청의미의 기출 학습법

made by 이원엽

목차

1. 기본 개념은 아이디어를 떠올리는데 도움을 준다!

1) 직관보다는 최대한의 논리로 연습하세요.

여러분이 직관을 쓰는 이유는, 참 간단합니다. 분명 눈에는 보이는데 그 이유를 모르니까요.
그렇다 하더라도 여러분은 최대한의 논리로 기출문제를 대하시고 연습하셔야 합니다.

구 $x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $z=-1$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. x축을 포함하는 평면 α와 구 $x^2+y^2+z^2=4$가 만나서 생기는 원이 C와 오직 한 점에서 만날 때, 평면 α의 한 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ 3,\ b)$라 하자. a^2+b^2의 값을 구하시오.

(출처 : 2006학년도 수능)

이 문제를 접근할 때 보통 그림을 그리시면, x축을 기준으로 평면 를 돌려보게 됩니다.
그 때, 접할 때를 찾게 되고, x=0일 때의 점을 특이점으로 생각하게 됩니다.
실제로 잘은 모르겠지만 우리는 그 점에서 접한다고 생각합니다.

여러분께서는, 잘 모르겠지만 이럴 것 같아서 풀이를 진행하는 경우가 많이 있을 겁니다.

반드시 이런 문항에 대해서 그 이유를 최대한 따져가며 정리하셔야 합니다.

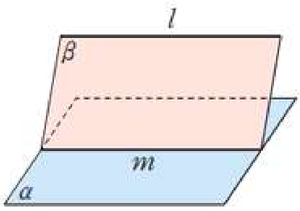
문제를 풀 때는, 직관이든 뭐든 다 쓰셔야 하는 게 맞습니다.
실제로 잘 모르겠지만 접할 것 같다면, 그리고 풀이가 잘 안 보인다면, 그렇게 진행하셔야지요.
다만, 지금 공부할 때마저도 그렇게 하셔야겠냐는 것입니다.
기출을 분석하는 과정마저도 기본에 충실하지 못하면, 기출을 분석해서 나아짐이 없습니다..

이 문제의 해법을 담은 교과서 예제는 다음과 같습니다.

직선 l과 평면 α가 평행하면, 직선 l을 포함하는 평면 β와 평면 α의 교선 m은 직선 l과 평행함을 보여라.

직선 l과 평면 α는 평행하므로 만나지 않는다. 따라서 직선 l은 평면 α 위에 있는 직선 m과 만나지 않는다.
그런데 직선 l과 직선 m은 같은 평면 β 위에 있다.
즉, 두 직선 l, m은 한 평면 위에 있고 만나지 않으므로

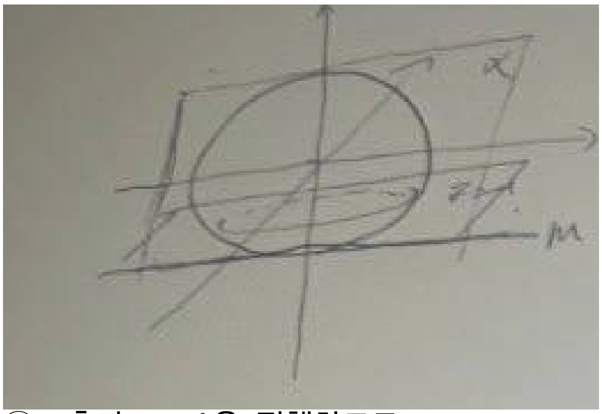
$$l \,/\!/\, m$$



이 예제의 증명은, 두 직선의 위치관계가 평행, 만남, 꼬인 위치의 3가지가 있음을 이해하고,
한 평면을 이루지 않는 꼬인 위치를 배제한 후, 만나는 경우까지 배제하면서 증명합니다.

그래서, 우리는 직선과 평면이 평행하면, 그 직선을 포함하는 평면과, 평행했던 평면이 이루는 교선과도 직선이 평행함을 알 수 있습니다.

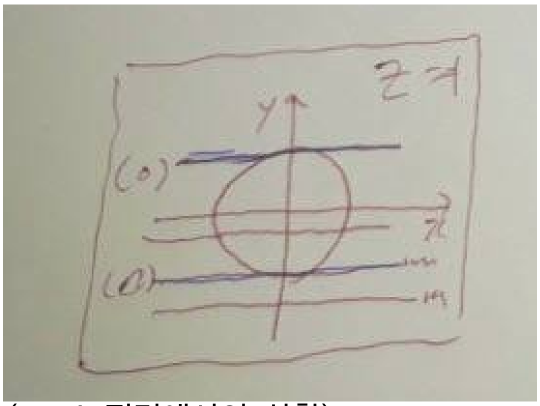
이제 수능문제에 접근해봅시다.



① x축과 z=-1은 평행하므로

② 예제에 의해 x축과 와 z=-1이 만나는 교선은 반드시 평행합니다.

★x축과 평행한 z=-1위에 있는 직선이 반드시 원과 한 점에서 만날 때를 상상하면 됩니다!



(z=-1 평면에서의 상황)

이 때의 좌표는 $(0,\ \ 3,-1)$ 혹은 $(0,-\sqrt{3},-1)$ 입니다.

결과적으로는 x축을 중심으로 평면 α를 돌려서 접했을 때가 맞았네요!

예제에 나와있는 대로, 평면 z=-1과 직선 x축이 평행할 경우,

x축을 지나는 평면 α가 z=-1과 이루는 교선과도 x축이 평행하기 때문입니다!

그러나 이런 사항을 알고 분석하는 것과 아닌 것의 차이는 큽니다!

이 차이가 확실한 기출분석과 아닌 기출분석의 차이임을 이해하시길 바랍니다.

이유를 모르고서 답만 맞는다고 실력은 절대 늘지 않습니다!

2) 예제 풀이의 근거를 이해하면, 기출 풀이도 이해할 수 있습니다.

① 함수의 극한 개념에 대한 예제 풀이와 기출 풀이.
다음은 미적분 1 교과서의 함수의 극한 예제문제입니다.

예제 2

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x+1}{3x^2+1}$　　(2) $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{4x^2+x}-2x)$

(출처 : 미래엔 미적분 1 교과서)

여러분은 이 문제를 어떻게 푸시나요?
당연히, (1)번 문제는 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 동시에 나눠줍니다.
(2)번 문제는 유리화를 하게 되지요.

그렇다면 그 근거는 어디에 있나요?

함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

① $\lim_{x \to a} kf(x)=k\lim_{x \to a} f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

② $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)+\lim_{x \to a} g(x)=\alpha+\beta$

③ $\lim_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)-\lim_{x \to a} g(x)=\alpha-\beta$

④ $\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\lim_{x \to a} f(x)\cdot\lim_{x \to a} g(x)=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

(출처 : 미래엔 미적분 1 교과서)
바로 이것입니다. (1)번 문제의 원리는, 분모의 최고차항으로 나누기 때문에

분모는 반드시 0이 아닌 값으로 수렴할 수밖에 없다![1)]

라는 것입니다. 이렇게, 예제 풀이는 개념과 밀접한 연관성을 가질 수밖에 없지요.
(2)번의 예제는 반드시 분자의 유리화를 해야 합니다.
그러나 우리는 분모의 유리화의 이유[2)]는 익히 알고 있지만, 분자의 유리화는 들어본 적이 없습

1) 분모는 0이 아닌 수로 수렴하는 함수가 되며, 성질 ⑤에 의해 분자가 수렴하면 극한값을 구할 수 있습니다.
2) 이걸 모르지 않으리라 생각합니다만, 무리수와는 달리 통분할 때 유리수는 반드시 하나의 수로 표현됩니다.

니다! 그리고 그 이유도 사실 모릅니다. 왜 분자의 유리화를 해야 할까요?

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+4x+8} - \sqrt{x^2-8x-24})$$

다음 극한의 값을 구하려 합니다. 극한을 구할 수는 없습니다!
두 함수가 모두 발산하므로 함수의 극한에 대한 성질을 이용할 수 없습니다.
$\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x+8} - \sqrt{x^2-8x-24})(\sqrt{x^2+4x+8} + \sqrt{x^2-8x-24})}{\sqrt{x^2+4x+8} + \sqrt{x^2-8x-24}} = \lim_{x \to \infty} \frac{12x+32}{\sqrt{x^2+4x+8} + \sqrt{x^2-8x-24}}$ 속는 셈 치고 유리화를 시켜보았습니다.
이제, 분모를 보시면, 이차식의 제곱근입니다.
x로 분모와 분자를 나눠보시면 다음과 같습니다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{12 + \frac{32}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{8}{x} - \frac{24}{x^2}}}$$

생각해봅시다. 이제는 분모와 분자 모두 수렴하는 함수로 변형되었습니다!

이제, 우리는 극한값의 계산 파트에서 가장 중요한 사실을 이해하게 됩니다.

어떻게든 수렴하는 함수로 만드는 게 가장 중요하겠구나!

이제 예전 기출문제를 한번 보면서 어떻게 연결되는지 생각해봅시다!

2006년 6월 가형 10번 문항입니다!

Q.두 다항함수 (x), $f_2(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

(가) $f_1(0)=0$, $f_2(0)=0$
(나) $f_i'(0) = \lim_{x \quad 0} \frac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}$ $(i=1, 2)$
(다) $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 원점에서의 접선이 서로 직교한다.

이 문제를 어떤 식으로 접근해야할까요? 생각해봅시다.
(나)의 극한값이 존재한다고 하였습니다. 즉 수렴한다는 것이죠.

우리는 $f_1(x)$, $f_2(x)$에 대한 정보를 (가)조건과 (다)조건만으로는 알 수 없습니다.
결국 극한값을 계산해서 풀어야하는데, 분모에 X=0을 대입하면 0이 되어버립니다.

함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

① $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

② $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\alpha+\beta$

③ $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=\alpha-\beta$

④ $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq 0$)

다시 한 번 봅시다. ⑤의 성질 때문에, 분모가 0으로 수렴할 수는 없습니다.
이것을 파악한다면 우리의 목표는 명확합니다.

분모가 0이 되지 않도록 식을 변형해볼 방법이 없을까?

어떻게 변형할 수 있을까요? 분모와 분자에 같은 수를 나누면 식이 성립합니다.
그렇다면 x로 나누어보면 되지 않을까요?

$${}'(0) = \lim_{x\quad 0} \frac{\dfrac{f_i(x)}{x}+2k}{\dfrac{f_i(x)}{x}+k}$$ 로 말입니다.

적어도 분모에 k는 남게 됩니다. k는 상수이므로 일단 수렴할 것입니다.
이제 $\dfrac{f_i(x)}{x}$부분만 극한을 보내어 수렴하는지만 생각해보면 되지 않을까요?
이것은 정확하게 극한이 x=0일 때의 미분계수, 즉 $f_i'(0)$으로 수렴하게 되며
수렴하는 함수에 대한 극한값의 계산에 의해서 극한값을 계산할 수 있게 됩니다.
계산은 생략하겠습니다.

이렇듯, 교과서의 예제 풀이에는 개념의 원리가 녹아있으며,
그 개념의 원리로 문제가 풀린다는 사실을 기억하셔야 합니다.

기출 분석을 하실 때, 이런 사항을 고려하셔서 분석하시면 좋을 것입니다.

② 방정식의 실근 개수의 개념에 대한 예제풀이와 기출문제 풀이
이번 예제는 이것입니다! 바로 방정식의 실근 개수와 함수의 그래프지요.

방정식 $\ln x - kx = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

풀이 방정식 $\ln x - kx = 0$에서 $\ln x = kx$, $\frac{\ln x}{x} = k$

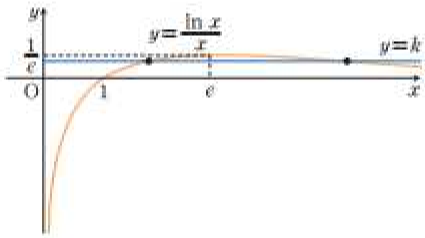
주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = \frac{\ln x}{x}$의 그래프와 직선 $y = k$의 교점의 개수이다.

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$라 하고, $f'(x) = 0$인 x의 값을 구하면 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ 즉, $x = e$

한편, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$이다.

$x > 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$ (극대)	↘



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0 < k < \frac{1}{e}$이다.

(출처 : 미래엔 미적분 2 교과서)
이 문제에 대하여 예제는 왜 $\ln \quad = kx$ 그대로 그리지 않고
$\frac{\ln x}{x} = k$로 변형해서 표현했을까요?
이 이유는 몇 가지가 있습니다.
① 교과서에서는 평행이동을 배웠으며, 회전이동을 배우지 않았습니다.
② 교과서에서는 미분 가능한 함수가 극값을 가질 때, $f'(x) = 0$이라 합니다.
y=k는 x축과 평행한 직선이기 때문에 미분계수가 항상 0이며, 극값에 접합니다.
극값에 접하는 곳에서 실근이 변할 가능성이 있기 때문에, 개수 파악이 용이합니다.

다음도 교과서에 수록된 문제 중 하나입니다.

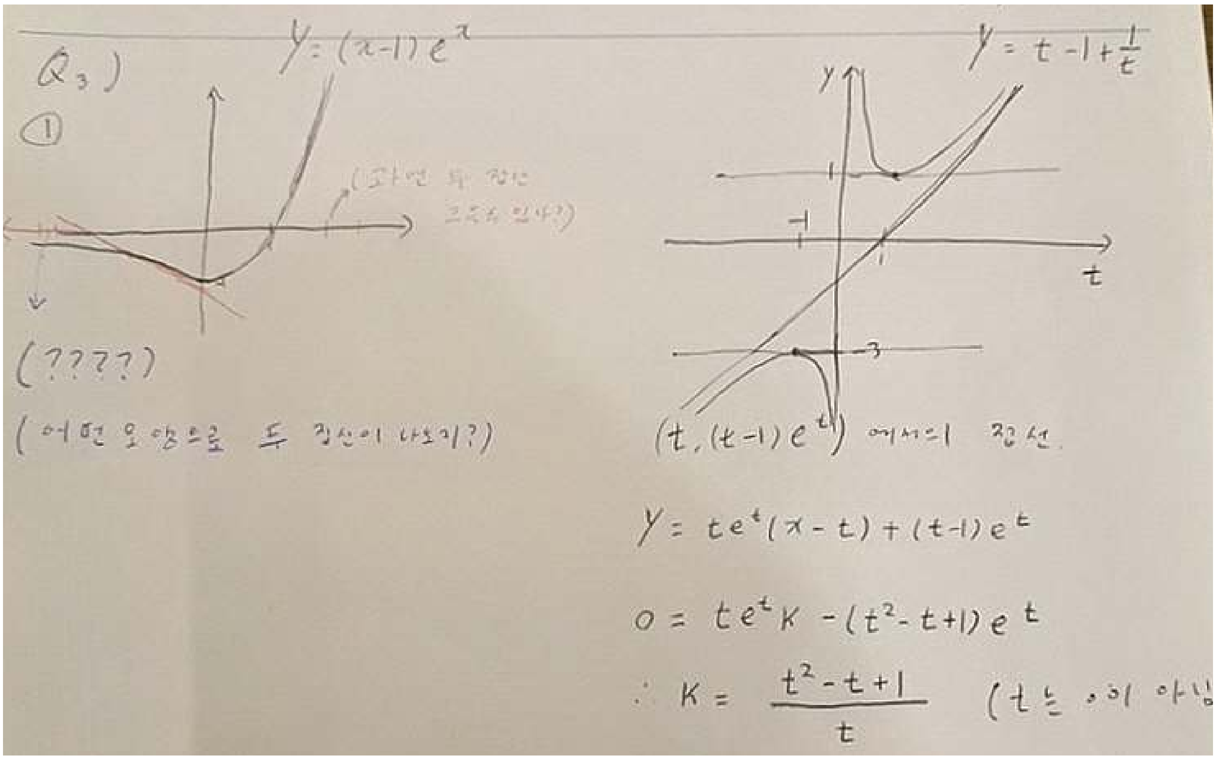
x축 위의 점 (k,0)에서 곡선 $y=(x-1)e^x$에

두 개의 접선을 그을 수 있도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

(단, $\lim_{x\to -\infty}(x-1)e^x=0$)

(출처 : 미래엔 미적분 2 교과서)

이 문제의 손풀이는 다음과 같습니다.



이 풀이의 문제점은 존재합니다.[3]

하지만, 평행이동을 해서 값을 구하는 것이 회전이동을 통해 구하는 것보다 수월함을 이해할 수 있습니다.

이렇게 일관된 풀이를 갖고 한번 문제의 풀이에 접근해보도록 합시다!

3) 문제점은, 저 t 값은 접점의 x값을 말하는 것으로 접점의 개수와 접선의 개수가 같음을 먼저 전제해야합니다.
그러나 함수 그래프 내에서 접선이 겹치는 경우도 분명 있을 수 있습니다. 그 판정은, 2014수능 30번에서의 공통접선 이야기라는 제목의 게시글을 참고하시길 바랍니다.

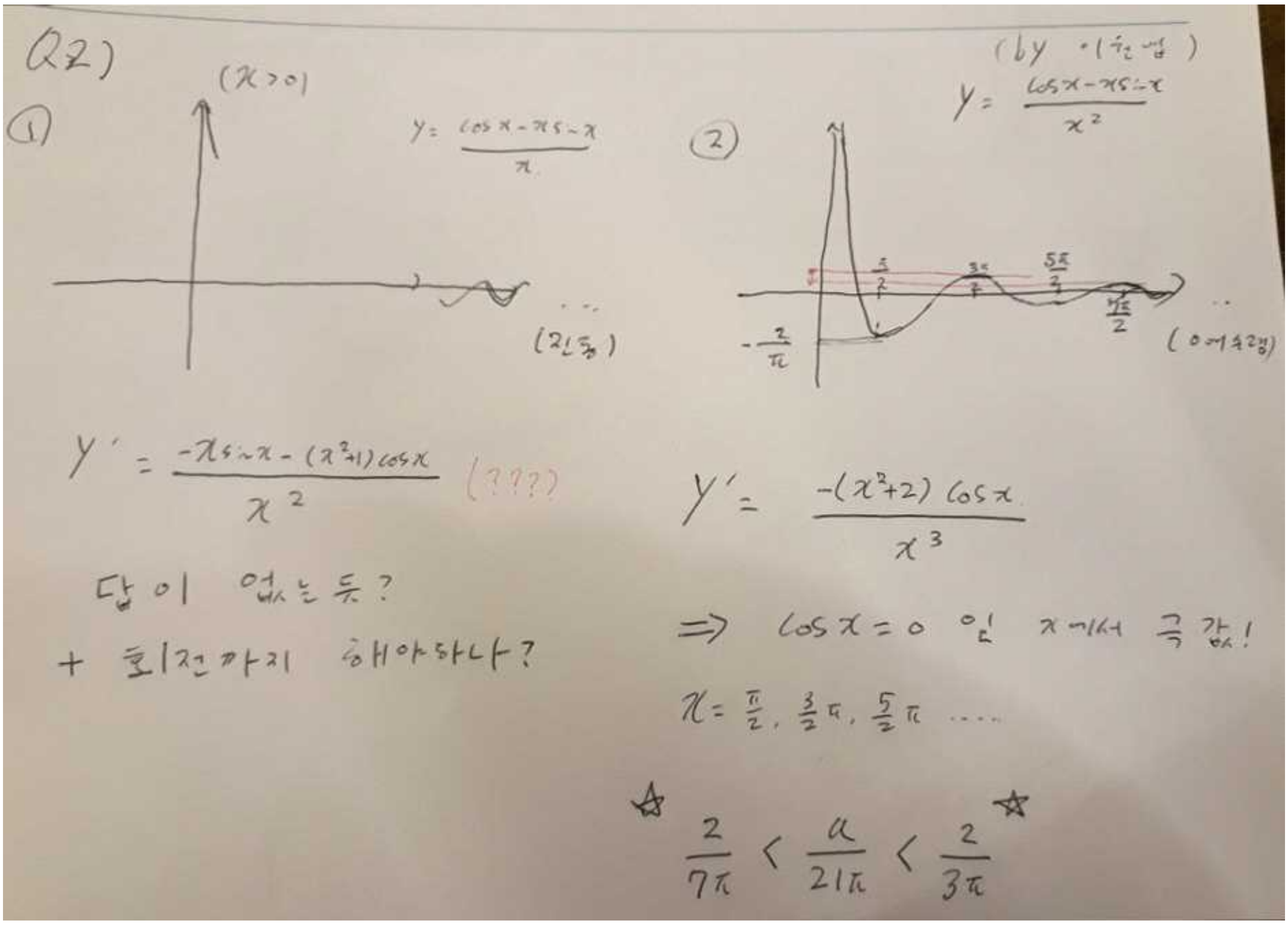
$x>0$일 때, x에 대한 방정식

$\dfrac{\cos x}{x}=\sin x+\dfrac{a}{21\pi}x$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

(2014년 EBS 수능완성 수록 문항)



이 또한, 교과서의 예제풀이를 적용하였을 때 장점으로,

y=m은 x축과 평행한 직선이기 때문에 미분계수가 항상 0이며, 극값에 접한다!

라는 사실을 여러분은 보실 수 있을 것입니다.[4)]

교과서의 예제풀이의 이유는 기본 개념에서 찾을 수 있으며, 이것이 기출풀이까지 연결됩니다!

이제, 기출문제까지 이러한 관점을 넓혀보도록 합시다!

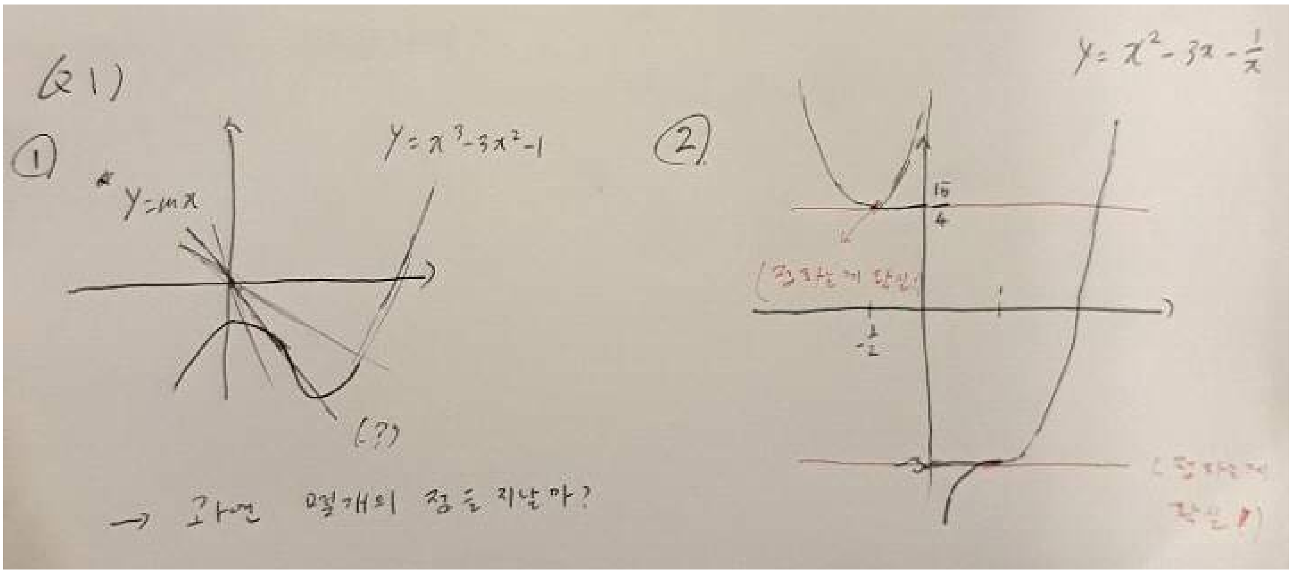
4) 이 문제를 감히 평가해보자면, 사실 교과서의 풀이대로 따르지 않으면 그래프를 그리지 못하도록 설계했습니다. 즉, 풀이의 의도가 참 다분한 문항이기는 합니다. 그러나 이때의 저는 이 문항을 풀면서 '역시 교과서!'라고 감탄했더랍니다.

실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty\ ,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은?

① -3　　② $-\frac{3}{4}$　　③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{15}{4}$　　⑤ 6

(출처 : 2012학년도 수능)



y=m은 x축과 평행한 직선이기 때문에 미분계수가 항상 0이며, 극값에 접합니다.
극값에 접하는 곳에서 실근이 변할 가능성이 있기 때문에, 개수 파악이 용이합니다.

왼쪽과 같이 풀기 위해서는, 회전하면서 풀어야합니다.
그러나 과연 어디에 접할지를 알 수 없지요. 어디에서 실근이 변할지 명확하지 않습니다.
y=m과 같은 직선과 달리, y=mx는 기울기가 계속 달라지기 때문입니다.

이 문제에서, 빨간색 펜으로 접하는 게 확실한 부분을 표시해두었습니다.
교과서 예제 관점의 풀이가 유용하다는 것을 느끼시길 바랍니다.

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오.

(출처 : 2014학년도 수능)

이 문제의 풀이는 생략합니다. 한번, 교과서의 풀이로 접근해보세요!
이 문제에서는 접점의 개수와 접선의 개수가 같습니다![5)]
즉, 교과서의 풀이로 접점의 x좌표 개수만 구할 수 있다면, 접선의 개수가 나오겠지요!

직접 한번 문제에 접근해보시길 바랍니다!

5) 원래는 이 또한 그래프를 그려가며 직접 보여야합니다. 접선의 개수와 접점의 개수가 같음을 보이는 칼럼은 제 게시글인 2014수능 30번에서의 공통접선 이야기를 참고하시길 바랍니다. 어느 정도의 직관이 필요한 사항이지만, 이것 또한 최대한 논리적으로 생각할 수 있으리라 생각합니다.

2. 빠른 풀이를 하고 싶니?

1) 자신이 무엇을 하고 있는지는 알고 풀이를 써내려가야 해요.

이 말은, 긴 풀이에 익숙하냐는 말과 똑같다고 생각하시면 됩니다.
적어도, 자신이 왜 이 풀이를 하고 있는지는 확실하게 하셔야 합니다. 모르시면 속도 말할 때 아니에요.
기출문제 30번 문항을 보면서 한번 이해해봅시다.

30. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
(나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
(다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점]

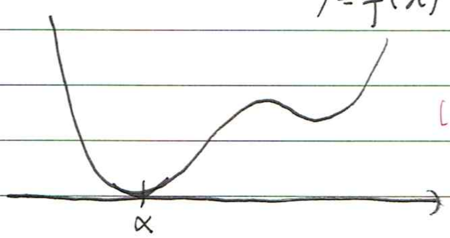
(출처 : 2019학년도 9월 평가원)

우리는 f(x)를 구할 수 밖에 없겠습니다. [6]

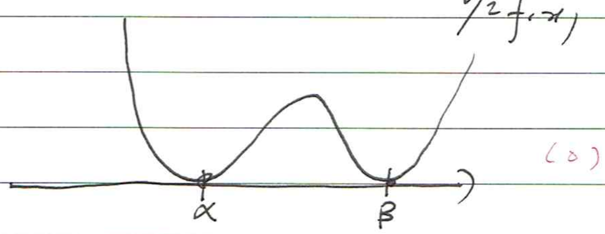
일단, h(x)의 조건을 만족하도록 하는 f(x)의 특징을 파악해보도록 합시다.

2019 수학 가형 9월 30번

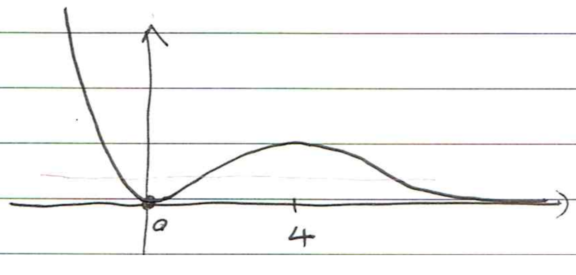
1)



2)



☆ $y = g(x) = 2x^4e^{-x}$ $\left(g'(x) = 2x^3e^{-x}(4-x)\right)$



6) 목적을 잊지 마시길 바랍니다. 이 문제의 목적은 f(x)의 식을 찾는 것임을 끝까지 잊지 마세요!

그래프를 그리면 위와 같습니다. 최솟값이 0이므로 극솟값은 반드시 0일겁니다.
도함수의 활용 - 방정식, 부등식에의 활용 단원에서는 f(x)=a인 x의 해의 개수를 많이 물어보곤 합니다.
그럴 때, 우리는 y=f(x)와 y=a 그래프의 교점의 개수를 해의 개수로 생각했습니다.

(가) 조건의 의미는, f(x)가 0이 되도록 하는 x값을 g(x) 함수가 4개 가져야한다는 뜻입니다.
즉, f(x)가 0이 되도록 하는 x값이 하나뿐이라면, g(x)= α인 x가 4개여야 하고,
f(x)가 0이 되도록 하는 x값이 α와 β라면, g(x)= α, g(x)= β인 **서로 다른 x값**이 4개여야 합니다.

g(x)= α인 x는 최대 3개이므로, 그림에서 1) 그래프와 같이, 극솟값이 0인 점이 하나면 안 됩니다.
2)의 그래프를 따라야, x의 값이 4개가 될 가능성이 있습니다.

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)^2$ 그리고, g(x)= α, g(x)= β의 해의 개수의 합은 4개.

여기까지 (가) 조건을 도함수의 활용 중, 방정식의 활용 단원 개념을 이용한 분석입니다.
이 풀이에는 이상이 없습니다.

① 최솟값이 0임을 반영한 사차함수 그래프 개형과 미분법을 통한 y=g(x)의 개형.
② 합성함수 개념을 이용하여 추론한 g(x)의 해의 개수 조건.
③ 방정식과 부등식에의 미분의 활용 단원을 고려한 사차함수 그래프 개형의 확정.

이 세 가지 모두 배운 개념을 이용한 것입니다.

배운 개념을 활용했으며, (가) 조건을 활용했으며, f(x)의 개형을 대략 유추했습니다.
우리는 최종적으로 f(x)의 식을 구해야하기 때문에 이 과정은 유의미하다고 생각할 수 있습니다.
분석을 함에 있어서 ① 목적에 맞는 개념 사용과, ② 논리의 흐름이 적절한지 항상 점검하세요.

(나) 조건을 해석해봅시다.
g(x)= α, g(x)= β의 해의 개수의 합은 4개이므로,
2개, 2개 / 1개, 3개 / 3개, 1개 의 세 가지 경우가 있습니다.

하지만, g(x)의 해가 2개인 경우는 g(x)=g(4)인 경우로, 한 가지 경우입니다.
$\alpha=\beta$인 경우는 모순이므로[7], 1개, 3개 혹은 3개, 1개일 겁니다.

7) 서로 다른 실근의 개수가 4개여야 합니다. $\alpha=\beta$이면 실근의 개수가 겹치게 되는 것을 이해하셔야합니다.

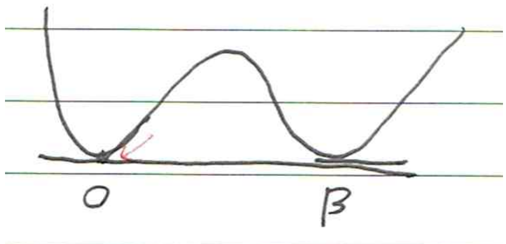
(1) 1개, 3개인 경우,   는 0일 수밖에 없습니다.
0 〈   〈 g(4)여야 3개인데, β보다 α가 작습니다.

(2) 3개, 1개인 경우 0 〈 α 〈 g(4)이며 β**〉g(4)**[8]입니다.

두 가지 모두 가능하므로, y=h(x)가 0에서 극소인지 생각합시다.

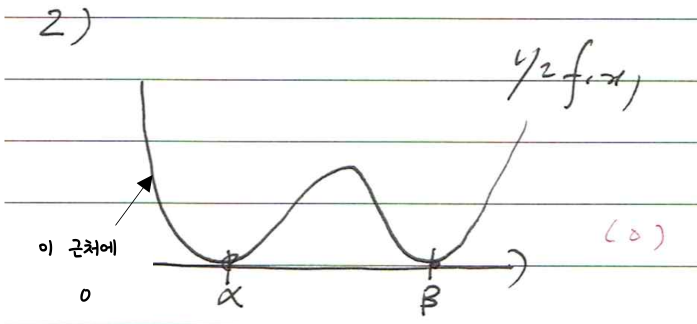
극솟값의 정의는, 그 주변의 함숫값보다 작은 함숫값을 말하며
미분 가능한 함수에 대해서, f'(x)=0이며 그 좌우로 도함수의 부호가 마이너스에서 플러스로 바뀔 때를 말합니다.

$'(x)=f'(g(x))g'(x)$이며,
g(x)는 0 근처에서 (+)→0→(+)로 바뀌며
g'(x)는 0 근처에서 (-)→0→(+)로 바뀝니다.



f'(g(x))는 (1)의 경우, g(x)가 0보다 큰 상태에서 0으로 가까이 갑니다.
그래서 기울기가 (+)→0→(+)로 바뀝니다.
즉, $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$의 부호는 (-)→0→(+)로 바뀌며
x=0에서 극소인 것을 확인할 수 있습니다.

(2)의 경우, α보다 0이 더 왼쪽에 위치하므로
f'(g(x))는 항상 음수입니다.
$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$의 부호는 (+)→0→(-)
즉, 극대입니다.
즉, $f(x)=\frac{1}{2}x\ (x-\beta)^2$입니다.

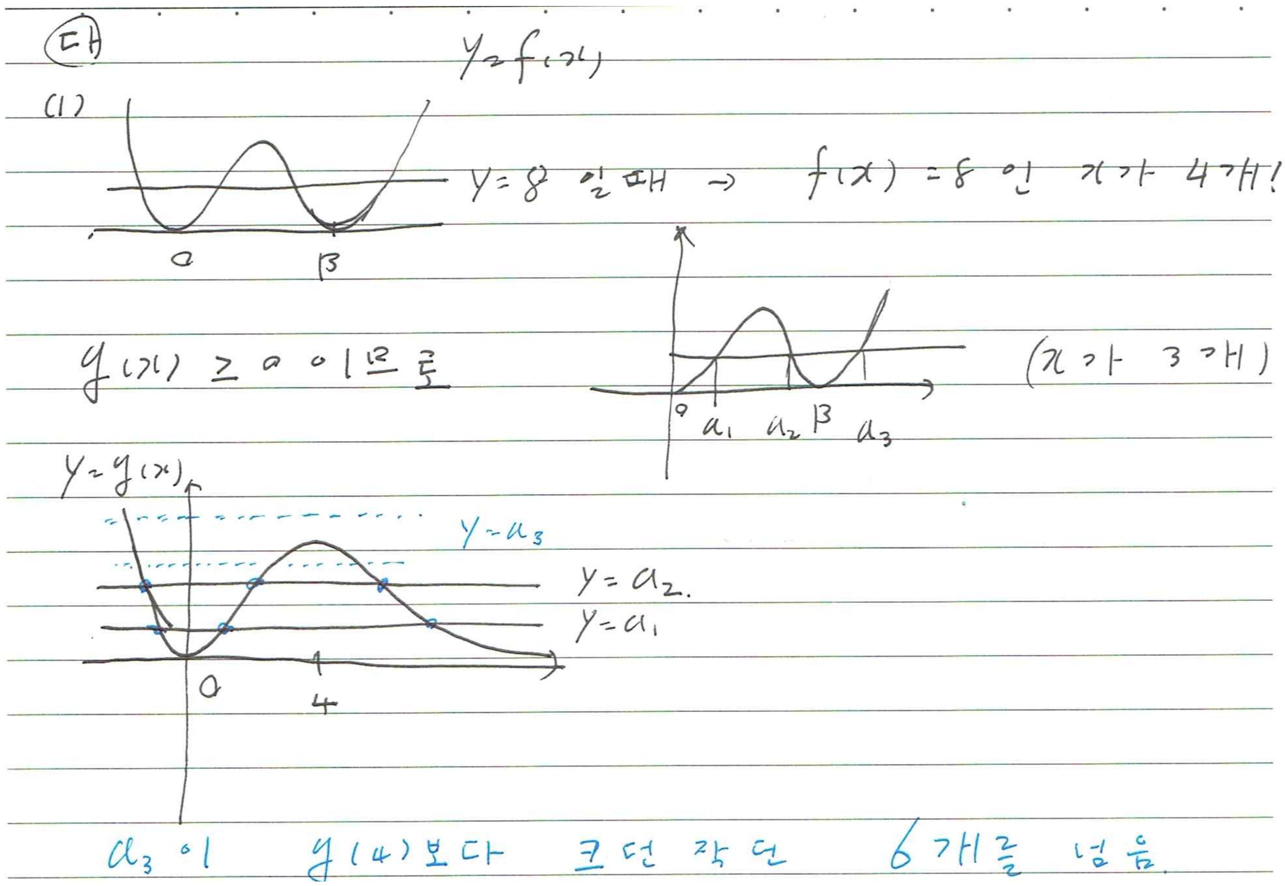


여기까지, 방정식에의 미분의 활용, 극대, 극소의 정의를 이용한 분석입니다.
① 근의 개수의 합이 4개임을 알고 경우를 나누어서 방정식 개념을 적용.
② 극솟값의 개념을 이용하여 f(x)에 대한 정보를 더 알아냄.[9]

또한, 극소라는 정보 외에는 (나) 조건에 별다를 게 없기 때문에, 이 분석은 적절합니다.

8) 이 조건 또한, 기억하셔야 할 조건 중 하나입니다. (1)의 경우인 **0 〈   〈 g(4)**을 기억하고 다음으로 진행합니다.
9) 이 문제의 목적은 f(x)의 식을 찾는 것입니다. 잊지 않으셔야 한다고 말씀 드렸습니다.

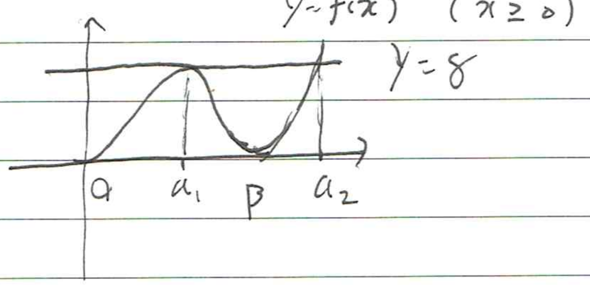
(다) 조건을 해석해봅시다.
g(x)는 0 이상이기 때문에, f(x)도 x가 0이상인 부분만 생각해주면 됩니다.
케이스는 3개로 나눕니다.
f(x)=8인 x가 3개일 때, 2개일 때, 1개일 때로 (1), (2), (3)을 나눕시다.



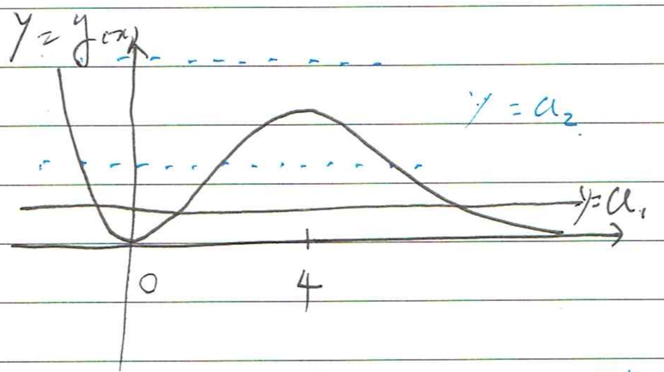
(1)의 경우, $, a_2, a_3$이 될 수 있는 g(x)값의 개수는 최소 7개, 최대 9개입니다.10)
그러므로 (다) 조건을 만족하지 않습니다.

10) **0 < < g(4)** 이므로, a_1, a_2 까지는 반드시 극댓값보다 작은 위치에 있습니다. 이후에도 이 부등식이 분석에 쓰입니다.

(2)



(x가 2개)

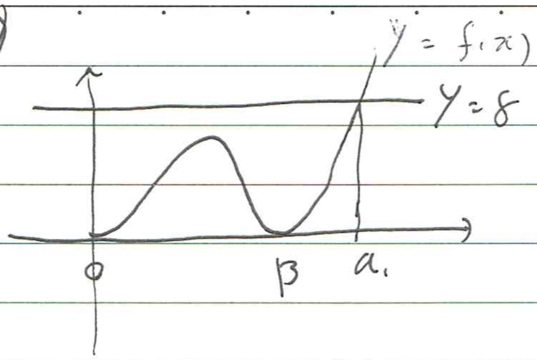


a_2가 $g(4)$보다 작으면 만족!

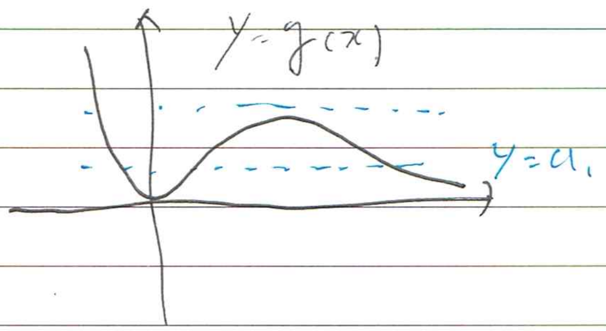
이 경우, y=g(x)에서 극댓값보다 가 작으면, 6개의 값이 생깁니다.

이 때, 실전에서는 극댓값보다 a_2가 작은지 직접 증명하거나, (3)의 케이스를 살펴봅니다.

(3)



x가 1개



실근 최대 3개.

(3)의 케이스는 실근 최대 3개로, (다)를 만족하지 않습니다.

이 사실을 종합해보면, y=8이 f(x)의 극댓값이어야만 성립하는 경우가 생김을 볼 수 있습니다. 물론,   가 g(4)보다 작음을 증명해야 하지만, 가능한 경우가 없기 때문에 확신을 갖고 계산해주면 됩니다.

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$에서 $f'(x)=x(x-\beta)(2x-\beta)$이므로, $a_1=\frac{\beta}{2}$

이제, 극댓값이 8이기 때문에, f(x)를 구할 수 있겠습니다!

대입하면, $f(\frac{\beta}{2})=\frac{1}{2}(\frac{\beta}{2})^4=8$ 즉 β=4입니다. $f'(5)=5(5-4)(10-4)=30$입니다.

여기까지는 방정식에의 미분의 활용과 합성함수의 개념을 이용한 분석입니다.
① y=f(x)와 y=8의 교점의 개수는 3개, 2개, 1개가 될 수 있습니다.
② $(x)=f(g(x))$에서, g(x)의 값을 f(x)에 대입하여 8이 되는 값의 개수를 물어봅니다.
③ 0과 β 사이에 있는 값에 대해서는 항상 y=g(x)가 3개의 근을 가집니다.
이를 통해서 (2)가 옳은 케이스임을 알아내면 문제가 풀리게 됩니다.

기출 분석을 할 때는 증명해야합니다. a_2가 g(4)보다 작음을 증명해보면 다음과 같습니다.

$(x)=\frac{1}{2}x\ (x-4)^2$**이며 a_2는 f(x)=8의 해입니다.**

$\frac{1}{2}x^2(x-4)^2=8$

$x^2(x-4)^2=16$**이므로, $(x^2-4x)=4$이거나 $(x^2-4x)=-4$입니다.**

전자의 경우, $x^2-4x-4=0$의 두 개의 해 중, 큰 것이 a_2입니다.

후자의 경우 $x^2-4x+4=0$은 해가 x=2 뿐이므로 모순입니다.

근의 공식에 따라 $a_2=2+\quad 8$ 이며, g(4)는 바로 대입해서 값을 구하면

$512e^{-4}$**입니다.**

이제, $2+2\sqrt{2}<512e^{-4}$이 성립하면 증명 완료입니다.

$$(1+\sqrt{2})e^4<256$$
$$e^4<256(\sqrt{2}-1)$$
$$(2.71...)^4<256(0.414...)$$
$$(2.71...)^4<3^4<256\times(0.4)<256(0.414...)$$

이므로, 증명 완료입니다.

여러분이 긴 풀이를 할 때, 흔히 저지르는 실수는
1. 풀이를 써내려가다 갑자기 논리를 잃는 것.
2. 풀이에 쓰인 개념이 목적에 맞는지 아닌지 모르는 것.
이 두 가지 현상이 실제로 일어난다면, 애초에 이 부분부터 연습하셔야합니다.

속도가 중요한 것이 아닙니다. 풀이 한줄 다음 한줄의 이유를 이해하지 못하시면 안됩니다.

2) 교과서 풀이를 기억한다면, 공식의 암기보다는 생략을 하세요.

이제 여러분은 교과서의 예제풀이가 개념을 담고 있다는 것을 압니다.
그리고 그것이 기출문제의 풀이에도 연결이 된다는 사실도 압니다.
긴 풀이에 있어서도 구하고자 하는 것을 계속 상기하는 것을 압니다.
개념의 적용이 구하고자 하는 목적에 맞는지를 파악하고, 논리에도 맞는지 압니다.

이 모든 사항이 완벽하게 되었을 때, 우리는 기출 분석을 잘 했다라고 말합니다.
적어도 여러분이 분석한 그 문항에 대해서는 말입니다.

기본적으로, 제가 공부하는 방식은 교과서에 입각한 모범답안을 직접 써내려가는 것이었습니다.
저는 제본한 기출문제에 대한 해설이 없었습니다. 제가 해설을 최대한 논리적으로 썼습니다.
저는 직접 해설을 논리적으로 써내려갈 수 있는 문항에 대해서는 완벽히 안다고 판단했습니다.

예전의 저는 교과서에 나온 개념만으로 모든 문제를 풀으려 했습니다.
거의 병적으로 집착하는 수준이었지요.

그러나, 그렇게 하다보니 시간이 많이 소모가 되고, 이렇게 하다간 시간부족에 계속 시달릴 것이라 생각했습니다.

그래서, 제가 사용한 방법은 바로 [생략]입니다.[11]

사실 간단한 것입니다.

우리는 생략을 아주 예전 중학교 1학년때부터 쓰기 시작했습니다.
바로 등식의 성질과 이항의 개념에서 말입니다!

(1) 등식의 양변에 같은 수를 더하여도 등식은 성립한다.

$=b$이면, $a+c=b+c$

(2) 등식의 양변에 같은 수를 빼어도 등식은 성립한다.

$a=b$이면, $a-c=b-c$

(3) 등식의 양변에 같은 수를 곱하여도 등식은 성립한다.

$a=b$이면, $ac=bc$

(4) 등식의 양변을 0이 아닌 같은 수로 나누어도 등식은 성립한다.

$a=b$이면, $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$ (단, $\quad 0$)

이제, 우리는 이항을 배워 일차방정식을 해결하게 되는데, 사실 이것은 등식의 성질과 같아요.

11) 사실, 가능하다면 연습할 때는 계속 기본 풀이를 하시는 게 바람직합니다. 반복연습의 결과로 익숙해진다고 생각하세요.

$x+b=c$ (0)라는 일차방정식을 풀기 위해서, 먼저 b를 우변으로 이항해줍니다.
$ax+b-b=c-b$ 에 의해 $ax=c-b$가 되는데, 이항이라는 과정은 앞 식을 생략한 것입니다!
마찬가지로 $x=\frac{c-b}{a}$ 이 되는 것 또한, 0이 아닌 같은 수로 나누어주었기 때문입니다.

즉, 이항의 과정은 같은 수를 더하고 빼고 곱하고 나누는 과정을 생략하여 얻어진 것입니다!
이렇듯, 개념의 확장 단계에서 생략은 어쩌면 당연한 것일 수 있겠습니다.

다음 예제를 보겠습니다.

$$\lim \frac{x^2-2x+3}{x^2+4x+5}, \ \lim_{0} \frac{e^{2x}-1}{\tan x \sin 2x}, \ \lim_{\theta\ \ 0} \frac{6\sin\theta}{\sin 3\theta+\tan 2\theta}, \ \lim_{\theta\ \ 0} \frac{4\theta}{\theta+\sin 3\theta}$$

아마 여러분께서는 이 문제 풀이의 방법을 아실겁니다.
첫 번째 문항은, 분모의 최고차항으로 나눠주는 것으로 접근합니다.
그렇게 해서 분모와 분자 모두 수렴하는 함수로, 특히 분모는 0이 아닌 수로 수렴하게 합니다.

실제 문제집에서는 차수가 같으면 계수로 비교한다는 전략이 소개되어있는데,
우리가 생각해야할 것은, 어떠한 문제풀이법의 암기가 아닌, 기본 풀이법의 생략입니다.

$$\lim_{x}\frac{x^2-2x+3}{3x^2+4x+5}=\lim_{x}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim_{x}(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}{\lim_{x}(3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})}=\frac{1}{3}$$

에서, 숙련이 되셨다면, $\lim_{x}\frac{a}{x}=0, \lim_{x}\frac{b}{x^n}=0$임을 아시고, 2번째 식 그려내시는 과정에서 생략하시면 굳이 계수 비교라는 방법을 사용 안하셔도 된다는 말씀입니다.

지수함수와 로그함수의 극한에서는 $\lim_{x\ \ 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 과, $\lim_{x\ \ 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ 의 개념을 이용합니다.
이러한 문제에서도 $\lim_{x\ \ 0}\frac{e^{ax}-1}{bx}=\frac{a}{b}$, $\lim_{x\ \ 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a$ 등으로 쉽게 외우실 수 있으나,
원래의 식을 사용하는 연습을 하는 편이 매우 유용합니다.

$$\lim_{x\ \ 0}\frac{e^{2x^2}-1}{\tan x\sin 2x}=\lim_{x\ \ 0}\frac{\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}}{\frac{\tan x}{x}\times\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{\lim_{x\ \ 0}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}}{\lim_{x\ \ 0}\frac{\tan x}{x}\times\lim_{x\ \ 0}\frac{\sin 2x}{2x}}=1$$

이렇게 풀 때, 2번째 식으로 이행되는 과정에서, 바로 생략해주시면 됩니다.

마찬가지로 삼각함수의 극한 문제에서도, $\sin$ 를 θ 0일 때, θ로 취급하셔도 된다는 말을 많이 들으셨을 것입니다.

하지만, $\lim_{0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$을 이용하는 것이 기본이며, 우리는 이제 이 문제를 접근할때도 머릿속으로 생략하는 것을 원칙으로 합니다.

$$\lim_{\theta\ 0}\frac{6\sin\theta}{\sin 3\theta+\tan 2\theta}=\lim_{\theta\ 0}\frac{\frac{6\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin 3\theta}{\theta}+\frac{\tan 2\theta}{\theta}}=\frac{\lim_{\theta\ 0}\frac{6\sin\theta}{\theta}}{\lim_{\theta\ 0}(3\frac{\sin 3\theta}{3\theta})+\lim_{\theta\ 0}(2\frac{\sin 2\theta}{2\theta\cos 2\theta})}=\frac{6}{3+2}=\frac{6}{5}$$

두 번째 식을 그려내는 과정에서 3번째 이후부터는 계산 과정에서 많이 하셨다면, 생략하셔도 되는 내용입니다.
이런 방식으로 우리는 계산과정의 생략을 통해 계산을 빠르게 할 수 있게 됩니다.

이 방식이 기본인 이유는 명백합니다.
기본 개념의 연습을 등한시하는 것 보다, 알고 생각하고 생략하는 편이 낫다는 것이지요.

생략이 잘 안되는 경우가 있을 수 있습니다! 바로 다음과 같은 경우겠지요?

Q. $\lim_{0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan\ \ -\sin x}$ 의 극한값은?
(출처 : 2010학년도 6월 평가원 27번)
우리가 기본적인 공식을 모르고 접근한다면, 이러한 문제에서 공식을 때려 박다 망할 수도 있는 것입니다.

이 문항에 대해서는, 조금 더 생각을 해봐야합니다!
우리가 배웠던 것은 $\lim_{x\ 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$이었습니다.

① $\lim_{x\ 0}\frac{e^{\Delta}-1}{\Delta}=1$ 꼴을 만들어야 하는데, -1이 보이지 않네? 어떻게 해야할까?

② $e^{1-\tan x}$로 분자를 묶어볼까? $\lim_{x\ 0}\frac{(e^{\tan x-\sin x}-1)e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$

로 푸시면 바로 풀리는 것입니다!

왜 생략까지 해가면서 기본 개념을 써야할까요?
아이디어와 계산의 정확성을 얻어야하기 때문입니다.

좀 더 요약하자면, 헛짓을 안하기 위해서입니다![12]

수학 문제를 풀 때 우리는 여러 가지 시도를 하곤 합니다만, 그것은 결국 시간을 소모합니다.
그 때, 정확하게 개념에 입각해 풀 수 있는 학생은 여타의 다른 짓을 안합니다.

저 문제에서도 sin x와 tan x를 그냥 x로 보고 풀까? 이런 고민을 안할 수 있겠지요.
또한 $\lim_{0} \frac{e^{\Delta}-1}{} = 1$ 의 형태를 더욱 잘 기억하여, -1을 만드는 방법으로 유도할 수 있습니다.

기본 개념이 필요한 것은 너무나 당연하며, 그 이유는 다음 두 가지 입니다.

1. 고민하는 시간을 줄이고 확실한 아이디어를 가지기 위해
2. 우리가 가진 도구를 더욱 확실하게 쓰기 위해

즉, 기본적인 개념은 머릿속에 잠깐 스쳐지나간다 한들 쓰셔야한다는 것입니다!
그것이 개념의 내용에 대한 이해와 계산 능력을 유지시킬 수 있기 때문입니다.[13]

다음 문제도 한번 보시죠.
Q. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0) = f'(0)$
(다) $x \quad -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \quad f'(x)$이다.

(출처 : 2015학년도 수능 수학 A형 21번)

생략에 대해 말하기 전에 이 문제에 대한 올바른 접근법을 먼저 말씀드리겠습니다.
(가)조건, 그리고 삼차함수 조건에서 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 입니다.
처음 접근할 때, (다)를 보시면 반드시 $h(x) = f(x) - f'(x) \quad 0$을 만들어주셔야 합니다.
(이 사항은 이후 챕터 3의 개념과 기출의 연결에서 설명 드리겠습니다.)

$h(x) = x^3 + (a-3)x^2 + (b-2a)x + c - b$ 이며, 그 때, (나)에서도 $f(0) - f'(0) = 0$이 됩니다.
$b = c$이며, $h(x) = x^3 + (a-3)x^2 + (b-2a)x$입니다.

---

12) 기본 개념이 중요한 가장 큰 이유입니다. 도구가 많으면 어떻게 분석하고 무엇을 시도해야할지 그 순서가 명확하지 않게 됩니다. 풀이의 필연성을 포함한 기출분석이 되어야 여러분의 수학실력이 발전할 수 있으며, 이는 기본개념에서 발생합니다.
13) 저는, 기본적으로 여러 가지 다양한 풀이를 접할 기회가 많이 없었습니다. 그랬기에 오히려 기본개념에 집중할 수 있었고, 어느 정도의 성과를 낼 수 있었습니다. 실제로 멘토링과 과외를 많이 해본 결과로는, 학생들의 문제점 중 많은 부분이 논리적으로 어떻게 접근해야할지 모르며, 기본풀이에 대한 숙련도가 낮다는 문제가 있었습니다.

또한, (다) 조건에 의하여 (x)는 $x=0$ 주변에서 음수가 되면 안됩니다.
$h(x)=x(x\ +(a-3)x+(b-2a))$에서, x가 0 근처를 지날 때 부호가 바뀝니다.

이 때, x^2나, $(a-3)x$는 0에 아주 가깝습니다.
즉, $x=0$ 근처에서 $(b-2a)$가 양수이면 음수에서 양수로, $(b-2a)$가 음수이면 양수에서 음수로 부호가 바뀔 수 밖에 없으며, 모든 경우에서 (다) 조건에 맞지 않습니다.

즉, $(b-2a)=0$이어야 하며, 이 때 $h(x)=x^2(x+(a-3))$입니다.
$x+(a-3)$이 0 근처에서 부호가 양수일 때, (다) 조건을 만족하므로 $a>3$입니다.
$x\quad -1$ 구간에서 모두 0보다 커야하기 때문에, $x=-1$을 대입해도 0이상이어야 합니다.
$h(-1)=(a-4)\quad 0$ 이므로 a는 4 이상이며,
$f(2)=8+4a+2b+c=8+4a+4a+2a=10a+8$ 이므로, 최솟값은 48입니다.

아마, 여러분께서는 이 정리를 기억하고 계실 것입니다.
함수 $y=f(x)$의 함수식이 $(x-a)$를 인수로 가지면 $x=a$에서 $(a,0)$을 뚫고 지나간다.
$(x-a)^2$을 인수로 가지면 $x=a$에서 x축에 접하면서 부호가 변하지 않는다.
$(x-a)^3$을 인수로 가지면 $x=a$에서 x축에 접하면서 뚫는다..

이런 것들을 기억하고 계실지 모르겠습니다만, 이 또한 계산 경험을 통한 생략입니다.
아마 이런 것들을 여러분께서는 따름정리[14)]라는 것으로 배우고 계셨을 것입니다.

그러나, 이 사실들을 여러분께서 외워서 쓰다보면 오히려 기본개념에 대한 감각이 무뎌집니다.
또한, 기본개념의 본질적인 의미를 묻는 문항에서 처음부터 잘못된 접근을 할 수 있지요.
그러므로, 여러분께서는 따름정리라는 어떠한 쉬운 공식을 외우지 마시고, 생략하셔야 합니다.

즉, 정의와 정리, 그리고 그 정리의 활용에 대한 내용 그대로를 문제에 적용하시는 것입니다.
필요하다면, 그 내용을 당연한 것으로 받아들일 때, 생략하시면 되는 것입니다.

따름정리에 관한 것으로는 $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{}}|a(x-\alpha)(x-\beta)|dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$이 유명한 것 같습니다.
이건 치환적분을 하면 간편해지겠네요!
$\int_{\alpha}^{\beta}|a(x-\alpha)(x-\beta)|dx=\int_{0}^{\beta-\alpha}|at(t-(\beta-\alpha))|dt$로 만들면 충분히 유도가능한 것입니다.

그렇다면, 우리는 이 공식을 그저 외우는 것이 답일까요? 저는 아니라고 봅니다.

14) 그러나 저는 따름정리에 관한 것을 따로 배우지는 않았습니다. 그냥 공부로써 당연해진 것을 생략하는 방식으로 했어요.

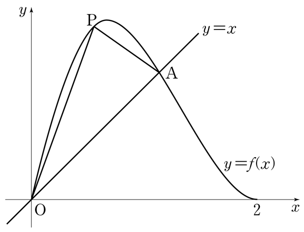
만약, 이러한 공식을 쓰는 문제가 정말 많이 나온다면 모르겠지만 그렇지도 않을 것이며, 실제로 그렇다면 우리는 치환적분법 과정을 생략해서 만들면 되는 것입니다!
그것이 좀 더 치환적분법의 계산에 익숙해질 수 있는 방법이겠지요.

이와 마찬가지로, 여러 가지 공식들이 실제로 존재합니다만, 그것을 충분히 연습해보지 않고 정리로만 외우는 것은 매우 위험한 방식입니다.

한 문제만 더 볼까요?

Q. 닫힌구간 $0,\ 2]$에서 정의된 함수 $f(x)=ax(x-2)$ $\left(a>\dfrac{1}{2}\right)$에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자.



점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직일 때,

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\dfrac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은?

(출처 : 2013학년도 9월 평가원)
이럴 때, 아마 학생들은 기울기가 1인 접선을 찾으려고 노력하실 것입니다.
아마도, 밑변 OA를 포함하는 **직선과 평행하면서 접하는 지점을** P**로** 찾으실 것입니다.

그 P의 x좌표가 $\dfrac{1}{2}$인 것을 이용해서 아마 a값을 구하시겠지요?

하지만, 밑변과 평행한 접선의 접점이 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점이라는 사실은 우리가 이전에 배운 적이 없습니다! 이럴 때, 우리는 어떻게 해야할까요?

문제의 기본목적은 OA 선분과 P가 가장 멀리 있을 때 입니다!

(1) OA에서 P가 제일 멀리 있으면 됩니다. 즉, $\mathrm{P}\,(t, at(t-2)^2)$와 직선 $y=x$와의 거리를 점과 직선 사이의 거리로 구한 후, t에 대하여 미분합니다. 함수의 그래프 개념과 최대 최소의 정리에 의하여 극값과 양 끝값이 최댓값이 될 수 있는 후보이며, P가 O 혹은 A에 있을 때는 거리가 0이기 때문에, 극값이 유일한 최댓값이 될 수 있는 후보라는 사실을 알 수 있습니다.

$t=\dfrac{1}{2}$를 대입하여 0이 나오는 a값을 찾으면 됩니다.15)

15) 이 풀이는 굳이 따름정리를 쓰지 않는, 목적에 충실한 풀이입니다. 개인적으로는 이 풀이를 저는 선호합니다.

(2) 이제, 밑변 OA를 포함하는 **직선과 평행하면서 접하는 지점을 찾는** 방법을 찾아봅시다.

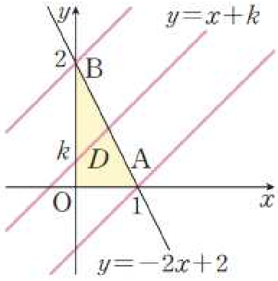
두 실수 x, y가 연립부등식 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq -2x+2$를 만족할 때 $y-x$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여 보자.

주어진 연립부등식의 영역을 D라고 하면 D는 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다. 이때 경계선을 포함한다.

$y-x=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$y=x+k$$

이므로 이것은 기울기가 1이고, y절편이 k인 직선이다.



직선 $y=x+k$가 영역 D를 지나도록 평행이동하면서 움직여 보면 y절편 k의 값은 직선 $y=x+k$가 점 $\mathrm{B}(0, 2)$를 지날 때 최대가 되고, 점 $\mathrm{A}(1, 0)$을 지날 때 최소가 된다. 따라서 k의 최댓값은 $2-0=2$, k의 최솟값은 $0-1=-1$이므로 $y-x$의 최댓값은 2, 최솟값은 -1이다.

(출처 : 고등학교 수학 1 교과서)

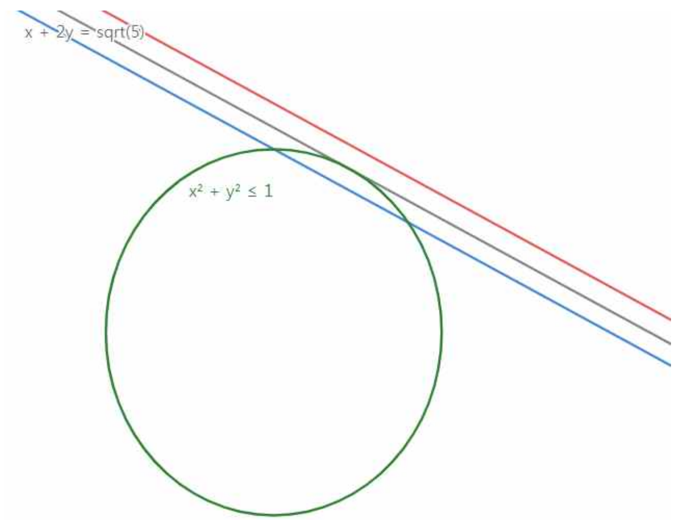
이렇게 평행이동 하면서 K의 최댓값과 최솟값을 찾는 것을 부등식의 영역에서 배웠습니다.

두 실수 x, y가 부등식 $x^2+y^2 \leq 1$을 만족할 때, $x+2y$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

(출처 : 고등학교 수학 1 교과서)

이 예제에서의 답 상황은 원에 접할 때 입니다. 그 이유는 명확합니다.

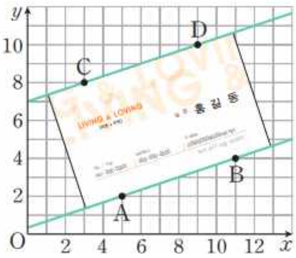
똑같은 전략으로, $y=-x+k$ 로 두고, y 절편을 계속 증가시켜 최댓값을 구할 때, 접할 때에서 조금만 더 위로 가면 부등식의 영역을 넘어버리고, 아래로 가면 최대가 아니기 때문입니다.



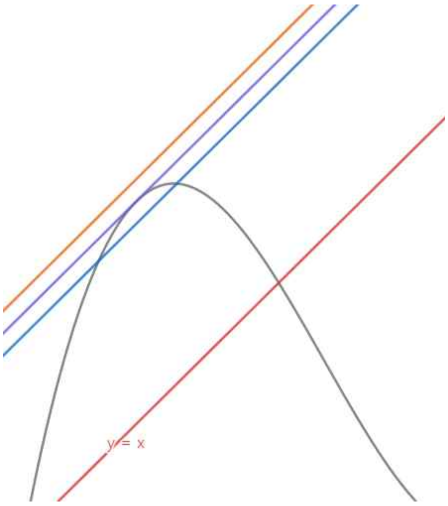
이렇게 교과서에서는, 어떠한 영역 안의 (x,y)값에 대하여 $x+by$ 꼴의 값의 최대를 직선의 평행이동을 이용하여 구하는데, 원에서는 그 상황이 접할 때였습니다.

또한, 평행한 직선은 한 직선의 임의의 점과 다른 직선의 거리가 항상 일정한 것을 말합니다. 거리차이가 일정해야하기 때문에, 기울기가 같고 y절편이 다른 두 직선을 평행하다 하지요.

오른쪽 그림은 좌표평면 위에 직사각형 모양의 명함을 올려놓고, 마주 보는 변을 따라 평행한 두 직선 AB, CD를 그린 것이다. 두 직선 AB, CD의 기울기를 각각 구하고, 그 기울기를 비교하여 보자.



(출처 : 고등학교 수학 1 교과서 생각열기)
이것으로 유추해보면 평행한 직선에서 두 직선 중 하나의 직선 위 한 점을 잡으면,
다른 한 직선까지의 거리가 항상 일정하다는 것을 다시 알 수 있습니다.



이제, 이 문제의 상황에서, $y=x$에 평행한 직선을 $y=x$ 위로 움직여보면, 위쪽으로 갈 수록 $y=x$와의 거리가 커짐을 알 수 있습니다. 접할 때의 상황을 기준으로 조금만 위로 가면 그래프와 만나지 않습니다. 그러므로, 접할 때의 직선이 $y=x$와의 거리가 가장 멀 때입니다.

외우지 않고 접근하셨다면, 이 방식대로 접근하셨을 것이라 생각합니다.
이 방법을 요약해볼까요?

(1) 부등식의 영역에서 직선을 평행이동 하면서 최댓값, 최솟값을 구했어. 원에서는 그게 바로 접선이었네? 접선을 기준으로 움직이면, 최대최소가 안되거나 그래프 영역을 벗어나게 되네!
(2) 평행은, 두 직선이 항상 거리를 유지하며 만나지 않는 상태야.
(3) 그러므로, 직선을 최대한 그래프와 만나게 평행이동해보면, 두 직선이 가장 멀게 위치할 때를 찾을 수 있는데, 부등식의 영역에서는 최대 최소의 상황이 접선이었어. 접선일 때를 보자.[16]

똑같이 접선을 기준으로 움직이면, 최대최소가 안되거나 그래프 영역을 벗어나게 되네! [17)]

이제 문제를 풀 때, 접선이 최대 최소의 상황과 관련이 있다는 생각을 우리는 할 수 있습니다. 이 상황을 반복적으로 접한다면, 우리는 접선에서의 상황을 최대최소와 관련 있을 확률이 높다고 가정한 후 아이디어를 적용할 수 있습니다.

물론, (1)의 방법을 이용하는 것이 제일 엄밀하겠습니다만, 여러분이 이런 방식으로 따름정리를 굳이 써야하며, 속도를 늘릴 필요가 있다면, 최대한 논리적으로 생각하고 해석한 후 생략하세요. 여러분이 쓰는 공식은, 그 이유를 명확히 알고 써야 정확하게 쓸 수 있는 것입니다.

공식의 암기보다는, 이해 후 생략하세요.
원래의 개념의 적용을 잊지 않으면서 빠르게 풀 수 있으실 것입니다.

16) 원에서 접선이었으니, 다른 그래프에서도 접선일거야.. 라고 추측한 것으로, 실제로는 논리적으로 완벽하게 설명되지 않습니다. ‘예전에 비슷한 걸 보았으니 지금도 그렇겠지.’ 수준의 추론입니다.
17) 그나마 이러한 사항을 그래프 상에서 볼 수 있다면, 좀 더 합리적인 추론으로 생각할 수 있습니다.

3. 올바른 기출의 학습법

1) 개념과 기출의 연결

문제를 다시 보시죠!

Q. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 (x)에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \quad -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \quad f'(x)$이다.

(출처 : 2015학년도 수능 수학 A형 21번)

이 문제의 첫 계산에서 $h(x)=f(x)-f'(x) \quad 0$으로 만들어야하는 이유를 설명드리겠습니다.
교과서에는 다음과 같이 서술하고 있습니다.

부등식을 어떻게 증명할까?

어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하는 것을 증명할 때는 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다.

또한, 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하는 것을 증명할 때는

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

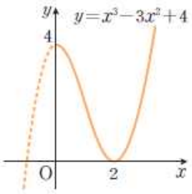
라 하고, 주어진 구간에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다.

예제 2

$x\geq 0$일 때, 부등식 $x^3\geq 3x^2-4$가 성립함을 보여라.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+4$라고 하면
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0 (극소)	↗



따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때, 극소이고 최소이다. 즉, 최솟값이 $f(2)=0$이므로 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^3-3x^2+4\geq 0$$

이다. 따라서 $x\geq 0$일 때, 부등식 $x^3\geq 3x^2-4$가 성립한다.

답 풀이 참조

(출처 : 고등학교 미적분 1 교과서)

그 이유는, 하나의 함수로 만들어서 함수의 그래프를 그릴 수 있게 하는 것입니다.
이 때, 0보다 크다는 것을 증명하기 위해선, x축을 기준으로 위에 있기만 하면 되는거에요!

이 방법에는 장점이 있습니다. 두 개의 그래프를 그리고 교점을 찾지 않아도 됩니다!
하나의 그래프와 x축의 관계만으로 충분히 부등식에 접근할 수 있다는 것이에요.

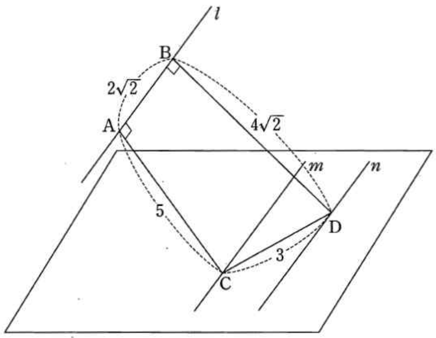
또한, x축과의 교점을 구하는 것은, 방정식 $(x)=0$을 풀면 되는 것입니다.
즉, 수학 1의 고차방정식 개념, 부등식의 영역과 더불어 미분법을 이용해서 접근할 수 있어요.

앞에서도 언급을 했습니다만, 기본적으로 기출풀이는 예제풀이를 기반으로 합니다!
또한, 기출풀이는 필연적인 풀이가 존재하는 것 같습니다.

예를 들어, 다음과 같은 문제를 한번 봅시다!

Q. 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다.
직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음조건을 만족시킨다.

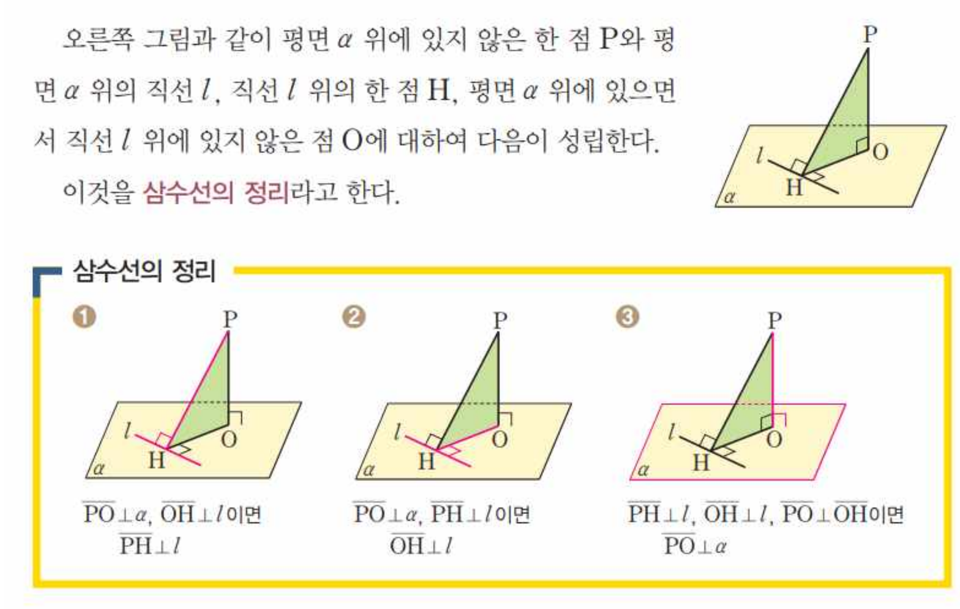
(가) $\mathrm{AB}=2\quad 2$, $\mathrm{CD}=3$
(나) $\overline{\mathrm{AC}}\quad l$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$
(다) $\overline{\mathrm{BD}}\quad l$, $\overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{2}$



두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)
(출처 : 2011학년도 수능 수학 가형 25번)

이면각의 정의에 의해, 두 평면이 이루는 교선은 직선 CD입니다.
이제, CD에 대해 삼수선의 정리를 이용해서 이면각을 구하면 되겠지만 아무런 조건이 없습니다..

또한, A와 B에 바로 평면에 수선의 발을 내려도 아무런 효과가 없습니다.
$\overline{\mathrm{AC}}\quad l$, $\overline{\mathrm{BD}}\quad l$ 이므로, m, n을 포함하는 평면과는 관련이 없는 조건입니다!
삼수선의 정리에서 평면에 수선의 발을 내려야하는데, l을 포함하는 평면이 안보이기도 하구요.


오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H, 평면 α 위에 있으면서 직선 l 위에 있지 않은 점 O에 대하여 다음이 성립한다.

이것을 삼수선의 정리라고 한다.

삼수선의 정리

① $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\overline{PH}\perp l$

② $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\overline{OH}\perp l$

③ $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\overline{PO}\perp\alpha$

(출처 : 고등학교 기하와 벡터 교과서)

이 때, 우리가 먼저 보아야할 것은, 서로 평행한 세 직선 , m, n이라는 조건입니다!

<u>**평행하므로, 엇각과 동위각이 같습니다!**</u>

AC m 입니다. l, m은 <u>평행하기 때문</u>입니다.

BD n 입니다. l, n은 <u>평행하기 때문</u>입니다.

이제, A와 B에서 m, n을 포함하는 평면에 수선의 발을 내릴 수 있습니다.

그것을 A'와 B'라 하면, $\mathrm{AA'}$와 $\mathrm{BB'}$는 각각 m과 n에 수직이므로,

m에 수직인 두 직선 AC와 $\mathrm{AA'}$는 A라는 점에서 만나므로, **만나는 두 직선은 평면**을 이루며 그 평면위에 있는 **직선** $\mathrm{A'C}$**는** m**에 수직**이며, 또한 n에도 수직입니다. 평행하니까요.

n에 수직인 두 직선 BD와 $\mathrm{BB'}$는 B라는 점에서 만나므로, **만나는 두 직선은 평면**을 이루며 그 평면위에 있는 **직선** $\mathrm{B'D}$**는** n**에 수직**이며, 또한 m에도 수직입니다. 평행하니까요.

m, n에 수직이라는 사실 없이는, 삼수선의 정리를 쓰기가 너무나도 애매합니다.

l은 구하는 평면과 관계도 없기도 하구요.

그러므로, 먼저 해야 할 것은 조건을 잘 보고 평행선과 엇각을 잘 파악하는 것입니다.

m, n에 대한 정보는 구하는 것에도 맞고, 삼수선의 정리도 쓸 수 있겠지요!

문제에는 필연적인 풀이법이 존재합니다.

그 필연적인 풀이의 아이디어 또한 기본적인 개념에서 나올 확률이 높아요.

기출분석을 올바로 한다는 것은, 이러한 필연성을 계속 확인하는 것에서 시작합니다!

다음 문제를 한번 볼까요? 저 문제의 처음 접근은 어떻게 해야할까요?

Q. **30.** 최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고,

$\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.
>
> (나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

(단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

(출처 : 2019학년도 수능 수학 가형 30번)

이 문제의 시작은 합성함수의 미분을 통해, $'(x)=\dfrac{-f'(x)\cos(f(x))}{(2+\sin(f(x))}$ 인 것부터 시작합니다.

이 문제를 해석하기 위해, **극값 α_n이 어디에 생기는지 해석**해야 합니다. 그러므로 **미분**합니다.

극값을 가질 때는, $f'(x)=0$ 혹은 $\cos(f(x))=0$이면서 좌우의 부호가 바뀔 때입니다.

$\cos(f(x))=0$이 성립할 때를 조사해보면,

$f(x)=-\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},\cdots$일 때 극값이 될 수 있을 것 같습니다.

$\alpha_1=0$ 이므로, $f'(0)=0$입니다.

삼차식을 미분하면 이차식이며, **이차방정식의 근의 개수는 2개**입니다.

(중근일 경우, 극값이 될 수 없습니다. 허근인 경우도 마찬가지입니다.)

즉 α_1 다음으로 $f'(x)=0$을 성립하게 하는 α_n은 **하나입니다.**

즉, 이 문제는 도함수의 값이 0이 되는 α_n값을 하나 더 찾는 것이 목적이겠네요!

나머지 극값은 $\cos(f(x))=0$일 때를 조사하면 깔끔하겠습니다. 풀이는 생략하겠습니다.

필연적인 풀이의 아이디어 또한 기본적인 개념에서 나옵니다.

이 말의 의미를 한층 더 이해하셨으리라 믿습니다.

실제로, 저는 제가 직접 이렇게 해설 쓰면서 공부했습니다.

필연적이지 않으면 해설도 쓸 수 없어요. 개념과 문제의 연결은 필수입니다.

Q. **20.** 점 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서 곡선 $y=\sin x\ (x>0)$에 접선을 그어 접점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$

ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(출처 : 2019학년도 수능 수학 가형 20번)
이 문제에서는 개념의 나열만 해드리겠습니다. 한번 보시고 분석해보세요!

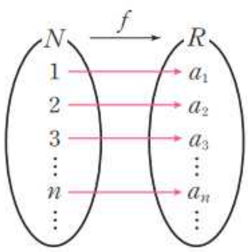
어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수의 열을 **수열**이라 하고, 나열된 각각의 수를 그 수열의 **항**이라고 한다. 일반적으로 수열을

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

과 같이 나타내고, 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$, n째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$, 제n항, $\cdots$이라고 한다.
(수열은 수의 나열 : 한번 나열해서 값을 구해 규칙을 찾아본다.)

자연수 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$에 수열의 각 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$을 차례로 대응시키면 이 대응은 자연수 전체의 집합 N에서 실수 전체의 집합 R로의 함수

$$f : N \longrightarrow R,\ f(n)=a_n$$



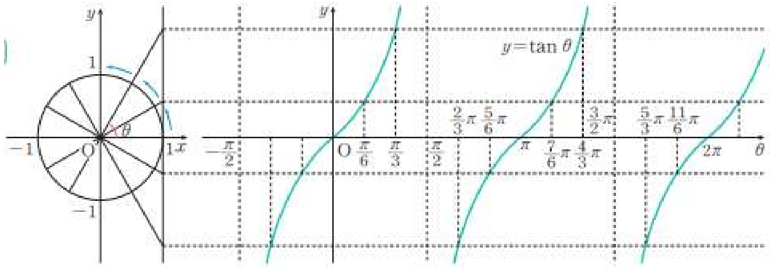
으로 볼 수 있다. 이때

$$f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ f(3)=a_3,\ \cdots,\ f(n)=a_n,\ \cdots$$

이다. 따라서 수열의 제n항 a_n이 n에 대한 식 $f(n)$으로 주어지면, n에 $1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하여 수열의 각 항을 구할 수 있다.

(수열은 자연수를 정의역으로 하는 함수 : 함수로 접근해서 문제를 해석해본다.)

(출처 : 고등학교 수학 2 교과서)



한편, 각 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)의 동경과 단위원의 교점의 x좌표는 0이므로 $\tan\theta$의 값은 정의되지 않는다. 따라서 함수 $y=\tan\theta$의 정의역은 $\theta\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이며 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)는 함수 $y=\tan\theta$의 그래프의 점근선이다. 또한, 함수 $y=\tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, π간격으로 함숫값의 변화가 반복되므로 주기가 π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

탄젠트함수 $y=\tan\theta$의 성질

① 정의역은 $\theta\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고,
치역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프의 점근선은 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

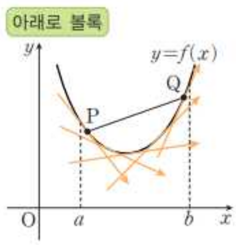
③ 주기가 π인 주기함수이다.

④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(주기가 인 주기함수이므로, 주기만큼 평행 이동할 때, y값이 같다.)

구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여

(i) 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록 또는 위로 오목하다고 한다. 이때 이 구간에서 $f'(x)$는 증가한다.
한편, $f''(x)>0$이면 $f'(x)$가 증가하므로 $f''(x)>0$이 되는 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하게 된다.



(이계도함수는 도함수의 도함수 : 도함수의 활용에서의 증가, 감소 개념을 이용할 수 있다!)
(출처 : 고등학교 미적분 2 교과서)

순서를 나열해보면, ① 수열을 함수로 해석할 수 있네! ② 탄젠트는 주기함수네!
③ 4개의 주기에 걸쳐서 a 이 존재하는 경우를 본적이 없으니까, 주기 이용해서 평행이동하자.
④ 평균값의 정리와 이계도함수의 개념을 이용해서 두 점 사이 기울기의 부등식을 만들어보자.
입니다. 이렇게 정리하면 문제풀이의 모범적인 순서가 보일 것입니다!

개념과 문제를 연결하세요. 필연적인 풀이를 만드시길 바랍니다.

2) 기출과 기출의 연결

30. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100\,|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}\left|f(x^k)\right|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(출처 : 2015학년도 수능 B형 30번)

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\left|2\sin(x+2|x|)+1\right|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

(출처 : 2017학년도 9월 평가원 가형 30번)

2017학년도 문제는, 위에 있는 2015학년도 수능 문제와 연결이 되어야합니다.

이계도함수가 존재하려면, 도함수가 존재해야합니다.
또한, 도함수가 존재하려면 절댓값에 의해 함수가 바뀌는 부분에서 미분 가능해야합니다.
절댓값 기호가 두 개 존재하며, 안쪽에 있는 절댓값에 의해 함수가 먼저 바뀝니다.
함수가 바뀌는 곳에 주목하라는 것이 바로 이 두 문제의 핵심이었겠네요!

4 함수 $f(x)=|x-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보여라.

풀이 (i) $x=1$에서의 연속성을 조사하여 보자.

$f(1)=0$이고, $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}|x-1|=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)=|x-1|$은 $x=1$에서 연속이다.

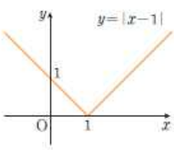
(ii) $x=1$에서의 미분가능성을 조사하여 보자.

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)-0}{x-1}=-1$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)-0}{x-1}=1$$

즉, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|x-1|$은 $x=1$에서 미분가능하지 않다.



풀이 참조

함수 $f(x)=|x|$의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

(출처 : 고등학교 미적분 1 교과서)

이 개념을 이용한다는 것을 여러분께서 쉽게 찾아보실 수 있으시겠습니다.

20. 점 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서 곡선 $y = \sin x\ (x > 0)$에 접선을 그어 접점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$

ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(출처 : 2019학년도 수능 수학 가형 20번)

20. 열린 구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x) = \cos x + 2x \sin x$가 $x = \alpha$와 $x = \beta$에서 극값을 가진다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha < \beta$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\tan(\alpha + \pi) = -2\alpha$

ㄴ. $g(x) = \tan x$라 할 때, $g'(\alpha + \pi) < g'(\beta)$이다.

ㄷ. $\frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \pi - \beta} < \sec^2\alpha$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(출처 : 2019학년도 수능 9월 평가원 가형 20번)

탄젠트함수 $y = \tan\theta$의 성질

① 정의역은 $\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프의 점근선은 직선 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

③ 주기가 π인 주기함수이다.

④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(주기가 π인 주기함수이므로, 주기만큼 평행 이동할 때, y값이 같다.)

(출처 : 고등학교 미적분 2 교과서)

이런 식으로, 문제와 문제끼리 연결할 수 있다구요!

그렇다면 여러분께서는 문제와 문제를 왜 연결해야할까요?
답은 간단합니다!

다시 개념으로 돌아가기 위해서입니다!

여러분께서, 이렇게 문제와 문제의 연결을 해주신다면 문제풀이의 요령이 쌓이게 됩니다.
그 요령이 개념에 기반하여 쌓이게 되는 거지요. 기본개념의 의미가 더욱 확실해집니다.
이 과정에서 여러분의 모범적인 문제풀이 전략이 세워지게 됩니다.
또한, 이맘때 쯤, 실전모의고사를 반드시 푸시게 될 것입니다. 그때에도 이 방식입니다.

어려운 문제일수록, 예전에 풀었던 문제와 개념을 반드시 찾아보셔야합니다.

틀렸다면, 예전에 비슷한 문제를 발견하고, 공통점을 찾아서 다시 개념으로 돌아간다.
그 후 틀린 문제의 풀이방법을 개념과 예전 문제로 다시 확립하고 정리한다.
이런 방식으로 보통 여러분께서 공부하셨을 것입니다.
그러지 않으셨다면, 이러한 연결방식으로 다시 개념과 기본풀이법을 재정의 하시길 바랍니다.

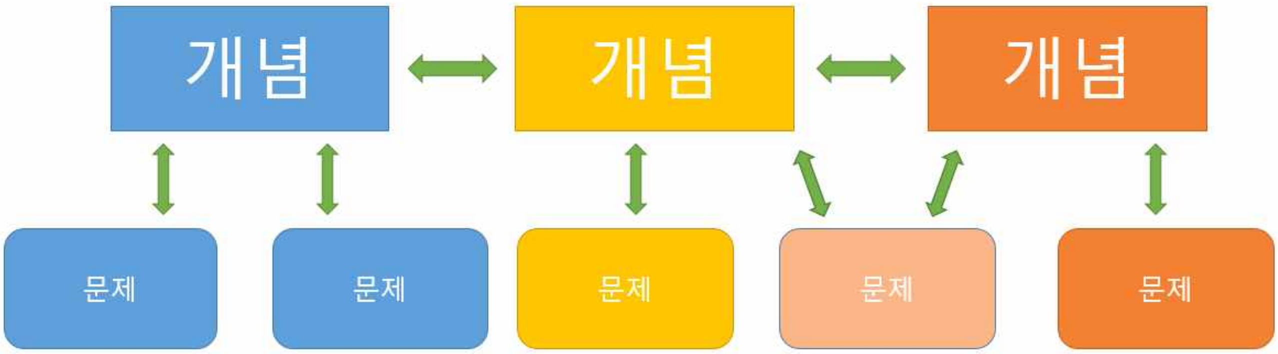
4. 다시 교과서로 돌아가는 것.

이제, 예전 교과서 칼럼을 다시 보도록 합시다.

교과서 칼럼에서는 개념과 개념의 연결을 강조했었습니다.

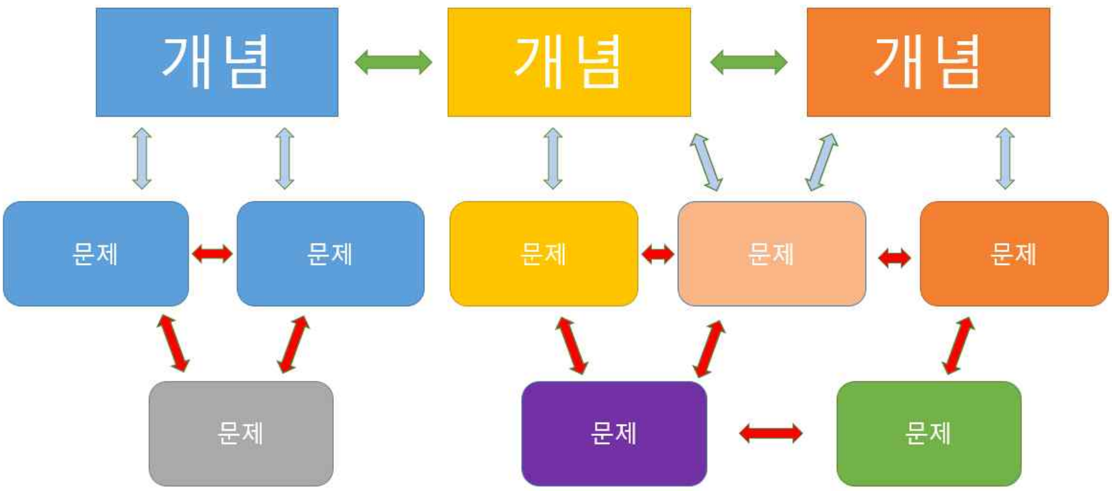
여기에서도 연결에 공통점과 차이점을 강조했었습니다!

이제, 기출분석을 할 때 교과서를 기반한 필연적인 풀이를 여러분이 직접 써보셔야합니다.
어떠한 개념이 쓰였는가를 다시 보면서 이렇게 연결해줍니다!



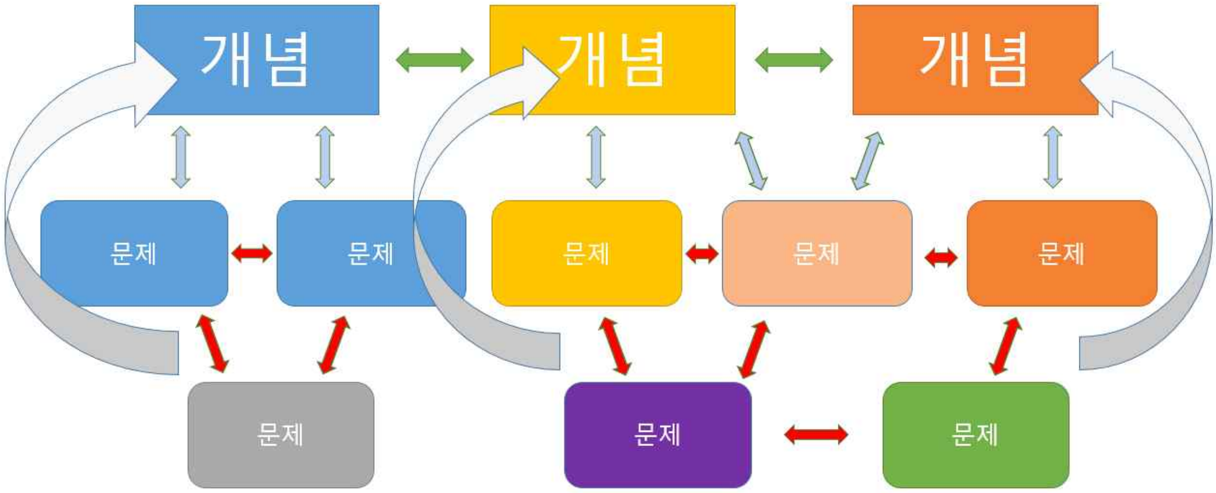
이 때, 개념과 문제의 연결이 필요한 것을 여러분께서 아실 것입니다!
이 과정에서는 개념을 이용해 문제를 해석하는데 필연적이고 논리적이었는지를 확인합니다.

이제, 문제와 문제의 연결을 할 차례입니다.
어떠한 개념이 쓰였는가를 여러분께서는 이미 보셨기 때문에 비슷한 문항은 찾기 쉬워요.



이런 식으로 연결해줍니다!

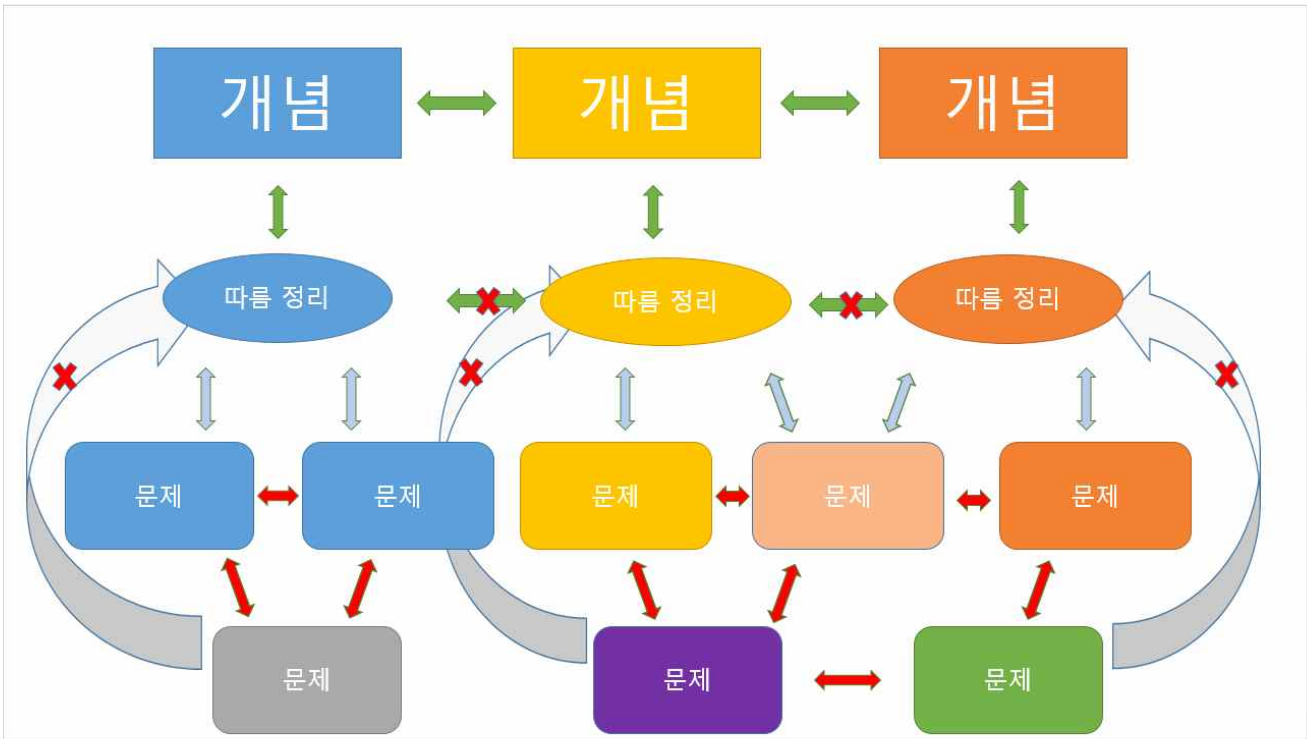
이제, 마지막으로, 이 공통점을 기반으로 다시 개념으로 돌아가서 풀이방법을 확립합니다!



여러분이 지금부터 개념과 기출, 그리고 실전 모의고사를 할 때 생각하셔야할 도식입니다.

이 방식대로 꼼꼼하게 연결해주실 때, 개념과 기출을 잘 이해한 상태가 될 것입니다.

여기서, 교과서 개념 이상의 공식을 쓰면 이러한 문제가 발생합니다!



이것을 보시면, 아까 생략단원에서 보신 공식으로 모든 것을 정리하면 문제가 발생합니다.

1. 이 공식들 자체는 그 단원의 개념에서 파생된 것이며, 타 단원의 개념과 연결짓기 힘듭니다.
교과서의 설계 목적 그대로 개념과 개념끼리의 유기적인 연결을 생각하셔야합니다!
이 편이 더욱 쉬우실거에요.

2. 마찬가지로, 이 때문에 문제를 풀고 정리할 때, 공식으로 돌아오면 안됩니다.
반드시 개념의 의미로 다시 돌아와야 합니다. 연결이 잘 안되니까요!

이로써, 우리는 기본으로 다시 돌아간다는 말의 의미를 이제 얼추 이해했습니다.

정리해보면. 우리가 해야하는 연결은 3가지입니다.

1. 개념과 개념 사이의 연결.
2. 개념과 문제 사이의 연결.
3. 문제와 문제 사이의 연결.

이 3가지를 항상 반복한다면, 문제에 적용할 수 있는 기본실력을 얻게 될 것입니다.
비단 시험공부 뿐이 아닙니다. 계속 사용해야 하는 지식이라면 계속 적용하고 정리해야합니다.
이렇게 정리한 이후라면, 한층 더 실제에 적용할 수 있는 이론을 얻을 수 있을 것입니다.

아마, 이 연결은 실제의 학문에서 이렇게 연결되리라 생각합니다.

1. 이론과 이론 사이의 연결.
2. 이론과 실제 사이의 연결.
3. 실제와 실제 사이의 연결.

즉, 경험과 이론은 항상 동시에 가야한다는 것입니다.
책만 읽고서는 아무것도 바꿀 수 없습니다. 그렇다고 행동만으로는 깊이가 없습니다.
두 가지가 조화가 되어야한다는 것은 동서양의 고전에도 나오는 이야기입니다.

맺음말

항상 맺음말이 어려운데.. 이제 본과 3학년이 되어가는 저로써는 이렇게밖에 할 게 없습니다.
제가 교과서를 강조한 것은, 여러분이 이해할 수 있는 풀이로 확신을 가지길 바란 것이었어요.

기출도 암기로 생각하고 답을 외워버렸다는 친구가 있습니다.
답을 다 외웠는데, 어떻게 공부해야할까에 대한 답이 될 수 있기를 바랍니다.

단언할 수 있는 것은 기본으로 돌아가서 계속 토론하는 공부는 반드시 늘 수밖에 없습니다.
그리고 오히려 공부에서 중요한 것은 기본으로 돌아가서 끈질기게 의문을 해결하는 것입니다.
많은 것이 필요한 것이 아니라는 점을 말씀드리고 싶었습니다.

저 또한, 교과서만으로 공부한 것은 아닙니다. 수학영역의 비밀을 7월쯤 보기 시작했으며,
기출도 해설이 없지만 제본해서 풀었었습니다. 실전 모의고사도 그때 무료모의고사 풀었어요.
아마 오프라인 실모도 몇 번 간 적 있었던 것 같습니다. 저도 아무것 없이 공부하진 않아요.

물론, 여러분에 비해서는 턱없이 부족하게 공부하긴 했었습니다.
하지만, 과연 이렇게 공부하는 것이 불가능한가에 대해서는 저는 아니라고 봅니다.

그리고, 오히려 공부에는 어떠한 만능의 강의나 방법이 아닌, 본질이 중요하다고 봅니다.
그 본질을 조금이나마 전달했기를 바랍니다.

이제, 공부의 신도, 수학도, 멘토링도 접어야합니다.
그럴 때가 하루씩 다가올 때마다 참 의문이 듭니다. 나는 잘해왔는가.
나는 이곳에 어떤 것을 전하고 가는가에 대해 참 의문이 듭니다.

혹시라도 지금 당장에 형편이나 공부 능력이 안되는 학생에게는 할 수 있다는 말을,
그렇지 않더라도, 기본에 충실한 방법을 고민하는 것이 좋을 수 있다는 말을

여러분께 해주고 싶었습니다.

이 칼럼이 여러분의 기출 분석과 개념공부에 도움이 되길 바랍니다.

2019년 1월 18일
일반청의미 이원엽