{2}$입니다.

$\therefore f(6)=144a=-72$

1) α의 값은 굳이 구하지 않아도 됩니다.

2) 미분해도 되고 삼차함수의 비율관계를 활용해도 됩니다.

3) 비율관계를 아시는 분들은 계산 없이 파악 가능합니다.

made by 110615 (110615@naver.com)

수학 Ⅱ

33. 정답 ① (난이도: ★)

공차의 절댓값이 2인데, (나)에서 $a_2 - a_5 > 0$이므로
공차는 -2입니다.

공차가 음수이므로 $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$입니다.
(가)에서 $a_1 \times a_4 = 0$이므로 둘 중 하나는 0인데,
$a_3 > 0$이므로 $a_4 = 0$가 되어야 합니다.

즉, $a_1 + 3d = a_1 - 6 = 0$이므로 $a_1 = 6$를 얻습니다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 6$이고, 공차가 -2인
등차수열이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 \times \left(\frac{a_1 + a_{10}}{2}\right) = 10 \times \left(\frac{6-12}{2}\right) = -30$$

34. 정답 ③ (난이도: ★)

부등식 $ax + b > 0$의 해가 모든 실수가 되기 위한 조건은
$a = 0$, $b > 0$입니다.

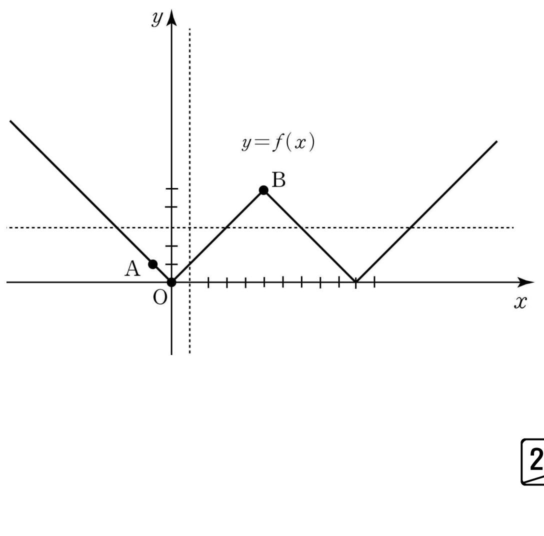
이 사실을 활용하면 주어진 부등식에서
$a_{10} = 128$이고 $a_1 < 0$임을 알 수 있고,
수열 $\{a_n\}$이 공차가 자연수인 등차수열이므로
$a_{10} = a_1 + 9d$ (단, d는 자연수)로 나타낼 수 있습니다.

$a_1 + 9d = 128$에서 $a_1 = 128 - 9d < 0$이므로 $d \geq 15$입니다.

문제에서는 a_2의 최댓값을 물어봤는데
$a_2 = a_1 + d = 128 - 8d$로 표현하면
a_2는 $d = 15$일 때, 최댓값 8을 갖습니다.

35. 정답 18 (난이도: ★★★★)

① $a = 1$인 경우 :



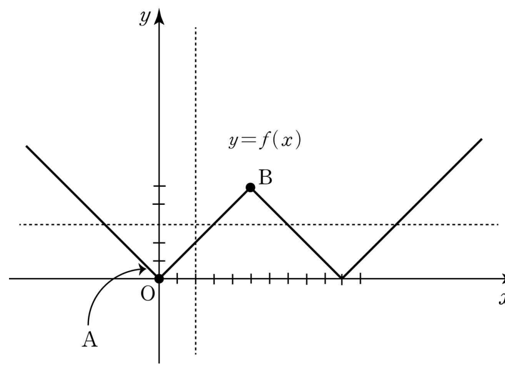
$g(x) = \dfrac{b}{x-1} + 3$이므로 두 그래프 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의
교점의 개수는 $y = g(x)$가 세 점 $A(-1, 1)$, $O(0, 0)$,
$B(5, 5)$를 지나는 순간에 달라집니다.

$A(-1, 1)$, $O(0, 0)$, $B(5, 5)$를 지나는 순간 b의 값은 각각
4, 3, 8이므로

$b = 1, 2, 3$일 경우 : (교점의 개수)$= 5$
$b = 4$일 경우[1] : (교점의 개수)$= 4$
$b = 5, 6, 7$일 경우 : (교점의 개수)$= 3$
$b = 8$일 경우 : (교점의 개수)$= 2$
$b = 9, 10, 11$일 경우 : (교점의 개수)$= 1$

따라서 $a = 1$일 때,
교점의 개수가 5가 되도록 하는 b의 개수는 3입니다.

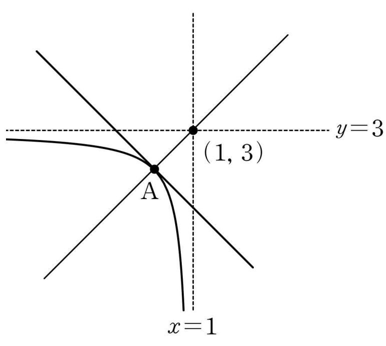
② $a = 2$인 경우 :



두 점근선의 교점인 점 $(2, 3)$을 지나고 기울기가 1인
직선이 $y = f(x)$와 만나는 점이 $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로
두 그래프 $y = f(x)$, $g(x) = \dfrac{b}{x-2} + 3$의 교점의 개수는
$A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $O(0, 0)$, $B(5, 5)$를 지나는 순간에 바뀝니다.

---

1) 두 점근선의 교점 $(1, 3)$과 점 $A(-1, 1)$을 지나는
직선의 기울기가 1이므로 그림과 같이 접하게 됩니다.

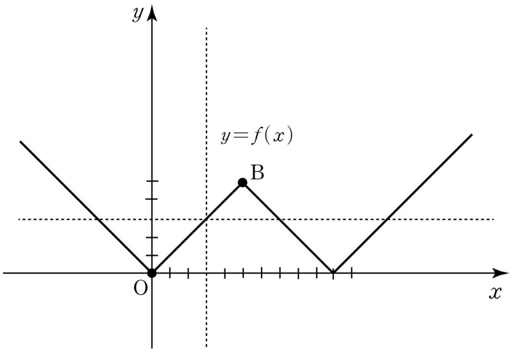


구해보시면 각각 $b=\frac{25}{4}$, $b=6$, $b=6$으로 나오기 때문에 교점의 개수는 다음과 같습니다.

$b=1,2,3,4,5$일 경우 : (교점의 개수)$=5$
$b=6$일 경우[1] : (교점의 개수)$=4$
$b=7,8,9,10,11$일 경우 : (교점의 개수)$=1$

따라서 $a=2$일 때,
교점의 개수가 5가 되도록 하는 b의 개수는 5입니다.

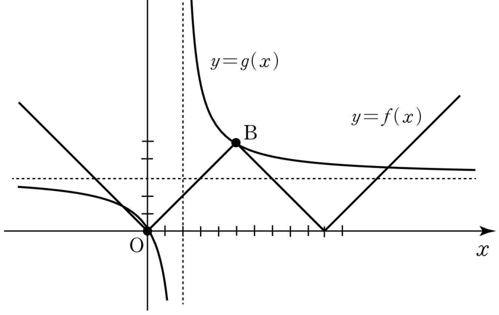
③ $a=3$인 경우 :
이제부터는 교점의 개수가 5인 경우만 바로 판단하겠습니다.



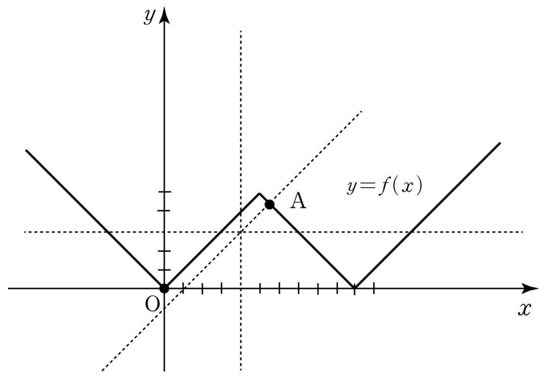
함수 $g(x)=\frac{b}{x-3}+3$가 $\mathrm{B}(5,5)$을 지나는 순간의 b의 값보다 작을 경우에만 교점이 5개 발생합니다.

그 순간의 b값을 구해보면
4이므로 가능한 b의 개수는 1, 2, 3으로 세 개입니다.

1) $b=6$인 경우의 $y=f(x)$의 그래프

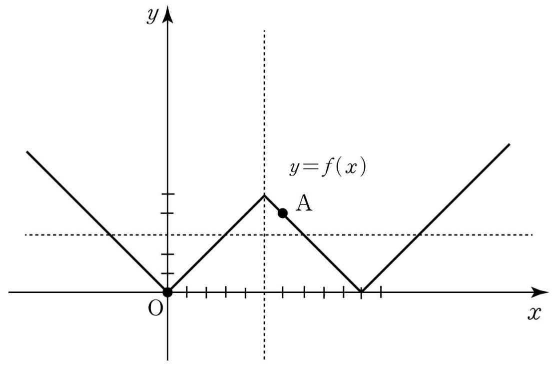


④ $a=4$인 경우 :



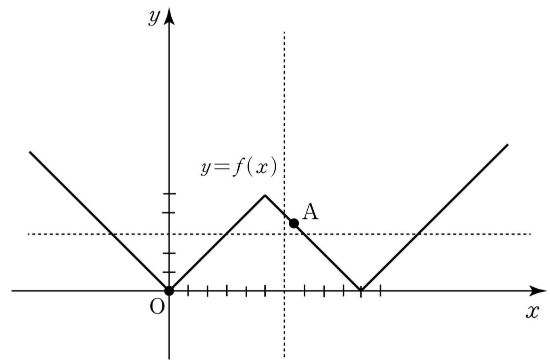
$g(x)=\frac{b}{x-4}+3$이고, 기준이 되는 점은 $\mathrm{A}\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$입니다. $\mathrm{A}\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$을 대입하면 $b=\frac{9}{4}$이므로 가능한 b는 $1,2$입니다. 따라서 가능한 b는 2개입니다.

⑤ $a=5$인 경우 :



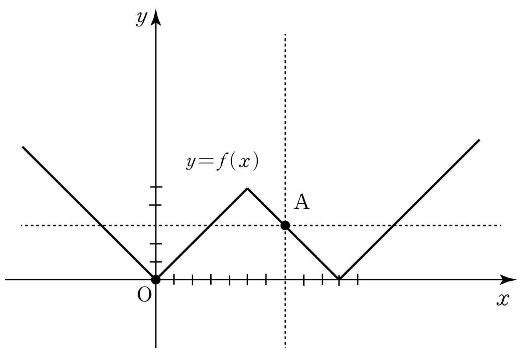
$g(x)=\frac{b}{x-5}+3$가 $\mathrm{A}(6,4)$을 지나는 순간이 경계이므로 대입하면 $b=1$인데, 이것보다 작은 자연수 b는 존재하지 않습니다.

⑥ $a=6$인 경우 :



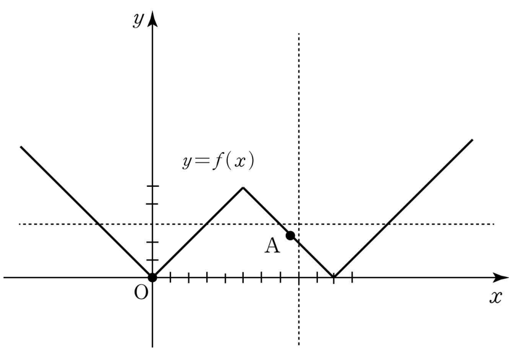
$g(x)=\frac{b}{x-6}+3$가 $\mathrm{A}\left(\frac{13}{2},\frac{7}{2}\right)$을 지나는 순간이 기준이 됩니다. 그때의 b값은 $b=\frac{1}{4}$이므로 가능한 자연수 b는 존재하지 않습니다.

⑦ $a=7$인 경우 :



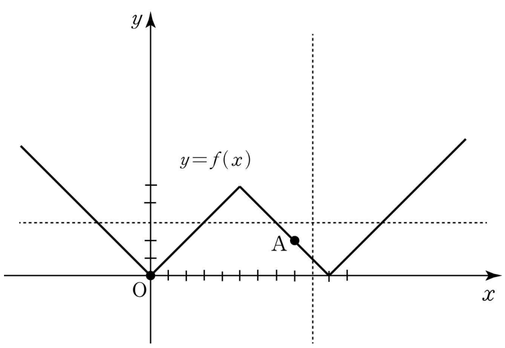
그래프만 보아도 교점의 개수가 5인 상황은 불가능합니다. 따라서 이 경우도 가능한 b는 존재하지 않습니다.

⑧ $a=8$인 경우 :



이 경우에는 $g(x)=\dfrac{b}{x-8}+3$가 $\mathrm{A}\left(\dfrac{15}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$를 지나는 순간의 b보다 작아질 경우 5개의 점에서 만나지만, 그 순간의 b의 값은 $a=6$인 경우와 동일하게 나옵니다.[1] 따라서 가능한 b는 존재하지 않습니다.

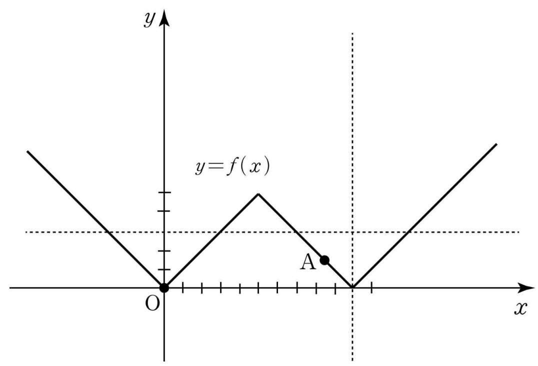
⑨ $a=9$인 경우 :



이 경우는 $a=5$과 같은 모양의 유리함수가 만들어지므로 $a=5$인 경우에서 가능한 b의 값이 존재하지 않았기 때문에 이 경우도 존재하지 않습니다.

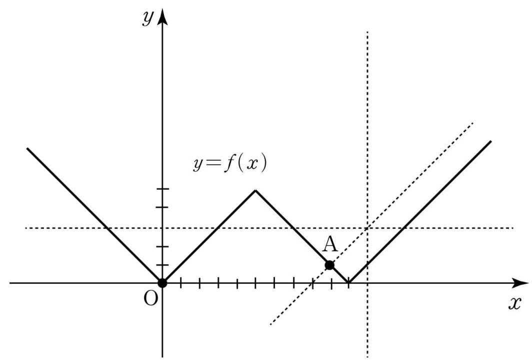
1) 유리함수는 두 점근선의 교점에 대한 점대칭이므로 같은 모양의 유리함수가 만들어집니다.

⑩ $a=10$인 경우 :



이 경우는 $a=4$와 같은 모양의 유리함수가 만들어지므로 가능한 b의 개수는 2입니다.

⑪ $a=11$인 경우 :



이 경우는 $g(x)=\dfrac{b}{x-11}+3$이고, 기준이 되는 점이 $\mathrm{A}(9,1)$이므로 이 순간의 b를 구해보면 $b=4$입니다. 따라서 가능한 b는 1, 2, 3으로 3개입니다.

그러므로 모든 순서쌍 (a,b)의 개수는
$3+5+3+2+0+0+0+0+0+2+3=18$

36. 정답 ④ (난이도: ★★)

$\sqrt{a^2}=|a|$이므로

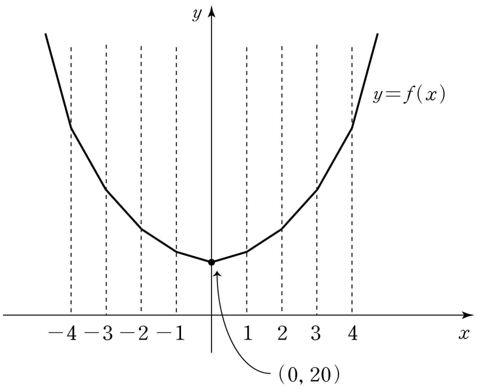
주어진 조건을 $\displaystyle\sum_{n=1}^{9}|a_n|=4(a_7+a_8)$이라 생각합시다.

편의상 $a_5=x$라 하면 위 식은

$$|x-4|+|x-3|+\cdots+|x+3|+|x+4|=8x+20$$

가 됩니다. 좌변을 $f(x)$라 하면
$f(x)=|x-4|+|x-3|+\cdots+|x+3|+|x+4|$는
각 구간별로 직선으로 연결된 함수이며
$f(-x)=f(x)$이므로 우함수입니다.

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같습니다.



그림과 같이 점 $(0,20)$을 지나면서 각 구간별로 기울기가

$$-9,\ -7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$$

인 그래프와 직선 $y=8x+20$의 교점을 구해야 하는데, 우선 $(0,20)$이 교점인 것은 자명합니다.

또 하나의 교점이 생길 수 있는 구간은 $(4,\infty)$인데, 그 구간에서 $f(x)=9x$이므로 연립하면 $x=20$이 나옵니다.

즉, 교점의 x좌표인 a_5는 0 또는 20인데 $a_5=20$일 경우에는 $a_1=16$이므로 주어진 조건에 모순입니다.

따라서 $a_5=0$이므로 $a_{20}=x+15=15$

37. 정답 ② (난이도: ★)

수학Ⅰ에서 배웠던 '음수의 제곱근의 성질'입니다.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow a>0,\ b<0 \text{ 또는 } a=0,\ b\neq 0$$

위의 개념을 잘 숙지한 상태에서 주어진 문제를 풀어봅시다.

문제의 조건에서 $\dfrac{\sqrt{a_5}}{\sqrt{a_{20}}}=-\sqrt{\dfrac{a_5}{a_{20}}}$가 성립해야 하므로 다음 두 가지 경우가 가능합니다.

(i) $a_5>0$, $a_{20}<0$인 경우

수열 $\{a_n\}$이 공차가 -2인 등차수열이므로
$a_5=a_1-8>0$, $a_{20}=a_1-38<0$에서
$8<a_1<38$이지만, 문제 조건에서 a_1은 20 이하의 정수이므로 가능한 a_1은 $9, 10, \cdots, 20$으로 12개입니다.

(ii) $a_5=0$, $a_{20}\neq 0$인 경우

$a_5=a_1-8=0$이므로 $a_1=8$입니다.
이제 $a_{20}\neq 0$인지만 검증하면 되는데,
$a_{20}=8-19\times 2=-30$이므로 $a_1=8$인 경우도 가능합니다.

따라서 모든 a_1의 값의 개수는 $12+1=13$입니다.

38. 정답 ⑤ (난이도: ★)

주어진 조건은 '두 자연수의 곱'이므로 우변을 소인수분해 하면

$$a_1\times a_k=3\times 37$$

이고, 이로부터 $a_1=3$, $a_k=37$을 얻습니다. ($\because a_1\neq 1$)

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 일반항은
$a_n=3+(n-1)d$이므로 $a_k=3+(k-1)d=37$에서

$$(k-1)d=34$$

라는 부정방정식을 얻게 됩니다. 이때, $k-1$과 d가 자연수이므로 가능한 순서쌍은 다음 네 가지입니다.

$$\begin{cases}k=2\\d=34\end{cases},\ \begin{cases}k=3\\d=17\end{cases},\ \begin{cases}k=18\\d=2\end{cases},\ \begin{cases}k=35\\d=1\end{cases}$$

따라서 모든 k의 값의 합은 $2+3+18+35=58$

39. 정답 490 (난이도: ★★)

한 큐에 연역적으로 파악하기 힘든 수열은 차근차근 대입하여 귀납적인 추론을 시도하는 것이 문제 풀이의 당연한 수순입니다. 잘 모르겠다면 $n=4$부터 대입해봅시다.

〔$n=4$ 대입〕
$x<y<z<8$이므로 다음 7개의 숫자 중에서 (홀수, 짝수, 홀수)의 순서쌍의 개수라고 생각할 수 있습니다.

1	2	3	4	5	6	7

① 홀수 사이의 간격이 2인 경우 :
$(1,3)$, $(3,5)$, $(5,7)$로 3가지 경우가 존재하고 그 사이에 올 수 있는 짝수는 각각 1개씩 존재합니다.
즉, 3×1

② 홀수 사이의 간격이 4인 경우 :
$(1,5)$, $(3,7)$로 2가지 경우가 존재하고
그 사이에 올 수 있는 짝수는 각각 2개씩 존재합니다.
즉, 2×2

③ 홀수 사이의 간격이 6인 경우 :
$(1,7)$로 1가지 경우가 존재하고
그 사이에 올 수 있는 짝수는 각각 3개씩 존재합니다.
즉, 1×3

따라서 $a_4=3\times1+2\times2+1\times3$입니다.

구조가 좀 보이시나요? $n=5$인 경우에는 어떻게 될까요? 결과는 아래에 있으니 과정은 스스로 생각해보시길 바랍니다.

$$a_5=4\times1+3\times2+2\times3+1\times4$$

내친김에 일반항까지 구해봅시다.

$$\begin{aligned} a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\times k &= n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2 \\ &= n\times\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{6} \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} \sum_{n=4}^{10}a_n &= \frac{1}{6}\left\{\sum_{n=4}^{10}n^3-\sum_{n=4}^{10}n\right\} \\ &= \frac{1}{6}\{(55^2-1^3-2^3-3^3)-(55-1-2-3)\} \\ &= 490 \end{aligned}$$ [1)]

40. 정답 ③ (난이도: ★★)

일반항 $\{a_n\}$을 귀납적으로 추론해봅시다.

〔$n=1$ 대입〕
2^6을 2^3-1로 나누었으니
$2^6=(2^3-1)Q+R$에서 $Q=2^3$이라 해봅시다.
그러면 $R=2^3$인데, 이것이 2^3-1보다 크기 때문에 한 번 더 나눌 수 있습니다.
$2^3=(2^3-1)Q'+R'$에서 $Q'=1$이라 하면
$R'=1$이므로 이것이 진짜 나머지입니다.
$\Rightarrow\ a_1=1$

1) 아래 세 가지는 자주 쓰이니 외우고 계시는 게 좋습니다.

$$\sum_{n=1}^{10}n=55,\ \sum_{n=1}^{10}n^2=385,\ \sum_{n=1}^{10}n^3=55^2$$

〔$n=2$ 대입〕
$3^7=(3^3-1)3^4+3^4$
$3^4=(3^3-1)3+3$

$\Rightarrow\ a_2=3$

〔$n=3$ 대입〕
$4^8=(4^3-1)4^5+4^5$
$4^5=(4^3-1)4^2+4^2$

$\Rightarrow\ a_3=4^2$

〔$n=4$ 대입〕
$5^9=(5^3-1)5^6+5^6$
$5^6=(5^3-1)5^3+5^3$
$5^3=(5^3-1)1+1$

$\Rightarrow\ a_4=1$

이제 규칙성이 좀 보이시나요? 일반화 해보면 다음과 같습니다.

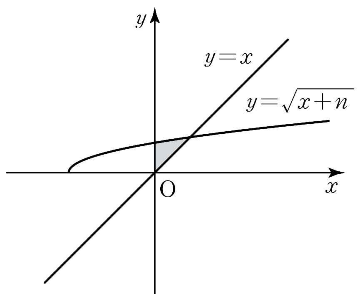
$$a_n=\begin{cases}(n+1)^0 & (n=3k-2)\\(n+1)^1 & (n=3m-1)\\(n+1)^2 & (n=3l)\end{cases}\ (\text{단, } k,\ m,\ l\text{는 자연수})$$

따라서 구하는 값은

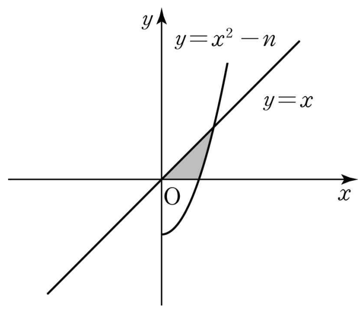
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{16}a_n &= (a_1+\cdots+a_{16})+(a_2+\cdots+a_{14})+(a_3+\cdots+a_{15}) \\ &= 6\times1+\{3+6+\cdots+15\}+\{4^2+7^2+\cdots+16^2\} \\ &= 6+45+590 \\ &= 641 \end{aligned}$$

41. 정답 17 (난이도: ★★★)

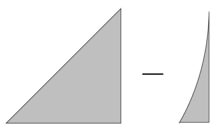
개수를 세야할 영역은 다음과 같습니다.



그런데, 무리식을 다뤄야한다는 것 차제가 부담이 되니까 역함수를 도입하여 다음과 같이 영역을 바꿔서 생각합시다.



또한 주어진 영역을 그냥 세는 것이 아니라 그림과 같이 두 영역에서 얻어진 개수의 차로 생각합시다.[1]



두 그래프의 교점의 좌표를 생각해봅시다.
$y=x$와 $y=x^2-n$이 만나는 점의 x좌표를 기준으로

$x=1$일 때, $n=0$
$x=2$일 때, $n=2$
$x=3$일 때, $n=6$
$x=4$일 때, $n=12$
$x=5$일 때, $n=20$
$x=6$일 때, $n=30$
$x=7$일 때, $n=42$

입니다.

① $n=1$인 경우

두 그래프의 교점의 x좌표가 1.xx이므로
삼각형 영역에서의 개수는 $(1,1)$로 1개가 있고
곡선의 영역에 존재하는 점은 없습니다.

따라서 이 경우 $h(1)=1$입니다.

② $2 \le n \le 5$인 경우

두 그래프의 교점의 x좌표가 2.xx이므로
삼각형 영역에서의 개수는 $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$로 3개가 있고, 곡선 영역에서는 n의 값에 따라 달라집니다.

$n=2$일 때,
$y=x^2-2$이므로 $(2,2)$, $(2,1)$가 곡선 영역에 속하지만, $(2,2)$는 경계의 점이므로 여기서는 세지 말아야 합니다.
$h(2)=3-1=2$

$n=3$일 때,
$y=x^2-3$이므로 $(2,1)$이 곡선 영역에 속하지만,
마찬가지로 경계의 점이므로 제외해야 합니다.
$h(3)=3-0=3$

$n=4,5$일 때,
곡선영역에 존재하는 점이 없습니다.
$h(4)=3$, $h(5)=3$

② $6 \le n \le 11$인 경우

두 그래프의 교점의 x좌표가 3.xx이므로
삼각형 영역에서의 개수는 $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$로 6개가 있고, 곡선 영역에서는 n의 값에 따라 달라집니다.

$n=6$일 때,
$y=x^2-6$이므로 $(3,3)$, $(3,2)$, $(3,1)$이 곡선 영역에 속하지만, $(3,3)$은 경계의 점이므로 제외하면
$h(6)=6-2=4$

$n=7$일 때,
$y=x^2-7$이므로 $(3,2)$, $(3,1)$가 곡선 영역에 속하고, $(3,2)$는 경계의 점이므로 제외하면 $h(7)=6-1=5$

$n=8$일 때,
$y=x^2-8$이므로 $(3,1)$이 곡선 영역에 속하지만,
경계의 점이므로 $h(8)=6-0=6$

$n=9,10,11$일 때는 모두 $h(n)=6$입니다.

③ $12 \le n \le 19$인 경우

$h(12)=10-3=7$
$h(13)=10-2=8$
$h(14)=10-1=9$
$h(n)=10$ (단, $n=15, \cdots, 19$)

④ $20 \le n \le 29$인 경우

$h(20)=15-4=11$
$h(21)=15-3=12$
$h(22)=15-2=13$
$h(23)=15-1=14$
$h(n)=15$ (단, $n=24, \cdots, 29$)

⑤ $30 \le n \le 40$인 경우

$h(30)=21-5=16$
$h(31)=21-4=17$
$h(32)=21-3=18$

1) 단, 경계에 있는 점은 한쪽 영역에서만 세야 합니다.

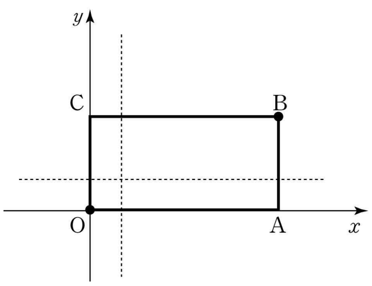
$h(33) = 21 - 2 = 19$
$h(34) = 21 - 1 = 20$
$h(n) = 21$ (단, $n = 30, \cdots, 40$)

$h(n)$이 짝수가 되도록 하는 자연수 $n\,(n \le 40)$의 개수를 모두 세어보면 17이 나옵니다.[1]

42. 정답 36 (난이도: ★★)

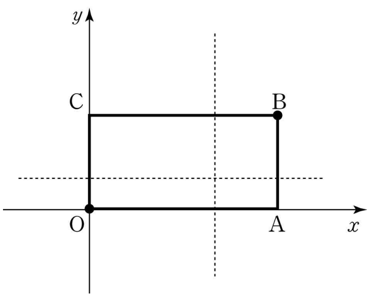
유리함수 $f(x) = \dfrac{b}{x-a} + c$의 두 점근선이 직사각형 OABC와 네 점에서 만난다는 것은 두 점근선의 교점인 (a, c)가 직사각형 OABC의 내부에 존재하는 것을 의미합니다. 이로부터 $1 \le a \le 5$, $1 \le c \le 2$입니다.

예를 들어 $a = 1$, $c = 1$인 경우
$f(x) = \dfrac{b}{x-1} + 1$의 두 점근선은 다음과 같습니다.



함수 $f(x) = \dfrac{b}{x-1} + 1$가 점 O를 지날 때의 b의 값보다는 크고, 점 B를 지나는 순간 b의 값보다는 작아야 $y = f(x)$의 그래프가 직사각형과 두 점에서 만납니다.
그렇게 되는 b의 범위를 계산하면 $1 < b < 10$입니다.
따라서 8개의 순서쌍이 존재합니다.

다른 예로 $a = 4$, $c = 1$인 경우
$f(x) = \dfrac{b}{x-4} + 1$의 두 점근선은 다음과 같습니다.



이 경우는 계산해보면 두 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{B}(6,3)$를 지나는 순간 b의 값이 모두 $b = 4$로 같아집니다.

이것은 $b = 4$일 때, $y = f(x)$가 두 점 O, B를 동시에 지나는 것을 의미하므로 두 점에서 만나는 경우는 $b = 4$인 경우 밖에 없습니다. 즉, 순서쌍의 개수는 1입니다.

위의 두 가지 예시로부터 알 수 있는 사실은
함수 $f(x) = \dfrac{b}{x-a} + c$가 두 점 O, B를 지날 때의 b의 값이 서로 같을 경우에는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1개이고, 서로 다를 경우에는 그 사이에 b의 개수만큼 순서쌍 (a, b, c)가 존재하는 것입니다.

함수 $f(x) = \dfrac{b}{x-a} + c$가
점 $\mathrm{O}(0,0)$를 지날 경우 $b = ac$이고,
점 $\mathrm{B}(6,3)$을 지날 경우 $b = (6-a)(3-c)$입니다.

따라서 다음 세 가지 경우로 나누어 생각합시다.

Case 1. $ac > (6-a)(3-c)$

식을 정리하면 $a + 2c > 6$입니다.
가능한 순서쌍 (a, c)는 $(5,1)$, $(5,2)$, $(4,2)$, $(3,2)$이므로 각각의 경우에 b의 개수는 2, 8, 5, 2입니다.

Case 2. $ac = (6-a)(3-c)$

$a + 2c = 6$이므로 순서쌍 (a, c)는 $(4,1)$, $(2,2)$이고,
이 경우는 b가 같으므로 순서쌍이 각각 1개씩 존재합니다.

Case 3. $ac < (6-a)(3-c)$

식을 정리하면 $a + 2c < 6$이고,
가능한 순서쌍 (a, c)는 $(3,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(1,1)$이므로 각각의 경우에 b의 개수는 2, 5, 2, 8입니다.

따라서 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 36입니다.

43. 정답 82 (난이도: ★★)

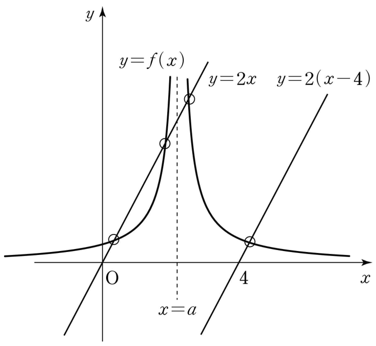
문제 조건에 의하면 $f(x) = \left|\dfrac{b}{x-a}\right|$의 그래프와 두 직선 $y = 2(x-4)$, $y = 2x$의 그래프가 만나는 점의 개수가 각각 1, 3입니다.

$y = f(x)$의 위치에 따라 양상이 바뀔 것이라 예측되므로 자연수 a에 따라 경우를 나누어 생각합니다.

[1] 2, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 30, 32, 34

① $a=1,2,3$인 경우

문제 조건을 만족시키는 그림은 다음과 같습니다.



직선 $y=2(x-4)$는 a, b에 관계없이 $y=f(x)$와 오직 한 점에서 만나지만, 직선 $y=2x$가 $y=f(x)$와 세 점에서 만나기 위해서는 $x<a$인 영역에서 $y=2x$와 $y=-\dfrac{b}{x-a}$가 서로 다른 두 점에서 만나야 합니다.

즉, $2x=-\dfrac{b}{x-a}$을 정리한 방정식 $2x^2-2ax+b=0$의 판별식이 0보다 커야 하므로 $D=4a^2-8b>0$에서 $a^2>2b$입니다.[1)]

$a=1$: b는 존재하지 않음. → 0개
$a=2$: $b=1$ → 1개
$a=3$: $b=1,2,3,4$ → 4개

② $a=4$인 경우

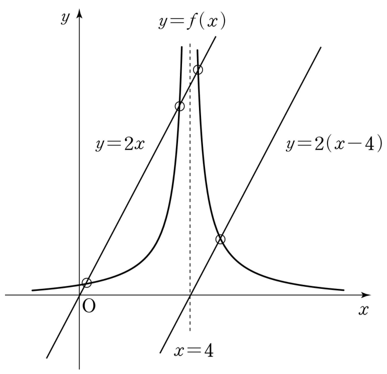


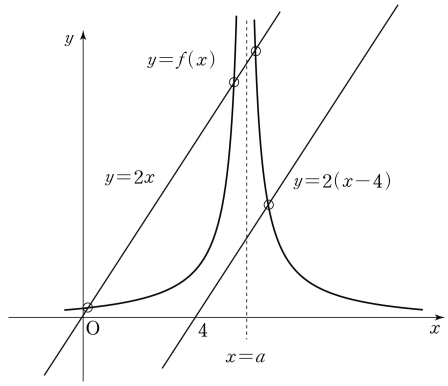
그림 보시면 아시겠지만 ①의 경우와 논의가 같습니다.

$a=4$: $b=1,2,\cdots,7$ → 7개

1) 사실 판별식이 0보다 크다는 것뿐만 아니라 두 근이 모두 $x<a$를 만족시키는지도 따져야 하는데, $2x^2-2ax+b=0$에서 근의 공식을 써보면 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-2b}}{2}$이므로 두 근 모두 a보다 작다는 것은 바로 확인이 됩니다. 아니면 그래프를 보더라도 $x>a$에서 $y=-\dfrac{b}{x-a}$의 그래프는 제 4사분면에 있기 때문에 $x>a$인 영역에서 교점이 존재하지 않는 것은 당연합니다.

③ $a=5,6,7,8$인 경우

문제 조건을 만족시키는 그림은 다음과 같습니다.



직선 $y=2x$는 $y=-\dfrac{b}{x-a}$와 두 점에서 만나야 하고,

직선 $y=2(x-4)$는 $y=-\dfrac{b}{x-a}$와 만나지 않아야 합니다.

즉, 이차방정식 $2x^2-2ax+b=0$은 두 실근을 가져야 하고, $2x^2-2(a+4)x+8a+b$는 허근을 가져야 하므로

$a^2-2b>0 \cdots$ (1)
$(a+4)^2-2(8a+b)<0 \cdots$ (2)

가 각각 성립합니다.

(1), (2)에 의하여 $\dfrac{(a-4)^2}{2}<b<\dfrac{a^2}{2}$이므로

$a=5$ → 12개
$a=6$ → 15개
$a=7$ → 20개
$a=8$ → 23개

그러므로 순서쌍 (a,b)의 개수는 82

44. 정답 ④ (난이도: ★★★)

$a_1=1$인 것은 나와 있지만, 공차에 대한 언급이 전혀 없습니다. 그런데 (가), (나) 조건을 요약하면,

"$a_k<200$인 자연수 k에 대하여
$a_t=$(자연수)가 되도록 하는 $t\,(t\le k)$가 10개 존재한다."

이므로 공차 d가 무리수는 아님을 알 수 있습니다.
즉, 공차 d는 유리수이고, 문제 조건에 의해 $d>1$이므로

$$d=\frac{p}{q}\ \text{(단, } p>q\text{인 서로소인 자연수)}$$

이라 나타낼 수 있습니다.

공차가 $d=\dfrac{p}{q}$이므로 일반항을 $a_n=1+(n-1)\times d$이라 놓고, a_t가 자연수가 되도록 하는 a_t를 모두 나열하면

$$a_1=1,\ a_{q+1}=p+1,\ a_{2q+1}=2p+1,\ \cdots$$

가 됩니다. 이제 주어진 조건들을 활용해봅시다.

(가) 조건에 의해서
$a_{9q+1}=9p+1<a_k=1+(k-1)\times d<200\ \cdots\ (1)$

(나) 조건에 의해서
$9q+1\le k<10q+1\ \cdots\ (2)$ [1)]

식 (1)에서 $9p+1<200$이므로 $p\le 22$이고,
$1+(k-1)\times d<200$이므로 $k<\dfrac{199}{d}+1$입니다.

k가 최대가 되려면 $\dfrac{199}{d}+1$의 값도 최대한 커야 하는데, 그러기 위해서는 d가 최대한 작아야 합니다.

즉, $d=\dfrac{p}{q}$가 최대한 작아야 하는데, $p\le 22$이므로
가장 이상적인 경우는 $p=22$, $q=21$입니다.

$p=22$, $q=21$이라 가정해놓고, k의 최댓값을 구한 뒤에 식 (2)의 결과와 부합하는지만 검증만 하시면 됩니다.

$$k<\frac{199}{d}+1=\frac{21\times 199}{22}+1=190+\frac{21}{22}$$

이므로 k의 최댓값은 190입니다.

이제 $q=21$을 식 (2)에 대입해보면 $190\le k<211$이므로

위 결과와 잘 부합합니다. 따라서 k의 최댓값은 190

45. 정답 ③ (난이도: ★★)

A_n은 직선 위의 점들의 집합, B는 영역의 집합입니다.

따라서 $A_n\cap B$는 직선 위의 모든 점 중에서 특정 영역에 속한 점들의 집합입니다.

문제에서 구하는 모든 자연수의 순서쌍 (x,y)가
$x+4y=20n-10$이라는 관계식을 만족시키기 때문에
y가 자연수일 때를 기준으로 개수를 세는 게 좋습니다.

1) 원소가 10개이므로 k는 10번째 자연수인 $9q+1$보다는 크거나 같고, 11번째 자연수인 $10q+1$보다는 작아야 합니다.

$x+4y=20n-10$는 다음 두 가지를 만족시킵니다.

$$x>0,\quad x\le 2y$$

따라서 y의 범위는 $\dfrac{10n-5}{3}\le y<\dfrac{10n-5}{2}$입니다.

〔$n=1$〕 : $\dfrac{5}{3}\le y<\dfrac{5}{2}\ \Rightarrow\ a_1=1$
〔$n=2$〕 : $\dfrac{15}{3}\le y<\dfrac{15}{2}\ \Rightarrow\ a_2=3$
〔$n=3$〕 : $\dfrac{25}{3}\le y<\dfrac{25}{2}\ \Rightarrow\ a_3=4$
〔$n=4$〕 : $\dfrac{35}{3}\le y<\dfrac{35}{2}\ \ a_4=6$
〔$n=5$〕 : $\dfrac{45}{3}\le y<\dfrac{45}{2}\ \Rightarrow\ a_5=8$
〔$n=6$〕 : $\dfrac{55}{3}\le y<\dfrac{55}{2}\ \Rightarrow\ a_6=9$
〔$n=7$〕 : $\dfrac{65}{3}\le y<\dfrac{65}{2}\ \Rightarrow\ a_7=11$
〔$n=8$〕 : $\dfrac{75}{3}\le y<\dfrac{75}{2}\ \Rightarrow\ a_8=13$
〔$n=9$〕 : $\dfrac{85}{3}\le y<\dfrac{85}{2}\ \Rightarrow\ a_9=14$
⋮ ⋮ ⋮

$\sum_{n=1}^{30}a_n$을 구해야 하는데, 규칙성을 보니 3개씩 묶어주면

$$a_1+a_2+a_3=8,\quad a_4+a_5+a_6=23,\quad a_7+a_8+a_9=38$$

이므로 결국 $\sum_{n=1}^{30}a_n$은 초항이 8, 공차가 15인 등차수열의 10항까지의 합으로 볼 수 있습니다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{30}a_n=10\times\frac{(8)+(8+15\times 9)}{2}=755$$

46. 정답 24 (난이도: ★★)

$a_n=(a_{n+1})^2-(a_n)^2$이므로 $\{a_n\}$의 규칙성을 찾아봅시다.

$a_1=1$
$a_2=1$
$a_3=1^2-1^2=0$
$a_4=0^2-1^2=-1$
$a_5=(-1)^2-0^2=1$
$a_6=1^2-(-1)^2=0$
$a_7=0^2-1^2=-1$
$a_8=(-1)^2-0^2=1$
⋮ ⋮ ⋮

made by 110615 (110615@naver.com)

$b_{n+1}+b_n=a_n+n$이므로 마찬가지로 수열 $\{b_n\}$의 규칙성을 찾아봅시다.

$b_1=14$
$b_2=-12$
$b_3=15$
$b_4=-12$
$b_5=15$
$b_6=-9$
$b_7=15$
$b_8=-9$
$b_9=18$
$b_{10}=-9$
$b_{11}=18$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

마지막으로 $b_{k+5}-b_{k+4}$의 규칙성을 찾아보면 다음과 같습니다.

$k=1$ 대입 : $b_6-b_5=-24$
$k=2$ 대입 : $b_7-b_6=24$
$k=3$ 대입 : $b_8-b_7=-24$
$k=4$ 대입 : $b_9-b_8=27$
$k=5$ 대입 : $b_{10}-b_9=-27$
$k=6$ 대입 : $b_{11}-b_{10}=27$
$k=7$ 대입 : $b_{12}-b_{11}=-24$
$k=8$ 대입 : $b_{13}-b_{12}=24$
$k=9$ 대입 : $b_{14}-b_{13}=-24$
$k=10$ 대입 : $b_{15}-b_{14}=27$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

위의 결과로부터 $b_{k+5}-b_{k+4}\neq 24\times(-1)^k$를 만족시키는 자연수 $k\,(k\le 50)$의 개수는 24임을 알 수 있습니다.

확률과 통계

47. 정답 ③ (난이도: ★★)

조건 (나)에서 가능한 자연수 x는 n, $n+1$밖에 없습니다.

$x=n$일 경우, $y+z+w=15-n$
$x=n+1$일 경우, $y+z+w=14-n$

이고, y, z, w는 모두 자연수이므로 가능한 모든 순서쌍 (x,y,z,w)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{12-n}+{}_3\mathrm{H}_{11-n}$입니다.

이를 조금 더 정리하면,

$$\begin{aligned}{}_3\mathrm{H}_{12-n}+{}_3\mathrm{H}_{11-n}&={}_{14-n}\mathrm{C}_2+{}_{13-n}\mathrm{C}_2\\&=\frac{(14-n)(13-n)}{2}+\frac{(13-n)(12-n)}{2}\\&=(13-n)^2\end{aligned}$$

이므로 이것이 16 이상 64 이하가 되어야 합니다.
가능한 n의 범위는 $5\le n\le 9$ 또는 $17\le n\le 21$인데, $x+y+z+w=15$라는 조건 자체가 $x\le 12$를 함의하므로 $5\le n\le 9$입니다. 따라서 n의 개수는 5입니다.

48. 정답 431 (난이도: ★★)

① $x=-1$인 경우 :
(나) 조건에서 $y\ge 1$이므로 $y+z+w=11$에서

$$\begin{cases}y=Y+1 & (Y\ge 0)\\ z=Z-1 & (Z\ge 0)\\ w=W-1 & (W\ge 0)\end{cases}$$

으로 바꿔서 정리하면 $Y+Z+W=12$이므로 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{12}=91$입니다.

② $x=0$인 경우 :
y에 제한이 없으므로 $y+z+w=10$에서

$$\begin{cases}y=Y-1 & (Y\ge 0)\\ z=Z-1 & (Z\ge 0)\\ w=W-1 & (W\ge 0)\end{cases}$$

으로 바꿔서 정리하면 $Y+Z+W=13$이므로 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{13}=105$입니다.

③ $x\ge 1$인 경우 :
$-1\le y\le 1$이므로 $x+y+z+w=10$을 y에 따라 나누어 봅시다.

$y=-1$일 때,
$x+z+w=11$에서 $\begin{cases}x=X+1 & (X\ge 0)\\ z=Z-1 & (Z\ge 0)\\ w=W-1 & (W\ge 0)\end{cases}$ 으로 바꾸면
$X+Y+Z=12$이므로 ${}_3\mathrm{H}_{12}=91$

$y=0$일 때,
$x+z+w=10$에서 $\begin{cases}x=X+1 & (X\ge 0)\\ z=Z-1 & (Z\ge 0)\\ w=W-1 & (W\ge 0)\end{cases}$ 으로 바꾸면
$X+Y+Z=11$이므로 ${}_3\mathrm{H}_{11}=78$

$y=1$일 때,
$x+z+w=9$에서 $\begin{cases}x=X+1 & (X\ge 0)\\ z=Z-1 & (Z\ge 0)\\ w=W-1 & (W\ge 0)\end{cases}$ 으로 바꾸면
$X+Y+Z=10$이므로 ${}_3\mathrm{H}_{11}=66$

made by 110615 (110615@naver.com)

그러므로 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는
$91+105+(91+78+66)=431$

49. 정답 105 (난이도: ★★)

음이 아닌 정수 x, y, z, w에 대하여
전체집합을 $U=\{(x,y,z,w)|x+y+z+w=10\}$이라 하고,
집합 A, B, C, D를 다음과 같이 정의합시다.

$$A=\{(x,y,z,w)|x\le 5\}$$
$$B=\{(x,y,z,w)|y\le 5\}$$
$$C=\{(x,y,z,w)|z\le 4\}$$
$$D=\{(x,y,z,w)|w\le 4\}$$

그러면 (나) 조건의 집합은 $A\cap B\cap C\cap D$가 됩니다.
원소의 개수를 구하기 위하여 여집합을 생각합시다.

즉, 전체집합에서
$(A\cap B\cap C\cap D)^C=A^C\cup B^C\cup C^C\cup D^C$인 경우를 제외하는 식으로 접근합시다.

여집합을 생각하는 것이 더 좋은 이유는
$x+y+z+w=10$이므로
네 집합 A^C, B^C, C^C, D^C가 대부분 서로 겹치지 않기 때문입니다. 겹치는 경우가 딱 한 가지 있는데,
$(0,0,5,5)\in C^C\cap D^C$입니다.

전체 집합 U의 원소의 개수 ${}_4\mathrm{H}_{10}=286$
A^C의 원소의 개수는 $x\ge 6$이므로 ${}_4\mathrm{H}_{10-6}=35$
B^C의 원소의 개수는 $y\ge 6$이므로 ${}_4\mathrm{H}_{10-6}=35$
C^C의 원소의 개수는 $z\ge 5$이므로 ${}_4\mathrm{H}_{10-5}=56$
D^C의 원소의 개수는 $w\ge 5$이므로 ${}_4\mathrm{H}_{10-5}=56$

따라서 구하는 개수는
$286-\{(35+35+56+56)-1\}=105$[1)]

50. 정답 ③ (난이도: ★★)

(나) 식을 인수분해 하면 $(x-1)(x-2)(x-5)=0$입니다.
즉, $x=1,2,5$이므로 경우를 나누어 합의법칙으로 각각을 더해줍시다.

(i) $x=1$인 경우

1) 포함배제의 원리를 이용한 것입니다.

$$\begin{aligned}n(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=&n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)+n(A_4)\\&-\{n(A_1\cap A_2)+\cdots+n(A_3\cap A_4)\}\\&+\{n(A_1\cap A_2\cap A_3)+\cdots+n(A_2\cap A_3\cap A_4)\}\\&-n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)\end{aligned}$$

$1\le y+z+w\le 6$인데, 이것을 부등식으로 보면 경우를 또 나누어야 해서 복잡하니까 새로운 문자 k를 도입하여 방정식으로 만들어 봅시다.

$$y+z+w+k=6\ (\text{단, } 0\le k\le 5)$$

위 식은 오로지 $k=6$인 상황에만 제한이 걸려 있기 때문에 여사건을 활용하여 전체에서 $k=6$인 경우를 제외합시다. 즉, ${}_4\mathrm{H}_6-{}_3\mathrm{H}_0=83$

(ii) $x=2$인 경우

$0\le y+z+w\le 5$인데, 마찬가지로 방정식으로 만들면 다음과 같습니다.

$$y+z+w+k=5\ (\text{단, } 0\le k\le 5)$$

이번에는 모든 문자에 제한이 없기 때문에 순서쌍의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_5=56$

(iii) $x=5$인 경우

$-3\le y+z+w\le 2$인데, 모두 음이 아닌 정수이므로
$0\le y+z+w\le 2$입니다. 이것도 방정식으로 만듭시다.

$$y+z+w+k=2\ (\text{단, } 0\le k\le 2)$$

이번에도 모든 문자에 제한이 없기 때문에 순서쌍의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_2=10$

$\therefore 83+56+10=149$

51. 정답 ② (난이도: ★★)

$x+y+z+w=10$을 만족시키는 가능한 자연수 (x,y,z,w)의 순서쌍의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_6=84$입니다.

그런데 이 중에서 $||x-2|+a|\ge 2$까지 동시에 만족시키는 순서쌍의 개수가 80이므로
이것의 부정조건인 $||x-2|+a|<2$를 만족시키는 순서쌍의 개수가 4입니다.

이 조건은 오직 x에만 걸린 제한조건이므로 제한이 걸린 x를 찾기 위해 x에 따른 순서쌍의 개수를 구해봅시다.

$x=7$인 경우 : $y+z+w=3 \Rightarrow {}_3\mathrm{H}_0=1$
$x=6$인 경우 : $y+z+w=4 \Rightarrow {}_3\mathrm{H}_1=3$
$x=5$인 경우 : $y+z+w=5 \Rightarrow {}_3\mathrm{H}_2=6$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

순서쌍이 4개가 되기 위해서는 오직 $x=7$, $x=6$에서만 $||x-2|+a|<2$가 되어야 합니다.

$x=7$ 대입 : $|a+5|<2 \Rightarrow -7<a<-3$
$x=6$ 대입 : $|a+4|<2 \Rightarrow -6<a<-2$

$x=1,2,3,4,5$는 부정조건을 만족시키지 않아야 하므로

$x=5$ 대입 : $|a+3|\geq 2 \Rightarrow a\geq -1$ 또는 $a\leq -5$
$x=4$ 대입 : $|a+2|\geq 2 \Rightarrow a\geq 0$ 또는 $a\leq -4$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

종합하면 실수 a의 범위는 $-6<a\leq -5$이므로
정수 a는 $a=-5$입니다.

made by 110615 (110615@naver.com)