

실수 전체 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

$$(가) \quad \frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}$$

$$(나) \quad f(x+\pi) = \frac{1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2}}{3}$$

$$(다) \quad \int_{-\pi}^{\pi} (3f(x) - 1)dx = \pi$$

이때 $\int_{2019\pi}^{2023\pi} f(x)dx$ 를 구하라.

풀이)

$3f(x) - 1 = t$ 라 하면 $0 \leq t \leq 1$ 이다.

$g(t) = t + \sqrt{1-t^2}$ ($0 \leq t \leq 1$) 라 하자. $g'(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}-t}{\sqrt{1-t^2}}$ 이다.

$0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 $g'(t) > 0$, $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 $g'(t) = 0$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < t < 1$ 일 때

$g'(t) < 0$ 이고, $g(0) = 1$, $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$, $g(1) = 1$ 이므로 $1 \leq g(t) \leq \sqrt{2}$ 이다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (3f(x) - 1)dx = \int_{-\pi}^0 (3f(x) - 1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2})dx = \pi \text{ 이다.}$$

$1 \leq g(t)$ 이므로 $1 \leq 3f(x) - 1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2}$ 이고,

$$\int_{-\pi}^0 1dx \leq \int_{-\pi}^0 (3f(x) - 1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2})dx \text{ 이다.}$$

구간 $(-\pi, 0)$ 에 $1 < 3f(x) - 1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2}$ 을 만족하는 어떤 구간 (a, b) 가 존재한다고 가정하자.

그러면 $\int_a^b 1dx < \int_a^b (3f(x) - 1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2})dx$ 이므로

$$\int_{-\pi}^0 1dx < \int_{-\pi}^0 (3f(x) - 1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2})dx \text{ 이다.}$$

그런데 $\int_{-\pi}^0 1dx = \pi$, $\int_{-\pi}^0 (3f(x) - 1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2})dx = \pi$ 이므로 모순이다.

따라서 적어도 열린구간 $(-\pi, 0)$ 에서 $3f(x) - 1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2} = 1$ 이다.

따라서 열린구간 $(-\pi, 0)$ 에서 $f(x) = \frac{1}{3}$ 또는 $f(x) = \frac{2}{3}$ 이다.

열린구간 $(-\pi, 0)$ 에서 $f(x) = \frac{1}{3}$ 인 경우, $f(x+\pi) = \frac{1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2}}{3}$ 이므로

열린구간 $(0, \pi)$ 에서 $f(x) = \frac{2}{3}$ 이다.

열린구간 $(-\pi, 0)$ 에서 $f(x) = \frac{2}{3}$ 인 경우, $f(x+\pi) = \frac{1 + \sqrt{6f(x) - 9[f(x)]^2}}{3}$ 이므로

열린구간 $(0, \pi)$ 에서 $f(x) = \frac{1}{3}$ 이다.

모든 경우에서 $f(x)$ 는 실수 전체에서 연속이 아니므로, 조건을 만족하는 함수 $f(x)$ 가 존재하지 않는다.