제 2 교시

2020학년도 3월 전국연합학력평가 대비 러셀모의고사

수학 영역 (가 형)

홀수형

성명	

수험 번호					–				

○ 자신이 선택한 유형(가 형/나 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

모래는 바위다 너는 작지 않다 너는 세상이다

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

메가스터디교육(주)

제 2 교시

수학 영역(가 형)

홀수형

5지선다형

1. 함수 $f(x)=xe^{x-1}$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x(x+3)}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

3. $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$ 의 값은? [2점]

① 3 ② $\frac{5}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 1

4. 여섯 개의 문자 r, u, s, s, e, l 를 일렬로 배열하는 경우의 수는? [3점]

① 300 ② 320 ③ 340 ④ 360 ⑤ 380

5. 함수 $f(x)=\dfrac{2}{3-x}$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

6. $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [3점]

① $\dfrac{-2+\sqrt{6}}{6}$ ② $\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}$ ③ $\dfrac{-1+\sqrt{6}}{6}$ ④ $\dfrac{2+\sqrt{6}}{6}$ ⑤ $\dfrac{3+\sqrt{6}}{6}$

7. $a>1$ 인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^x$ 은 닫힌 구간 $[1,\ 2]$ 에서 최솟값 m, 최댓값 $\dfrac{9}{4}$ 를 갖는다. $a+m$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

8. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=a\sin(ax)+3$의 주기가 $\frac{3\pi}{2}$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은? [3점]

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

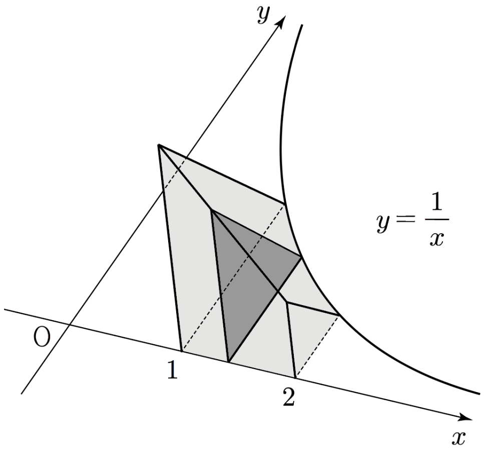
9. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2+(2\sin\theta)x+\cos\theta+\frac{5}{4}=0$$

이 실근을 갖도록 하는 모든 θ의 값의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ 2π

10. 그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{x}\ (x>0)$과 x축, $x=1$ 및 $x=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{12}$

11. 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=\log_2 x$ 에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=-x+k$가 만나는 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하자. $\alpha+\beta=6$일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

12. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c+d=6$
(나) a는 4의 양의 약수이다.

① 38 ② 40 ③ 42 ④ 44 ⑤ 46

13. 양수 k에 대하여 $f(x)=\ln(x^2+k)$가 있다.
$0<x_1<1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f''(x_1)f''(x_2)<0$일 때, $f(k)$의 값은? [3점]

① $\ln\frac{7}{2}$　② $\ln 3$　③ $\ln\frac{5}{2}$　④ $\ln 2$　⑤ $\ln\frac{3}{2}$

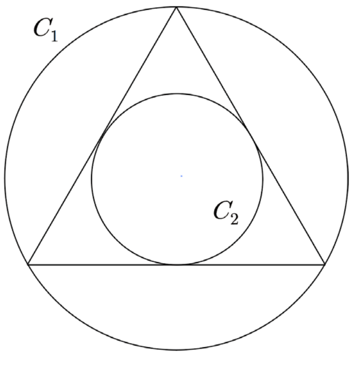
14. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(e^x)=x^3+x$$

를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.
$g'(2)$의 값은? [4점]

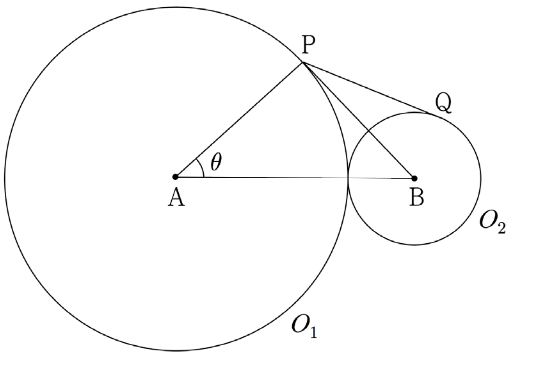
① $\frac{e}{8}$　② $\frac{e}{4}$　③ $\frac{3}{8}e$　④ $\frac{e}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}e$

15. 그림과 같이 원 C_1의 내부에 접하는 정삼각형에 내접한 원을 C_2라 하자. 이렇게 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 5가지 색을 모두 사용하여 한 영역에 한 가지 색만을 칠하려고 한다. 정삼각형의 내부와 원 C_2의 외부의 공통 영역에는 같은 색을 칠하고, 나머지 4개의 영역에는 서로 다른 색을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



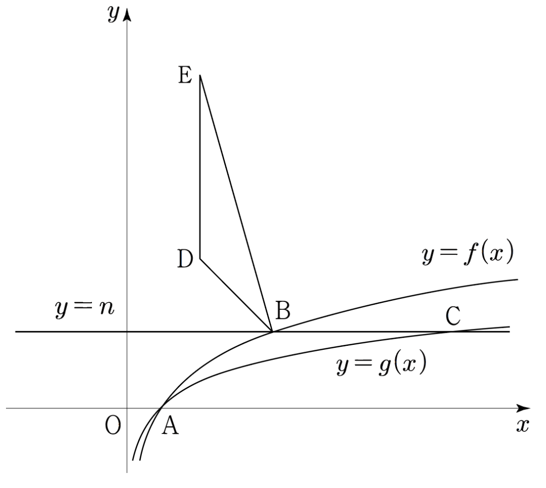
① 20　② 25　③ 30　④ 35　⑤ 40

16. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 A인 원 O_1 위에 점 P가 있다. 점 P에서의 접선 위의 점 B에 대하여 점 B를 중심으로 하고 원 O_1에 외접하는 원을 O_2라 하자. 원 O_2 위의 점 Q에 대하여 직선 PQ가 원 O_2에 접한다. $\angle PAB = \theta$일 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{PQ}}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고, $\overline{AB} < \overline{AQ}$이다.) [4점]



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ 1

17. 좌표평면에 두 함수 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=\log_3 x$와 점 A(1, 0)가 있다. 2 이상의 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점을 각각 B, C라 하고, 두 점 B, C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 D, E라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 BDE의 넓이를 S_2라 할 때, $2S_2 < 3S_1$이다. $\overline{\mathrm{BC}}$의 값은? [4점]



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

18. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+kx$가 상수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\tan a=3$

(나) $\int_0^a \tan^3 x \times f'(\tan x)\,dx+\int_0^a \tan x \times f'(\tan x)\,dx=3$

상수 k의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{5}{6}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{7}{6}$

19. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ e^{-x^2} & (x \ge 0) \end{cases}$$

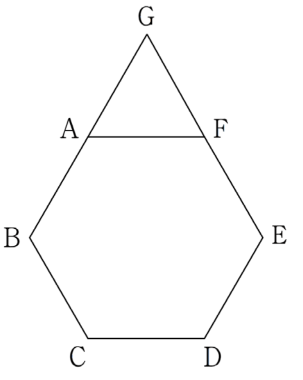
라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수가 1일 때, 함수 $g(x)$는 최댓값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $g(x)$가 최솟값을 가지고, $g'(k)=0$이면 $g(k)<0$이다. (단, $k<0$)
ㄷ. 함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 최솟값을 가지고, 변곡점이 되는 모든 y좌표의 곱이 $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$일 때, 함수 $g(x)$의 최솟값은 -1이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 정육각형 ABCDEF에 대하여 직선 AB와 직선 EF의 교점 G가 있다. 7개의 점 중에서 3개의 점을 이어서 만들 수 있는 모든 삼각형의 개수를 n이라 하자. 각각의 점과 1부터 7까지의 자연수를 임의로 하나씩 대응시킨 후 각각의 삼각형에 대하여 세 꼭짓점과 대응되는 수의 합을 s_1, s_2, $\cdots$, s_n이라 하자. 다음은 $s_1+s_2+\cdots+s_n=388$이 되도록 각각의 점과 1부터 7까지의 자연수를 하나씩 대응시키는 모든 경우의 수를 구하는 과정이다.



7개의 점 중에서 3개의 점을 선택해서 3개의 점에 대응되는 수를 모두 더한 값의 합은 (가) 이다. 따라서 세 점 A, B, G와 세 점 E, F, G에 대응되는 수의 합을 각각 s_{n+1}, s_{n+2}라 하면 $s_{n+1}+s_{n+2}=32$이다.

$1 \le k \le n+2$인 모든 자연수 k에 대하여 $s_k \le 18$이므로 순서쌍 $(s_{n+1},\ s_{n+2})$는 $(18,\ 14)$, $(17,\ 15)$, $(16,\ 16)$, $(15,\ 17)$, $(14,\ 18)$이 될 수 있다.

i) $(s_{n+1},\ s_{n+2})=(18,\ 14)$인 경우
$s_{n+1}=5+6+7$, $s_{n+2}=3+4+7$이므로 이를 만족시키도록 7개의 점과 자연수를 대응시키는 모든 경우의 수는 (나) 이다.

ii) $(s_{n+1},\ s_{n+2})=(17,\ 15)$인 경우

⋮

따라서 구하고자 하는 모든 경우의 수는 (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $\frac{a\times b}{c}$의 값은? [4점]

① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 음이 아닌 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=\pi|\sin(\pi x)|$
> (나) $f\left(-\dfrac{x}{k}\right)=-f(x)$ (단, $2<k<4$)

함수 $y=\left|\int_1^x f(t)dt+\dfrac{3}{4}\right|$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않을 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\dfrac{13}{5}$ ② $\dfrac{14}{5}$ ③ 3 ④ $\dfrac{16}{5}$ ⑤ $\dfrac{17}{5}$

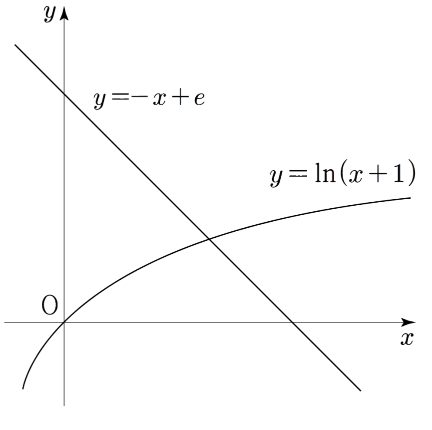
단답형

22. $\sec^2\theta+\tan^2\theta=4$ 일 때, $10\sin^2\theta$의 값을 구하시오. [3점]

23. 곡선 $y=\sqrt{x^2+3}$ 에 대하여 곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $100ab$의 값을 구하시오. [3점]

24. $\left(ax^2+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 x의 계수와 $\frac{1}{x^2}$의 계수가 같을 때, $100a$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이다.) [3점]

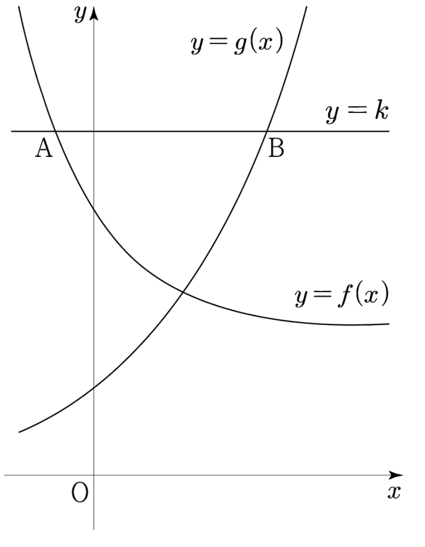
25. 그림과 같이 곡선 $y=\ln(x+1)$과 직선 $y=-x+e$가 점 $(e-1,\ 1)$에서 만난다. 곡선 $y=\ln(x+1)$과 직선 $y=-x+e$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 k일 때, $24k$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]



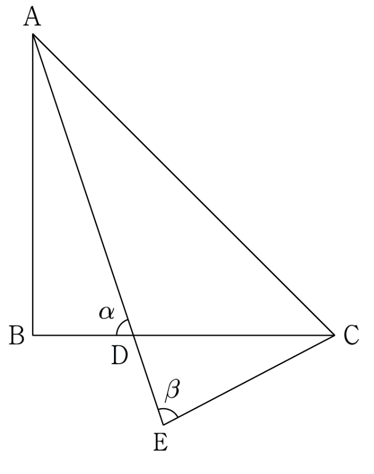
26. 두 곡선

$$f(x)=4^{-x}+2\ ,\ g(x)=2^x$$

과 직선 $y=k\ (k>3)$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 x좌표가 $\frac{1}{3}$이다. 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



27. $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 삼각형 ADC의 넓이가 3이고, 직선 AD의 연장선 위의 점 E에 대하여 CDE의 넓이가 $\frac{9}{10}$일 때, $\angle ADB = \alpha$, $\angle CED = \beta$라 하자. $\tan(\beta - \alpha) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\alpha < \beta$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



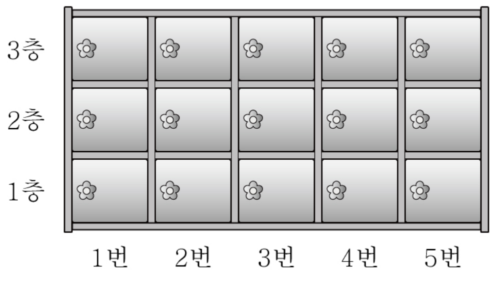
28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) = e^x \int_0^x g(t)\,dt - 2e^3$

(나) $f'(x)g(x) = x^2 e^x$

$f(3) = e^3$일 때, $\int_0^3 \{g(x)\}^2\,dx = k$라 하자. $10k$의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같은 15개의 사물함에 크기와 모양이 같은 1이 적혀 있는 공 6개와 2가 적혀 있는 공 9개를 1개씩 넣으려고 한다. 같은 층에서는 서로 이웃한 두 사물함에 각각 들어 있는 공에 적혀 있는 수의 곱이 짝수이다. 예를 들어, 1층 2번 사물함과 1층 3번 사물함에 들어 있는 공에 적혀 있는 수의 곱은 짝수이다. 공 15개를 사물함에 1개씩 넣는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]



30. 양수 p와 실수 q에 대하여 함수 $f(x)=p\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+q$가 있다. 최고차항의 계수가 1이고, $x=\frac{2}{3}$에서 극솟값을 가지는 삼차함수 $g(x)$에 대하여 열린 구간 $(0,\ n)$에서 합성함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수를 a_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2-a_1<a_4-a_3$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $g(n-a_n)=0$이다.

함수 $h(x)$가 극댓값 0, 4를 가질 때, $g(5p+q)$의 값을 구하시오. [4점]

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2020학년도 3월 전국연합학력평가 대비 러셀모의고사
정답 및 해설

• 수학 영역 •

(가)형 정답

1	①	**2**	②	**3**	④	**4**	④	**5**	③
6	⑤	**7**	①	**8**	②	**9**	⑤	**10**	③
11	①	**12**	③	**13**	④	**14**	②	**15**	⑤
16	⑤	**17**	④	**18**	③	**19**	①	**20**	②
21	④	**22**	6	**23**	75	**24**	50	**25**	36
26	5	**27**	22	**28**	45	**29**	399	**30**	180

해설

1. [정답] ①
$f(x) = xe^{x-1}$에서 $f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1}$ 이므로
$f'(1) = 1+1 = 2$ 이다.

2. [정답] ②
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x(x+3)} = \lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+4x)}{4x}\times\dfrac{4}{x+3}\right\} = \dfrac{4}{3}$

3. [정답] ④
$\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

4. [정답] ④
여섯 개의 문자 중 s 가 2 번 중복되므로 여섯 개의 문자 r, u, s, s, e, l 을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!} = 360$ 이다.

5. [정답] ③
$f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ 에서 $f'(x) = \dfrac{2}{(3-x)^2}$ 이다.
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2)$ 이므로
$f'(2) = \dfrac{2}{(3-2)^2} = 2$ 이다.

6. [정답] ⑤
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 이고, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로
$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.
$\therefore \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}cos\,\theta + \cos\dfrac{\pi}{3}sin\theta$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
$= \dfrac{3+\sqrt{6}}{6}$

7. [정답] ①
$a > 1$ 이므로 $f(x) = a^x$ 는 닫힌 구간 $[1,\ 2]$ 에서 증가함수이다. 즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값, $x=2$ 에서 최댓값을 가진다.
따라서 $f(2) = a^2 = \dfrac{9}{4}$ 에서 $a > 1$ 이므로 $a = \dfrac{3}{2}$ 이고,
$f(1) = \dfrac{3}{2} = m$ 이므로 $a+m = \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2} = 3$ 이다.

8. [정답] ②
함수 $f(x) = a\sin(ax)+3$ 의 주기가 $\dfrac{3\pi}{2}$ 이므로
$\dfrac{2\pi}{a} = \dfrac{3\pi}{2}$, $a = \dfrac{4}{3}$ 이다.
따라서 $-1 \le \sin(ax) \le 1$ 이므로
함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}+3 = \dfrac{13}{3}$ 이다.

9. [정답] ⑤
이차방정식 $x^2+(2\sin\theta)x+\cos\theta+\dfrac{5}{4} = 0$ 의
판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4} = (\sin\theta)^2-\cos\theta-\dfrac{5}{4} \ge 0$ 에서
$1-\cos^2\theta-\cos\theta-\dfrac{5}{4} \ge 0$, $\left(\cos\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2 \le 0$
즉, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ 이다.
$0 \le \theta < 2\pi$ 이므로 $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta = \dfrac{4}{3}\pi$ 이다.
따라서 모든 θ 의 값의 합은 $\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\pi = 2\pi$ 이다.

10. [정답] ③
입체도형을 평면 $x = t(1 \le t \le 2)$ 로 자른 단면이 정삼각형이므로 단면의 넓이는
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\dfrac{1}{t}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4t^2}$ 이다.
따라서 이 입체도형의 부피는
$\displaystyle\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4t^2}dt = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{t}\right]_1^2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$
이다.

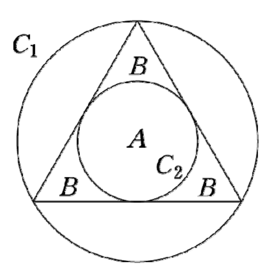
11. [정답] ①
두 함수 $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ 는 서로 역함수이므로 직선 $y = -x+k$ 와의 교점의 좌표는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. 즉, 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 직선 $y = -x+k$ 와의 교점의 좌표는
각각 $(\alpha,\ \beta)$, $(\beta,\ \alpha)$ 이고, 두 교점의 중점은
두 직선 $y = -x+k$, $y = x$ 와의 교점이다.
따라서 $\alpha+\beta = 6$ 이므로 두 교점의 중점은
$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = (3,\ 3)$ 이고,
$3 = -3+k$ 에서 $k = 6$ 이다.

12. [정답] ③
조건 (나)에 의하여 4 의 양의 약수가 1, 2, 4 이므로
$a = 1$ 또는 $a = 2$ 또는 $a = 4$ 이다.
$a = 1$ 인 경우, 조건 (가)에서 $b+c+d = 5$ 이므로
${}_3\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = \dfrac{7\times 6}{2} = 21$ 이다.
$a = 2$ 인 경우, $b+c+d = 4$ 이므로
${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\times 5}{2} = 15$ 이다.
$a = 4$ 인 경우, $b+c+d = 2$ 이므로
${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = \dfrac{4\times 3}{2} = 6$ 이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $21+15+6 = 42$ 이다.

13. [정답] ④
조건에서 $f''(x_1)f''(x_2) < 0$ 이므로
$f''(x_1) > 0$ 이면 $f''(x_2) < 0$ 이고,
$f''(x_1) < 0$ 이면 $f''(x_2) > 0$ 이다.
즉, $f''(1) = 0$ 이다.
$f(x) = \ln(x^2+k)$ 에서
$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+k}$, $f''(x) = \dfrac{2(k-x^2)}{(x^2+k)^2}$ 이므로
$f''(1) = k-1 = 0$ 이다.
따라서 $k = 1$ 이므로 $f(k) = \ln 2$ 이다.

14. [정답] ②
$f(e^x) = x^3+x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
$f'(e^x) = \dfrac{3x^2+1}{e^x}$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $f(g(x)) = x$ 이므로
$g'(x)f'(g(x)) = 1$, $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ 이다.
$g(2) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = 2$ 이므로
$f(e^x) = x^3+x = 2$ 에서 $x^3+x-2 = 0$,
$x = 1$ 이므로 $k = e$ 이다.
즉, $x = 1$ 일 때 $f(e) = 2$ 이고 $f'(e) = \dfrac{4}{e}$ 이므로
$g'(2) = \dfrac{1}{f'(g(2))} = \dfrac{1}{f'(e)} = \dfrac{e}{4}$ 이다.

15. [정답] ⑤



다섯 가지의 색 중 두 영역 A , B 에 색칠하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2 = 20$ 이고, 나머지 3 구역에 3 가지의 색으로 색칠하는 경우의 수는 $(3-1)! = 2$ 이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $20\times 2 = 40$ 이다.

16. [정답] ⑤
두 원 C_1, C_2 의 접점을 R 라 하자.
삼각형 ABP 는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sec\theta$, $\overline{\mathrm{BP}}=\tan\theta$ 이다.
즉, $\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AR}}=\sec\theta-1$ 이고 $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BR}}$ 이므로
삼각형 PBQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BP}}^2-\overline{\mathrm{BQ}}^2}$$
$$=\sqrt{\tan^2\theta-(\sec\theta-1)^2}=\sqrt{2\sec\theta-2}$$

이다.

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{2\sec\theta-2}}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}{\theta\sqrt{\cos\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{2}\,sin\theta}{\theta\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}=1$$

17. [정답] ④
두 점 B, C의 좌표는 각각 $\mathrm{B}(2^n,\ n)$, $\mathrm{C}(3^n,\ n)$이고
밑변을 $\overline{\mathrm{BC}}$로 하면 삼각형 ABC의 높이는 n이므로
넓이는 $S_1=\frac{1}{2}n(3^n-2^n)$ 이다.
두 점 D, E의 좌표는 두 점 B, C를
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로
$\mathrm{D}(n,\ 2^n)$, $\mathrm{E}(n,\ 3^n)$이다.
같은 방법으로 삼각형 BDE의 높이는 2^n-n이므로
넓이는 $S_2=\frac{1}{2}(2^n-n)(3^n-2^n)$ 이다.

$2S_2<3S_1$이므로 $(2^n-n)(3^n-2^n)<\frac{3}{2}n(3^n-2^n)$

에서 $2^n<\frac{5}{2}n$ 이다.
이를 만족하는 2 이상의 자연수 n의 값은 2이다.
$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=3^n-2^n=9-4=5$

18. [정답] ③

$$\int_0^a\{\tan^3x\times f'(\tan x)\}dx+\int_0^a\tan x\times f'(\tan x)\,dx$$
$$=\int_0^a\tan x(\tan^2x+1)\times f'(\tan x)\,dx$$
$$=\int_0^a\tan x(\sec^2x)\times f'(\tan x)\,dx$$

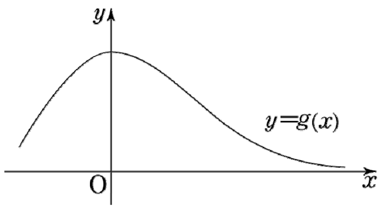
에서 $\tan x=t$ 라 치환하면 $\sec^2x=\frac{dt}{dx}$ 이고,
$x=0$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=\tan a=3$ 이다.

$$\int_0^a\tan x(\sec^2x)\times f'(\tan x)\,dx$$
$$=\int_0^3tf'(t)\,dt$$
$$=\Big[tf(t)\Big]_0^3-\int_0^3f(t)\,dt$$
$$=3f(3)-\int_0^3f(t)\,dt=3$$

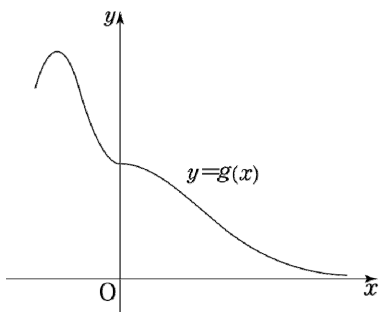
에서 $f(3)=3k$이고
$\int_0^3f(t)\,dt=\int_0^3(t^3-3t^2+kt)\,dt=\frac{9k}{2}-\frac{27}{4}$ 이므로
$9k-\frac{9k}{2}+\frac{27}{4}=3$, $k=-\frac{5}{6}$ 이다.

19. [정답] ①
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서
미분가능하므로 연속이다. 즉, $f(0)=1$이다.
또한, $x\ge0$에서 $g'(x)=-2xe^{-x^2}$이고
$x<0$에서 $g'(x)=f'(x)$이므로 $f'(0)=0$이다.

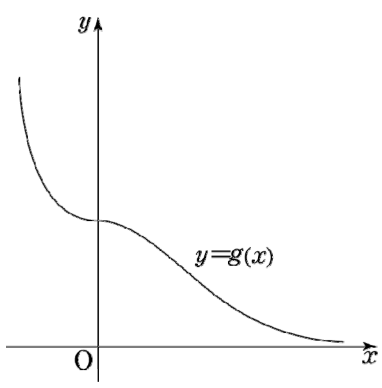
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프 개형은
삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 개형에 따라
다음과 같다.
ⅰ) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우
①



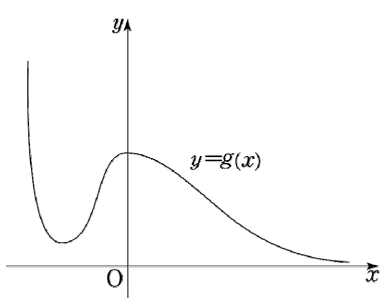
②



ⅱ) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우
①



②



ㄱ. ⅰ)의 경우이므로 함수 $g(x)$는 최댓값을 갖는다.
$\therefore$ (참)
ㄴ. 함수 $g(x)$가 최솟값을 가지므로
ⅱ)-②번이 가능하고, $g(x)$의 최솟값은
함수 $f(x)$의 극솟값이다.
따라서 $x=k$에서 극솟값을 가져야한다.
이때, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $g(x)$가 최솟값을
가지려면 $g(x)\le0$이어야 한다. $\therefore$ (거짓)
ㄷ. $x=-2$에서 최솟값을 가지므로 $f'(-2)=0$이다.
따라서 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면
$f'(x)=3ax(x+2)$이다.
$g''(x)=\begin{cases}6a(x+1) & (x<0)\\ (4x^2-2)e^{-x^2} & (x>0)\end{cases}$ 에서
함수 $g(x)$가 변곡점이 되는 x좌표는
$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=-1$이다.

함수 $g(x)$의 변곡점의 y좌표의 곱이 $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$이므로
$f(-1)\times e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$에서 $f(-1)=\frac{1}{2}$이다.
따라서 $f(x)=ax^3+3ax^2+1$ ($\because f(0)=1$)에서
$a=-\frac{1}{4}$이고, 함수 $g(x)$의 최솟값은 0이다.
$\therefore$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ

20. [정답] ②

7개의 점 중에서 3개의 점을 선택할 때, 어떤
한 점이 선택되는 경우의 수는 15이므로 7개의
점 중에서 3개의 점을 선택해서 3개의 점에
대응되는 수를 모두 더한 값의 합은
$\boxed{(가)=15\times\sum_{k=1}^{7}k=420}$ 이다.
따라서 세 점 A, B, G와 세 점 E, F, G에
대응되는 수의 합을 각각 s_{n+1}, s_{n+2}라 하면
$s_{n+1}+s_{n+2}=420-388=32$이다.
$1\le k\le n+2$인 모든 자연수 k에 대하여
$s_k\le18$이므로 순서쌍 $(s_{n+1},\ s_{n+2})$는
$(18,\ 14)$, $(17,\ 15)$, $(16,\ 16)$, $(15,\ 17)$,
$(14,\ 18)$이 될 수 있다.

ⅰ) $(s_{n+1},\ s_{n+2})=(18,\ 14)$인 경우
$s_{n+1}=5+6+7$이고, 5, 6, 7 중 하나의 수
와 나머지 중에서 두 수의 합이 14가 되는 경우
는 $s_{n+2}=3+4+7$ 뿐이다. 따라서 점 G에
대응되는 수는 7이고 이를 만족시키도록 7개
의 점과 자연수를 대응시키는 모든 경우의 수
는 $\boxed{(나)=2\times2\times2=8}$ 이다.

ⅱ) $(s_{n+1},\ s_{n+2})=(17,\ 15)$인 경우
$s_{n+1}=4+6+7$이고, 4, 6, 7 중 하나의
수와 나머지 중에서 두 수의 합이 15인 경우는
$s_{n+2}=3+5+7$ 뿐이다. 따라서 점 G에 대
응 되는 수는 7이고, 이를 만족시키는 모든 경
우 의 수는 $2\times2\times2=8$이다.

ⅲ) $(s_{n+1},\ s_{n+2})=(16,\ 16)$인 경우
7 이하의 세 수의 합이 16이 되는 경우는
$3+6+7$, $4+5+7$ 뿐이다. 따라서 점 G에
대응되는 수는 7이고, 이를 만족시키는 모든
경우의 수는 $2\times2\times2\times2=16$이다.

ⅳ) $(s_{n+1},\ s_{n+2})=(14,\ 18)$, $(15,\ 17)$인 경우
ⅰ), ⅱ)에 의하여 각각의 경우의 수는 모두
8이다.

따라서 구하고자 하는 모든 경우의 수는
$\boxed{(다)=8+8+16+8+8=48}$ 이다.

즉, $a=420$, $b=8$, $c=48$이므로
$\frac{a\times b}{c}=\frac{420\times8}{48}=70$이다.

21. [정답] ④

조건 (가)에 의하여 $x \ge 0$ 에서 $f(x)=\pi|\sin \pi x|$ 이다.

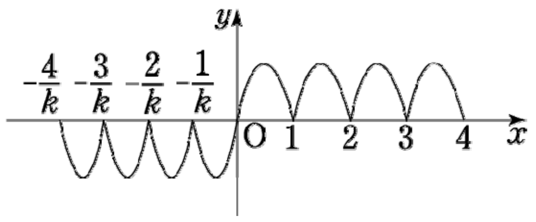
조건 (나)에서 $-\frac{x}{k}=t$ 라 하면

$f(t)=-f(kt)\,(t \le 0)$ 이다.

즉, $f(t)=-\pi|\sin(-k\pi t)|=-\pi|\sin(k\pi t)|$ 이므로

$x \le 0$ 에서 $f(x)=-\pi|\sin(k\pi x)|$ 이다.

이를 바탕으로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 개형은 다음과 같다.



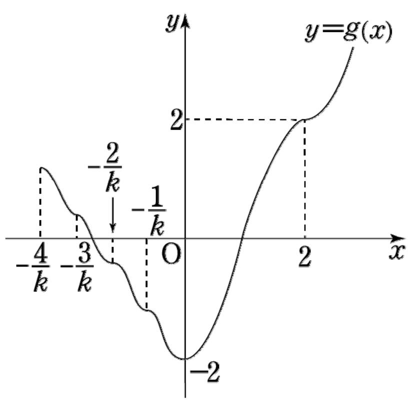
$g(x)=\int_1^x f(t)dt$ 라 하자.

$\int_0^1 \pi\sin(\pi x)\,dx=2$ 이므로 $\int_{-\frac{1}{k}}^0 f(t)\,dt=-\frac{2}{k}$이고,

$g(1)=0$, $g(2)=\int_1^2 -\pi\sin(\pi x)\,dx=2$,

$g(0)=\int_0^1 \pi\sin(\pi x)\,dx=-2$ 이다.

$g'(x)=f(x)$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 개형은 다음과 같다.



즉, 함수 $g(x)=-\frac{3}{4}$ 의 교점의 개수가 2 개이므로

함수 $y=\left|\int_1^x f(t)\,dt+\frac{3}{4}\right|$ 가 한 점에서만

미분가능하지 않으려면 $x<0$에서 직선 $y=-\frac{3}{4}$ 가

함수 $g(x)$ 의 변곡점을 지나야 한다.

$x<0$에서 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{1}{k}$, $-\frac{2}{k}$, $\cdots$ 에서

변곡점을 가지므로 직선 $y=-\frac{3}{4}$ 가 지나는 변곡점의

x 좌표를 $-\frac{n}{k}$ (n은 자연수)라 하면

$g\left(-\frac{n+1}{k}\right)=g\left(-\frac{n}{k}\right)+\frac{2}{k}$ 이므로

$-2+\frac{2n}{k}=-\frac{3}{4}$, $k=\frac{8}{5}n$ 이다.

따라서 $2<k<4$ 이므로 이를 만족하는 k 의 값은

$n=2$ 일 때 $k=\frac{16}{5}$ 이다.

22. [정답] 6

$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$ 이므로

$\sec^2\theta+\sec^2\theta-1=4$ 에서 $\sec^2\theta=\frac{5}{2}$ 이다.

즉, $\cos^2\theta=\frac{2}{5}$ 이고, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로

$\sin^2\theta=\frac{3}{5}$ 이다.

$\therefore 10\sin^2\theta=10\times\frac{3}{5}=6$

23. [정답] 75

$y=\sqrt{x^2+3}$ 에서 $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ 이므로

곡선 위의 점 (1, 2) 에서의 접선의 기울기는

$\frac{1}{\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2}$ 이고, 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-1)+2=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$ 이므로

$100ab=75$ 이다.

24. [정답] 50

다항식 $\left(ax^2+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(ax^2)^r\left(\frac{1}{x}\right)^{5-r}={}_5\mathrm{C}_r a^r x^{3r-5}\,(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

이다.

즉, x 항은 $r=2$ 일 때이므로

x 의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2a^2=10a^2$ 이고,

$\frac{1}{x^2}$ 항은 $r=1$ 일 때이므로

$\frac{1}{x^2}$ 의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_1a=5a$ 이다.

따라서 $10a^2=5a$, $5a(2a-1)=0$ 에서

$a>0$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore 100a=100\times\frac{1}{2}=50$

25. [정답] 36

두 곡선 $y=\ln(x+1)$, $y=-x+e$ 과 x 축으로

둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx+\int_{e-1}^{e}(-x+e)\,dx$이다.

$\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx=\int_1^e \ln x\,dx=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e=1$

이고, $\int_{e-1}^{e}(-x+e)\,dx$는 한 변의 길이가 1 인

직각이등변삼각형의 넓이이므로 $\frac{1}{2}$ 이다.

즉, $k=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 이다.

$\therefore 24k=24\times\frac{3}{2}=36$

26. [정답] 5

점 A 의 y 좌표가 k 이므로 x 좌표는 $4^{-x}+2=k$ 에서

$4^{-x}=k-2$, $x=-\log_4(k-2)$ 이다.

같은 방법으로 점 B 의 x 좌표는 $\log_2 k$ 이고,

선분 AB 를 1 : 2로 내분하는 점의 x 좌표가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$\frac{-2\log_4(k-2)+\log_2 k}{1+2}=\frac{1}{3}$, $\log_2\frac{k}{k-2}=1$ 이다.

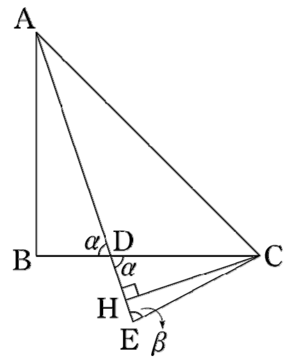
즉, $\frac{k}{k-2}=2$ 에서 $k=4$ 이므로 선분 AB 의 길이는

$\log_2 k+\log_4(k-2)=\frac{5}{2}$ 이다.

따라서 삼각형 OAB 의 높이는 4 이므로

넓이는 $\overline{\mathrm{AB}}\times4\times\frac{1}{2}=5$ 이다.

27. [정답] 22



삼각형 ACD 의 넓이가 3 이고,

삼각형 ABC 의 넓이는 $\frac{9}{2}$ 이므로

삼각형 ABD 의 넓이는 $\frac{3}{2}$ 이다.

즉, 점 D 는 선분 BC 를 1 : 2 로 내분하는 점이다.

점 C 에서 선분 AE 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

삼각형 ABD 는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{10}$ 이고,

$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$ 이므로 삼각형 CDH 에서

$\sin\alpha=\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{CD}}}=\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=2\times\sin\alpha=\frac{6}{\sqrt{10}}$ 이다.

또한, 삼각형 CDE 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{9}{10}$ 이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ 이고,

$\overline{\mathrm{DH}}=2\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{10}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{HE}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 이다.

즉, $\tan\alpha=3$ 이고 삼각형 CEH 에서

$\tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{HE}}}=6$ 이다.

$\therefore \tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{6-3}{1+3\cdot6}=\frac{3}{19}$

따라서 $p=19$, $q=3$ 이므로 $p+q=19+3=22$ 이다.

28. [정답] 45

$h(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ 라 하면 $h(0)=0$ 이고

조건에서 $f(3)=e^3$ 이므로

조건 (가)의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$f(3)=e^3h(3)-2e^3$, $h(3)=3$ 이다.

또한, $h'(x)=g(x)$ 이고

조건 (가)에서 $f(x)=e^xh(x)-2e^3$의 양변을 미분하면

$f'(x)=e^x(g(x)+h(x))$ 이고,

조건 (나)에서 $e^{-x}f'(x)g(x)=x^2$ 이므로

양변에 $e^{-x}g(x)$를 곱하면

$e^{-x}f'(x)g(x)=\{g(x)\}^2+g(x)h(x)$,

$x^2-g(x)h(x)=\{g(x)\}^2$ 이다.

양변을 $x=0$ 에서 $x=3$ 까지 적분하면

$\int_0^3 x^2\,dx-\int_0^3 g(x)h(x)\,dx=\int_0^3\{g(x)\}^2\,dx$,

$\int_0^3 g(x)h(x)\,dx=\int_0^3 x^2\,dx-\int_0^3\{g(x)\}^2\,dx$ 이다.

이때,

$\int_0^3 g(x)h(x)\,dx = [\{h(x)\}^2]_0^3 - \int_0^3 h(x)g(x)\,dx$

이므로

$\int_0^3 g(x)h(x)\,dx = \frac{1}{2}[\{h(x)\}^2]_0^3$이다.

즉, $\frac{1}{2}[\{h(3)\}^2 - \{h(0)\}^2]$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 - \int_0^3 \{g(x)\}^2 dx$,

$\frac{9}{2} = 9 - \int_0^3 \{g(x)\}^2 dx$ 이므로

$k = \int_0^3 \{g(x)\}^2 dx = \frac{9}{2}$ 이다.

$\therefore 10k = 10 \times \frac{9}{2} = 45$

29. [정답] 399

같은 층에서 서로 이웃한 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 짝수가 되려면 1 이 적혀 있는 공끼리는 이웃하지 않아야 한다.

즉, 각 층에 1 이 적혀 있는 공의 개수에 따라 다음과 같이 나눌 수 있다.

i) 각 층에 1 이 적혀 있는 공이 3 개, 3 개, 0 개 있는 경우

한 층에 1 이 적혀 있는 공이 3 개이려면 1, 2, 1, 2, 1 의 순서로 나열되어야 한다.

즉, 각 층에 공을 넣는 모든 경우의 수는 1 이고, 1 이 들어가는 층을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$이므로 $1 \times 3 = 3$ 이다.

ii) 각 층에 1 이 적혀 있는 공이 3 개, 2 개, 1 개 있는 경우

한 층에 1 이 적혀 있는 공을 2 개 넣는 경우의 수는 1이 적혀 있는 공은 서로 이웃하지 않아야 하므로 $\frac{5!}{3!2!} - 4 = 6$ 이다.

한 층에 1 이 적혀 있는 공을 1 개 넣는 경우의 수는 5 이므로 $1 \times 6 \times 5 \times 3! = 180$ 이다.

iii) 각 층에 1 이 적혀 있는 공이 2 개, 2 개, 2 개 있는 경우

ii)에서 한 층에 1 이 적혀 있는 공을 2 개 넣는 경우의 수는 6 이므로 $6 \times 6 \times 6 = 216$ 이다.

i), ii), iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $3 + 180 + 216 = 399$ 이다.

30. [정답] 180

함수 $h(x) = (g \circ f)(x)$ 에 대하여 $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ 이다.

함수 $h(x)$ 가 극대 또는 극소가 되려면 $h'(x) = 0$ 에서 $g'(f(x)) = 0$ 또는 $f'(x) = 0$ 이어야 한다.

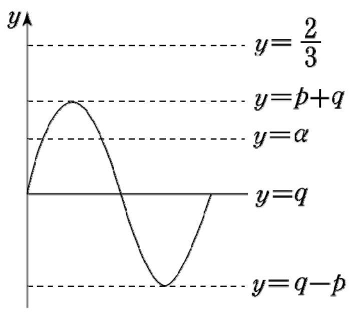
함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고, $x = \frac{2}{3}$ 에서 극솟값을 가지므로 $g'(x) = 0$ 의 다른 한 근을 α 라 하면 α 에서 극댓값을 가지므로 $\alpha < \frac{2}{3}$ 이다.

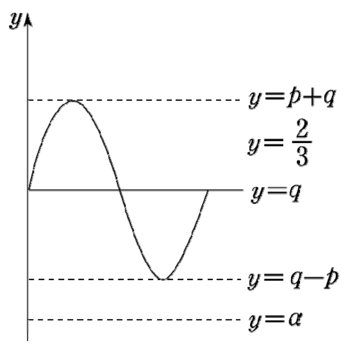
함수 $f(x) = p\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + q\,(p > 0)$ 에 대하여 $f'(x) = \frac{\pi}{2}p\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 이다.

조건 (가)에서 $a_2 - a_1 < a_4 - a_3$ 이고, $f'(x) = 0$ 이 되는 x 의 값은 $x = 1, 3, 5, 7, \cdots$ 이므로 $g'(f(x)) = 0$ 의 값에 따라 조건 (가)를 만족시킬 수 있다.

$g'(f(x)) = 0$ 이 되려면 $f(x) = \alpha$ 또는 $f(x) = \frac{2}{3}$ 이고, $-p + q \le f(x) \le p + q$ 이므로 $h'(x) = 0$ 을 만족하는 x 의 개수는 다음 조건에 따라 나눌 수 있다.

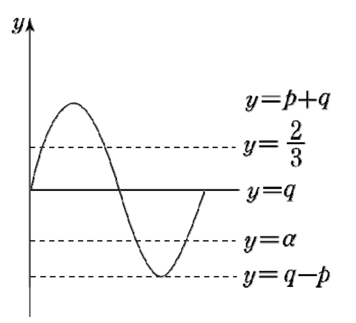
i) $q < \alpha < p + q$ 또는 $q < \frac{2}{3} < p + q$ 인 경우





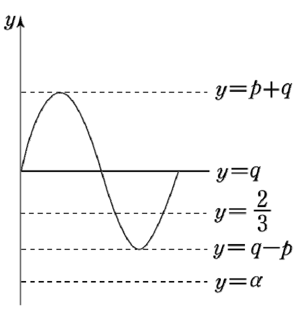
그림과 같이 q 와 $p+q$ 사이에서만 만날 경우 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

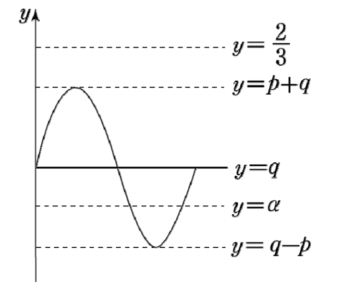
ii) $-p + q < \alpha < q < \frac{2}{3} < p + q$ 인 경우



그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만나는 경우 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$ 으로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

iii) $-p + q < \frac{2}{3} < q$ 또는 $-p + q < \alpha < q$ 인 경우



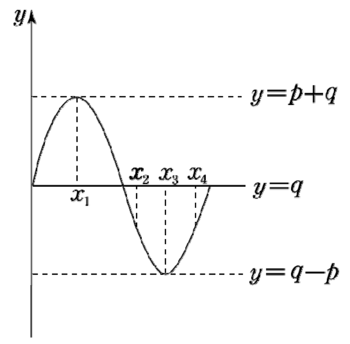


그림과 같이 $-p+q$ 와 q 사이에서만 만날 경우 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$ 이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

i), ii), iii)에 의하여 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$ 이고, 조건 (나)에 의하여 $g(0) = 0$, $g(1) = 0$ 이다.

즉, $g(x) = x(x-1)(x-k)$ (k는 상수)라 하면 $g'(x) = 3x^2 - 2(k+1)x + k$ 이고, $g'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$이므로 $\frac{4}{3} - \frac{4}{3}(k+1) + k = 0$, $k = 0$ 이다.

따라서 $g(x) = x^2(x-1)$ 이고, $\alpha = 0$ 이다.



함수 $h(x)$ 가 극댓값 0, 4 를 가지고 그림에서 $\lim_{x \to x_1 -} g'(f(x))$ 의 부호와 $\lim_{x \to x_1 +} g'(f(x))$ 의 부호는 같고,

$\lim_{x \to x_1 -} f'(x) > 0$, $\lim_{x \to x_1 +} f'(x) < 0$ 이므로

$\lim_{x \to x_1 -} h'(x) = \lim_{x \to x_1 -} g'(f(x))f'(x) > 0$,

$\lim_{x \to x_1 +} h'(x) = \lim_{x \to x_1 +} g'(f(x))f'(x) < 0$ 이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 $x = x_1$ 에서부터 차례대로 극댓값과 극솟값을 갖는다.

따라서 $h(x_1) = h(1) = 4$, $h(x_3) = h(3) = 0$ 이므로 $g(p+q) = 4$, $g(-p+q) = 0$ 이다.

즉, $g(-p+q) = (-p+q)^2(-p+q-1) = 0$ 에서 $p = q$ 또는 $q - p = 1$ 이다.

이때, $q - p = 1$ 이면 $q - p < \frac{2}{3}$ 인 조건에 모순이다.

따라서 $p = q$ 이고, $(p+q)^2(p+q-1) = 4$ 에서 $(2p)^2(2p-1) = 4$, $2p^3 - p^2 - 1 = 0$, $p = q = 1$ 이다.

$\therefore g(5p+q) = g(6) = 36 \times 5 = 180$