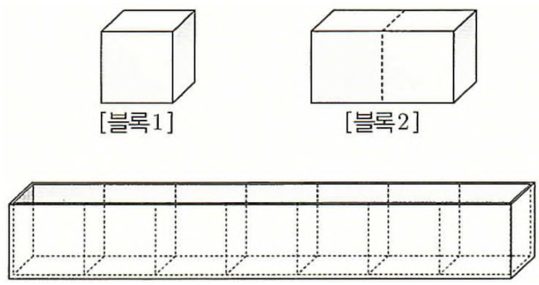
2. 조합(모의기출 유형)

1. 어느 학교 동아리 회원은 1학년이 6명, 2학년이 4명이다. 이 동아리에서 7명을 뽑을 때, 1학년에서 4명, 2학년에서 3명을 뽑는 경우의 수를 구하시오. [3점]

2. 색깔이 서로 다른 9개의 열쇠가 하나씩 포장되어 있다. 이 중 4개는 자물쇠 A만을, 3개는 자물쇠 B만을, 2개는 자물쇠 C만 을 열 수 있다. 9개의 열쇠 중에서 3개를 임의로 선택할 때, 자물 쇠 A와 자물쇠 B는 모두 열리고 자물쇠 C는 열리지 않도록 선택 하는 경우의 수는? [4점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

3. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 모양의 [블록1] 과 세모서리의 길이가 각각 2, 1, 1인 직육면체 모양의 [블록2]가 있다. 이 두 종류의 블록을 각각 1개 이상 사용하여 세 모서리의 길이가 각각 7, 1, 1인 직육면체 모양의 상자를 빈 공간이 없도록 채우려고 한다. 왼쪽부터 빈틈없이 차례로 채워 넣을 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오.
(단, 블록이 상자 밖으로 나가는 경우는 생각하지 않는다.) [4점]



4. 집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$에서 원소가 3개인 모든 부분집합을 각각 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이라고 하자.
집합 $A_k\,(k=1, 2, 3, \cdots, n)$의 모든 원소들의 합을 S_k라고 할 때, $S_1+S_2+\cdots+S_n$의 값을 구하시오. [4점]

5. A, B 두 사람이 서로 다른 4개의 동아리 중에서 2개씩 가입 하려고 한다. A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개 이하가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 가입 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

6. 어느 학교의 학급 대항 체육대회는 탁구, 농구, 배드민턴, 마라톤의 순서로 경기가 진행된다. 다음은 학급대표 선수를 네 경기에 배정하는 규칙이다.

> [규칙1] 모든 선수들을 적어도 한 경기에 배정한다.
> [규칙2] 경기에 배정된 선수는 바로 다음 경기에는 배정될 수 없다.
> [규칙3] 탁구에 2명, 농구에 3명, 배드민턴에 2명, 마라톤에 3명을 배정한다.

학급대표 선수 A, B, C, D, E, F의 6명을 이 규칙에 따라 네 경기에 배정하는 모든 경우의 수는? (단, 같은 경기에 배정되는 선수들의 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

① 540 ② 570 ③ 600 ④ 630 ⑤ 660

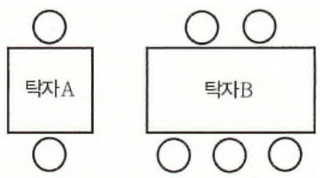
7. A대학교에서는 수시 입학 전형을 위한 입학사정관을 선정하기 위하여 공모한 결과 남자 5명과 여자 3명이 응모하였다. 남녀 혼성으로 4명의 입학사정관을 선정하여 4가지 업무를 한 가지씩 4명에게 모두 배정하는 경우의 수는? [4점]

① 1080 ② 1200 ③ 1320
④ 1440 ⑤ 1560

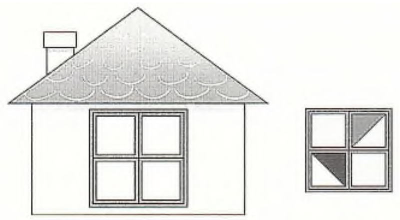
8. 서로 다른 과일 5개를 3그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에는 과일 2개만 담는 경우의 수는? (단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.) [4점]

① 60 ② 65 ③ 70
④ 75 ⑤ 80

9. 탁자 A에서 2명, 탁자 B에서 3명이 분임토의를 하고 있다. 이들 5명이 전체 토의를 하기 위하여 탁자 B의 다섯 자리에 임의로 앉을 때, 탁자 B에서 분임토의 하던 3명은 모두 처음에 앉았던 자리가 아닌 다른 자리에 앉게 되는 경우의 수를 구하시오. [4점]



10. 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 시트지 2장, 빗변의 길이가 $\sqrt{2}a$인 직각이등변삼각형 모양의 시트지 4장이 있다. 정사각형 모양의 시트지의 색은 모두 노란색이고, 직각이등변삼각형 모양의 시트지의 색은 모두 서로 다르다. [그림1]과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 창문 네 개가 있는 집이 있다. [그림2]는 이집의 창문 네 개에 6장의 시트지를 빈틈없이 붙인 경우의 예이다.
이집의 창문 네 개에 시트지 6장을 빈틈없이 붙이는 경우의 수는?
(단, 붙이는 순서는 구분하지 않으며, 집의 외부에서만 시트지를 붙일 수 있다.) [4점]


[그림1] [그림2]

① 432 ② 480 ③ 528
④ 576 ⑤ 624

11. 반지름의 길이와 색이 모두 다른 나무 원판 5개가 있다. 5개의 원판의 중심이 일치하도록 원판을 쌓으려고 한다. 그림은 위에서 내려다봤을 때 원판 2개가 보이도록 원판 5개를 쌓은 한 가지 예이다. 이와 같이 위에서 내려다봤을 때 원판 2개가 보이도록 원판 5개를 쌓는 방법의 수를 구하시오. [4점]

12. 갑은 컴퓨터를 이용하여 2000부터 2999까지의 네 자리 자연수를 을에게 전송하려고 한다. 전송 과정에서 일어날지도 모르는 오류를 을이 확인할 수 있도록 하기 위하여, 갑은 다음 규칙에 따라 전송하는 수의 끝에 숫자 하나를 덧붙여서 다섯 자리 수를 전송한다.

> 네 자리 수의 각 자리의 수의 합이 짝수이면 0, 홀수이면 1을 전송하는 수의 끝에 덧붙인다.

예를 들면, 2026은 20260으로, 2102는 21021로 전송한다.
갑이 전송하기 위하여 끝에 0을 덧붙인 다섯 자리 수 중에서 가운데 세 자리의 각각의 숫자가 모두 다른 경우의 수를 구하시오. [4점]

13. 1부터 $2n$까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 $2n$장의 카드가 있다. 이 중 세 장의 카드를 동시에 뽑을 때, 세 장의 카드에 적힌 수의 합이 짝수가 되도록 뽑는 경우의 수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값은?
(단, $n \geq 2$인 자연수이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$
④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

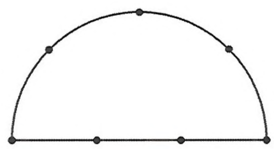
14. 1부터 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수가 k인 경우의 수를 a_k라 하자. 예를 들어, a_{98}은 선택된 4개의 수 중에서 98보다 작은 수가 한 개이고 98보다 큰 수가 2개인 경우의 수이므로 $a_{98}=97$이다. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $a_3 = {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_{97}\mathrm{C}_2$
ㄴ. $a_{10} = a_{90}$
ㄷ. $\sum_{k=2}^{98} a_k = {}_{100}\mathrm{C}_4$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

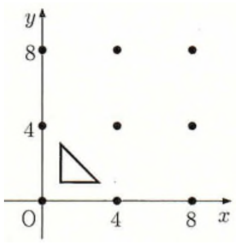
15. 그림과 같이 반원 위에 7개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는? [3점]



① 34 ② 33 ③ 32
④ 31 ⑤ 30

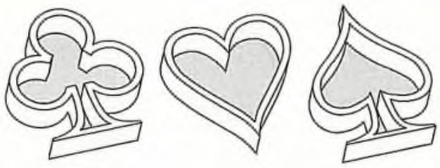
16. 양의 정수 x, y에 대하여 부등식 $(x-2)^2+(y-3)^2<4$를 만족시키는 좌표평면 위의 점에서 임의로 세 점을 선택할 때, 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오. [3점]

17. 좌표평면 위에 9개의 점 (i, j) $(i=0, 4, 8,\ j=0, 4, 8)$이 있다. 이 9개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형 중에서 내부에 세 점 $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 포함하는 사각형의 개수는? [4점]

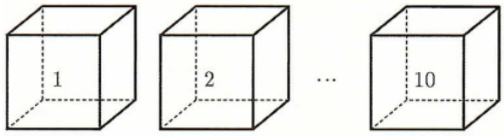


① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

18. 그림과 같이 서로 다른 3개의 상자에 같은 종류의 초콜릿 10개를 넣으려고 한다. 모든 상자에 한 개 이상의 초콜릿을 넣을 때, 초콜릿을 넣는 방법의 수를 구하시오. [4점]



19. 1부터 10까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 10개의 상자가 있다. 똑같은 구슬 3개를 상자에 넣는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 상자에 들어가는 구슬의 개수에는 제한이 없다.) [3점]



20. 같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.) [3점]

① 330 ② 315 ③ 300
④ 285 ⑤ 270

21. $(a+b+c)^4(x+y)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하시오. [4점]

22. 방정식 $x+y+z=20$을 만족시키는 양의 정수 중 짝수인 x, y, z에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오. [3점]

23. 방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 -1이상의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [3점]

① 21 ② 28 ③ 36
④ 45 ⑤ 56

24. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

(가) a, b, c, d중에서 홀수의 개수는 2이다.
(나) $a+b+c+d=12$

① 108 ② 120 ③ 132
④ 144 ⑤ 156

25. 자연수 n에 대하여 $abc=2^n$을 만족시키는 1보다 큰 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수가 28일 때, n의 값을 구하시오. [4점]

26. 다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=20$
(나) $a,\ b,\ c$는 모두 d의 배수이다.

27. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $x,\ y,\ z,\ w$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x+y+z+w=18$
(나) $x,\ y,\ z,\ w$ 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

28. 서로 구별되지 않는 공 10개를 A, B, C 3명에게 남김없이 나누어 주려고 한다. A가 공을 3개만 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 1개의 공도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)
[3점]

29. 어느 상담 교사는 월요일, 화요일, 수요일 3일 동안 학생 9명과 상담하기 위하여 상담 계획표를 작성하려고 한다.

[상담 계획표]

요일	월요일	화요일	수요일
학생 수(명)	a	b	c

상담 교사는 각 학생과 한 번만 상담하고, 요일별로 적어도 한 명의 학생과 상담한다. 상담 계획표에 학생 수만을 기록할 때, 작성할 수 있는 상담 계획표의 가짓수를 구하시오.

(단, $a,\ b,\ c$는 자연수이다.) [4점]

30. 10명의 순경이 세 구역을 순찰하려고 한다. 각 구역에는 적어도 한 명이 순찰하고, 각 구역의 순찰 인원은 5명 이하가 되도록 인원수를 정하는 경우의 수는? (단, 한 명의 순경은 하나의 구역만 순찰하고, 순경은 서로 구분하지 않는다.) [4점]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

31. 빨간색, 파란색, 노란색 색연필이 있다. 각 색의 색연필을 적어도 하나씩 포함하여 15개 이하의 색연필을 선택하는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 색의 색연필은 15개 이상씩 있고, 같은 색의 색연필은 서로 구별이 되지 않는다.) [4점]

32. $\mathrm{X}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 $\mathrm{Y}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$로의 함수 중에서 $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) \geq f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

33. 다음 조건을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 모든 순서 쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는? [4점]

> (가) 세 수 a, b, c의 합은 짝수이다.
> (나) $a \leq b \leq c \leq 15$

① 320 ② 324 ③ 328
④ 332 ⑤ 336

34. 연립방정식

$$\begin{cases} x+y+z+3w=14 \\ x+y+z+w=10 \end{cases}$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는? [4점]

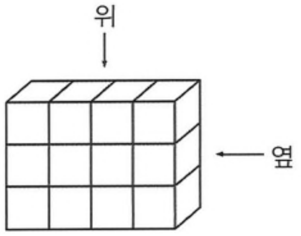
① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

35. 흰 색 탁구공 8개와 주황색 탁구공 7개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 흰색 탁구공과 주황색 탁구공을 각각 한 개 이상 갖도록 나누어 주는 경우의 수는? [4점]

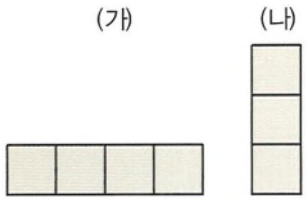
① 295 ② 300 ③ 305
④ 310 ⑤ 315

36. 네 종류의 사탕 중에서 15개를 선택하려고 한다. 초콜릿사탕은 4개 이하, 박하사탕은 3개 이상, 딸기사탕은 2개 이상, 버터사탕은 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 각 종류의 사탕은 15개 이상씩 있다.) [4점]

37. 다음 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.

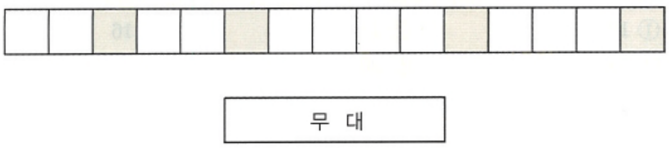


이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는? [4점]



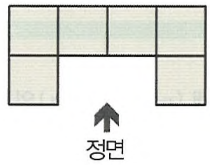
① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54

38. 어느 공연장에 15개의 좌석이 일렬로 배치되어 있다. 이 좌석 중에서 서로 이웃하지 않도록 4개의 좌석을 선택하려고 한다. 예를 들면, 아래 그림의 색칠한 부분과 같이 좌석을 선택한다.

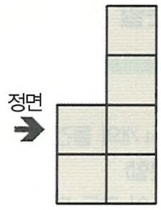


이와 같이 좌석을 선택하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 좌석을 선택하는 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

39. 크기가 같은 정육면체 모양의 블록 12개를 모두 사용하여 쌓은 입체도형을 만들려고 한다. 이 도형을 위에서 내려다 본 모양이 [그림 1], 정면을 기준으로 오른쪽 옆에서 본 모양이 [그림 2]와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오.
(단, 블록은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

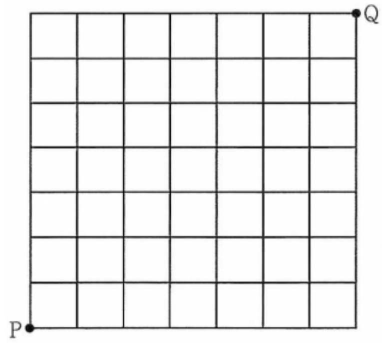


[그림 1]



[그림 2]

40. 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망이 있다.



P지점에서 출발하여 Q지점까지 도로를 따라 최단거리로 갈 때, 도중에 방향을 바꾸는 횟수가 x번인 경로의 수를 $f(x)$라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $f(1)=2$
ㄴ. $f(2)=f(12)$
ㄷ. $f(x)$의 최댓값은 $f(7)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

41. 검은 바둑돌 ●과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타날 수 있는 유형은 다음과 같이 4가지이다.

●●	●○	○●	○○
<A형>	<B형>	<C형>	<D형>

예를 들어, 6개의 바둑돌을 <A형> 2번, <B형> 1번, <C형> 1번, <D형> 1번이 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 아래와 같이 5이다.

●●○○●●
○●●●○○
○○●●●○
●●●○○●
●○○●●●

10개의 바둑돌을 <A형> 4번, <B형> 2번, <C형> 2번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구하시오.
(단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.) [4점]

1. 정답 60

1학년 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

2학년 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 ${}_6C_4 \times {}_4C_3 = 15\times4 = 60$

2. 정답 ④

열쇠 9개를 A_1, A_2, A_3, A_4,B_1, B_2, B_3, C_1, C_2라고 한다면 A와 B자물쇠가 모두 열리고 C는 열리지 않도록 선택하는 방법은 다음과 같다.

(ⅰ) 자물쇠 A를 열 수 있는 열쇠 2개와 자물쇠 B를 열 수 있는 열쇠 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_3C_1 = 18$(가지)

(ⅱ) 자물쇠 A를 열 수 있는 열쇠 1개와 자물쇠 B를 열 수 있는 열쇠 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 12$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $18+12=30$(가지)

3. 정답 20

(ⅰ) [블록2]를 1개 사용하는 경우

[블록2]를 1개 사용하면 남는 부분을 [블록1]로 채워 넣어야하므로 [블록1]을 5개 사용하여야 한다.

즉, 총 6개의 자리 중 [블록2]가 들어갈 자리 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_1 = 6$

(ⅱ) [블록2]를 2개 사용하는 경우

[블록2]를 2개 사용하면 [블록1]을 3개 사용하여야 한다.

즉, 총 5개의 자리 중 [블록2]가 들어갈 자리 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

(ⅱ) [블록2]를 3개 사용하는 경우

[블록2]를 3개 사용하면 [블록1]을 1개 사용하여야 한다.

즉, 총 4개의 자리 중 [블록2]가 들어갈 자리 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 $6+10+4=20$(가지)

[다른 풀이]

가로의 길이가 1인 정육면체와 가로의 길이가 2인 정육면체로 가로의 길이가 7을 만들 수 있는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 1, 1, 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{5!} = 6$(가지)

(ⅱ) 1, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!3!} = 10$(가지)

(ⅲ) 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} = 4$(가지)

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 $6+10+4=20$(가지)

4. 정답 105

집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 -2를 포함하는 원소가 세 개인 부분집합의 개수는 ${}_6C_2 = 15$

A_1, A_2, $\cdots$, A_n의 원소의 총 개수가 $3n$이므로 -2는 15개다.

다른 6개의 원소에 대해서도 같은 방법으로 생각하면 모두 15번 더해진다.

따라서 $S_1+S_2+\cdots+S_7 = 15(-2-1+1+2+3+4) = 105$

5. 정답 30

(ⅰ) A와 B가 공통으로 가입한 동아리가 0개인 경우 ${}_4C_2 \times {}_2C_2 = 6$(가지)

(ⅱ) A와 B가 공통으로 가입한 동아리가 1개인 경우 ${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 24$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $6+24=30$(가지)

[다른 풀이]

A, B두 사람이 동아리에 가입하는 모든 방법의 수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$(가지) A와 B가 공통으로 가입한 동아리가 2개인 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$(가지) 따라서 A와 B가 공통으로 가입한 동아리가 1개 이하인 경우의 수는

$36-3=30$(가지)

6. 정답 ⑤

[규칙3]에서 탁구에 2명, 농구에 3명, 배드민턴에 2명, 마라톤에 3명을 배정하는 경우 다음과 같은 예를 들어 분류한다.

(ⅰ) 탁구 A, B를 농구에 C, D, E를 배정하면 배드민턴에 A, F또는 B, F를 배정하고 B, C, D, E또는 A, C, D, E중에서 3명을 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_2 \times {}_4C_3 \times 2 \times {}_4C_3 = 480$(가지)

(ⅱ) 탁구 A, B를 농구에 C, D, E를 배정하면 배드민턴에 A, B를 배정하고 마라톤에 F는 반드시 포함하고 C, D, E중에서 2명을 선택하는 경우의 수는
$_6C_2 \times {}_4C_3 \times 1 \times {}_3C_2 = 180$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $480 + 180 = 660$(가지)

[다른 풀이]

6명을 배정하는 모든 경우의 수는

$$_6C_2 \times {}_4C_3 \times {}_3C_2 \times {}_4C_3 = 720\text{(가지)}$$

배정되지 않는 선수가 있는 경우의 수는

$$_6C_2 \times {}_4C_3 \times {}_2C_2 \times {}_3C_3 = 60\text{(가지)}$$

따라서 구하는 경우의 수는 $720 - 60 = 660$(가지)

7. 정답 ⑤

남녀 혼성으로 4명의 입학사정관을 선정하여 4가지 업무를 한 가지씩 4명에게 모두 배정하는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 남자 3명, 여자 1명인 경우의 수는

$$_5C_3 \times {}_3C_1 \times 4! = 720$$

(ⅱ) 남자 2명, 여자 2명인 경우의 수는

$$_5C_2 \times {}_3C_2 \times 4! = 720$$

(ⅲ) 남자 1명, 여자 3명인 경우의 수는

$$_5C_1 \times {}_3C_3 \times 4! = 120$$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$$720 + 720 + 120 = 1560$$

8. 정답 ⑤

서로 다른 과일 5개 중 그릇 A에 담을 과일 2종류를 선택하는 경우의 수는 $_5C_2 = 10$

이 각각에 대하여 나머지 서로 다른 과일 3개를 나머지 두 B, C그릇에 담는 경우의 수는 $_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

따라서 구하는 경우의 수는 $_5C_2 \times {}_2\Pi_3 = 10 \times 8 = 80$

[다른 풀이]

(ⅰ) B에만 3개의 과일을 담은 경우
5개의 과일 중 3개의 과일을 B에 담은 경우의 수는

$$_5C_3 = 10$$

(ⅱ) B에 2개, C에 1개의 과일을 담은 경우
5개의 과일 중 2개를 골라 B에 담고 남은 3개 중 1개의 과일을 C에 담은 경우의 수는

$$_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$$

(ⅲ) B에 1개, C에 2개의 과일을 담은 경우
5개의 과일 중 1개를 골라 B에 담고 남은 4개 중 2개의 과일을 C에 담은 경우의 수는

$$_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$$

(ⅳ) C에만 3개의 과일을 담은 경우
5개의 과일 중 3개의 과일을 C에 담은 경우의 수는

$$_5C_3 = 10$$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는
$10 + 30 + 30 + 10 = 80$

9. 정답 64

(ⅰ) 한 명만이 탁자 B의 3명이 앉았던 자리 내에서 옮겨 앉는 경우의 수는 $_3C_1 \times 2 \times (2! \times 2!) = 24$

(ⅱ) 두 명만이 탁자 B의 3명이 앉았던 자리 내에서 옮겨 앉는 경우의 수는
$_3C_2 \times 3 \times (3! - 2!) = 9 \times (6 - 2) = 36$

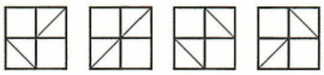
(ⅲ) 세 명이 모두 탁자 B의 3명이 앉았던 자리 내에서 옮겨 앉는 경우의 수는 $2 \times 2! = 4$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우는 수는 $24 + 36 + 4 = 64$

10. 정답 ④

정사각형 모양의 노란색 시트지 2장을 창문 네 개 중 두 개를 택하여 붙이는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합이므로 $_4C_2$

나머지 창문 2개를 직각이등변삼각형 모양으로 각각 나누는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

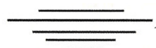


나누어진 네 개의 영역에 직각이등변삼각형 모양의 시트지 4장을 붙이는 경우의 수는 4!이므로 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $_4C_2 \times 4 \times 4! = 576$

11. 정답 50

가장 큰 원판을 A라 할 때, A 위에 원판이 1개, 2개, 3개, 4개 놓이는 경우로 나눠 각각의 경우의 수를 구한다.

(ⅰ) A 위에 원판이 1개 있는 경우



A

A 위에 놓일 원판을 고르는 경우의 수는 $_4C_1$이고 A 아래 나머지 원판을 나열하는 경우의 수는 3!이므로 구하는 경우의 수는

$$_4C_1 \times 3! = 4 \times 6 = 24$$

(ⅱ) A 위에 원판이 2개 있는 경우

A

A 위에 놓일 2개의 원판을 고르는 경우의 수는 $_4C_2$이고 둘 중 큰 원판이 위로 가야하므로 순서는 결정이 되어 있다.
A 아래 나머지 원판을 나열하는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

(iii) A 위에 원판이 3개 있는 경우

A 위에 놓일 3개의 원판을 고르는 경우의 수는 ${}_4C_3$이고 이중 가장 큰 원판이 맨 위로 와야 하고 나머지 원판은 자리를 바꿀 수 있으므로 2!가지 경우이므로 구하는 경우의 수는

$${}_4C_3 \times 2! = 4 \times 2 = 8$$

(iv) A위에 원판이 4개 있는 경우

A 위에 놓일 4개의 원판을 고르는 경우의 수는

$${}_4C_4 \times 3! = 1 \times 6 = 6$$

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는 $24+12+8+6=50$

12. 정답 360

갑이 전송하기 위하여 끝에 0을 덧붙였으므로 네 자리의 수를 $2abc$라 하면 $2+a+b+c$가 짝수가 되어야 하므로 가운데 세 자리의 수의 합이 짝수가 되어야 한다.
즉 $a+b+c$가 짝수이어야 한다.(단, a, b, c는 0부터 9까지의 서로 다른 정수)
이때 $a+b+c$가 짝수인 경우는 (짝, 짝, 짝), (홀, 홀, 짝)인 경우이다.

(i) 각 자리의 수가 모두 짝수인 경우
0, 2, 4, 6, 8 중에서 3개를 뽑아 나열하는 경우의 수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

(ii) 각 자리의 수 중 한 개는 짝수이고 두 개는 홀수인 경우
0, 2, 4, 6, 8 중에서 1개를 뽑고 1, 3, 5, 7, 9 중 두 개를 뽑아 나열하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_5C_2 \times 3! = 300$$

따라서 구하는 경우의 수는 $60+300=360$

13. 정답 ②

$2n$장의 카드에서 세 장의 카드를 동시에 뽑을 때,
세 장의 카드에 적힌 수의 합이 짝수인 경우는 (세 수 모두 짝수인 경우)와 (세 수 중 두 수는 홀수이고 나머지 한 수는 짝수인 경우)가 있다.

(i) 세 수가 모두 짝수인 경우
짝수 n개 중 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

(ii) 세 수 중 두수는 홀수이고 나머지 한 수는 짝수인 경우
홀수 n개 중 2개를 택하고 짝수 n개 중 한 개를 택하는 경우의 수는

$${}_nC_2 \times {}_nC_1 = \frac{n(n-1)}{2!} \times n = \frac{n^2(n-1)}{2!}$$

(i), (ii)에서

$$a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n^2(n-1)}{2}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2+3n)}{6}$$
$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{3n^3}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{3}$$
$$= \frac{2}{3}$$

14. 정답 ③

1부터 100까지의 자연수 중 k보다 작은 자연수의 개수는 $(k-1)$개, k보다 큰 자연수의 개수는 $(100-k)$개다.

$\underline{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1,}$ $\boxed{k}$, $\underline{k+1,\ \cdots,\ 99,\ 100}$

$(k-1)$개 중 1개를 선택하는 경우의 수 ${}_{k-1}C_1$ / $(100-k)$개 중 2개를 선택하는 경우의 수 ${}_{100-k}C_2$

$\therefore\ a_k = {}_{k-1}C_1 + {}_{100-k}C_2\ \ (2 \le k \le 98)$

ㄱ.

$\underline{1,\ 2,}$ $\boxed{3}$, $\underline{4,\ \cdots,\ 99,\ 100}$

2개 중 1개를 선택하는 경우의 수 ${}_2C_1$ / 97개 중 2개를 선택하는 경우의 수 ${}_{97}C_2$

a_3은 선택된 4개의 수 중에서 3보다 작은 수가 한 개이고 3보다 큰 수가 2개인 경우의 수는

$$a_3 = {}_2C_1 \times {}_{97}C_2 \text{ [참]}$$

ㄴ. $a_{10} = {}_9C_1 \times {}_{90}C_2 = 9 \times \frac{90 \times 89}{2} = 9 \times 89 \times 45$

$a_{90} = {}_{89}C_1 \times {}_{10}C_2 = 89 \times \frac{10 \times 9}{2} = 9 \times 89 \times 5$

$\therefore\ a_{10} \ne a_{90}$ [거짓]

ㄷ. $\sum_{k=2}^{98} a_k = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{98}$

이때 a_k의 정의에 의해
a_2은 1부터 100까지의 자연수 중에서 4개의 수를 선택할 때,
4개의 수 중에서 2번째로 작은 수가 2인 경우의 수,
a_3은 4개의 수 중에서 2번째로 작은 수가 3인 경우의 수,
a_4은 4개의 수 중에서 2번째로 작은 수가 4인 경우의 수

⋮

a_{98}은 4개의 수 중에서 2번째로 작은 수가 98인 경우의 수를 나타낸다. 결국 $a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{98}$은 1부터 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 4개의 수 중에서 2번째로 작은 수가 2, 3, 4, ⋯, 98인 경우의 수를 나타내므로 1부터 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택하는 전체 경우의 수이다.

$\therefore \ \sum_{k=2}^{98} a_k = {}_{100}\mathrm{C}_4$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15. 정답 ④

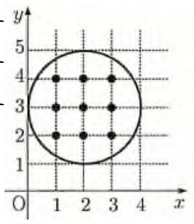
7개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는 7개의 점 중 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_7\mathrm{C}_3=35$

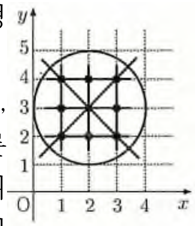
한 직선 위의 세 점을 고른 경우 삼각형이 되지 않으므로 반원의 지름 위의 네 점 중 세 점을 고르는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$뺀다.

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$35-4=31$

16. 정답 76





원 내부의 점 중에서 x, y의 값이 모두 정수인 점 9개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는 9개의 점 중 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_9\mathrm{C}_3=84$

한 직선 위의 세 점을 고른 경우 삼각형이 되지 않다.

직선 $x=1$, $x=2$, $x=3$, $y=2$, $y=3$, $y=4$ 중 한 직선 위에서 세 점을 고른 경우, 오른쪽 그림과 같이 한 대각선 위의 세 점을 고른 경우에 삼각형이 되지 않는다.

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$84-8=76$

17. 정답 ②

사각형은 네 개의 꼭짓점으로 이뤄지고 이 중 원점 O를 반드시 포함해야 하므로 나머지 세 꼭짓점을 결정한다.

원점 O와 연결된 변의 꼭짓점을 결정하는 경우의 수

두 점 $(4,0), (8,0)$중에서 한 개를 선택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$

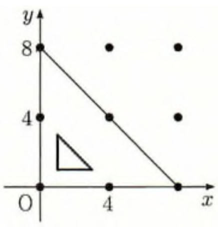
두 점 $(0,4), (8,0)$중에서 한 개를 선택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$

네 점 $(4,4), (4,8), (8,4), (8,8)$중에서 한 개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1$

따라서 꼭짓점을 선택하는 방법의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=16$

네 점 $(0,0), (8,0), (4,4), (0,8)$을 꼭짓점으로 선택하면 오른쪽 그림과 같이 삼각형이 된다.

따라서 구하는 사각형의 개수는 $16-1=15$



[다른 풀이]

점 (i,j)를 P_{ij}로 대응하면 삼각형 $\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_{31}\mathrm{P}_{13}$을 포함하는 사각형은 $\mathrm{P}_{00}, \mathrm{P}_{40}, \mathrm{P}_{44}, \mathrm{P}_{04}$를 포함한다.

(ⅰ) $\mathrm{P}_{00}, \mathrm{P}_{04}, \mathrm{P}_{40}$을 꼭짓점으로 가지는 사각형의 개수는 4

(ⅱ) $\mathrm{P}_{00}, \mathrm{P}_{04}, \mathrm{P}_{80}$을 꼭짓점으로 가지는 사각형의 개수는 4

(ⅲ) $\mathrm{P}_{00}, \mathrm{P}_{08}, \mathrm{P}_{40}$을 꼭짓점으로 가지는 사각형의 개수는 4

(ⅳ) $\mathrm{P}_{00}, \mathrm{P}_{08}, \mathrm{P}_{80}$을 꼭짓점으로 가지는 사각형의 개수는 3

따라서 구하는 사각형의 개수는 $4+4+4+3=15$

18. 정답 36

각 상자에 미리 한 개씩 넣고 나머지 7개를 배열하는 방법의 수는 서로 다른 3종류의 상자에 중복을 허락하여 7개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

[다른 풀이]

서로 다른 3개의 상자에 넣는 초콜릿의 개수를 각각 x, y, z라 하면 $x+y+z=10$인 양의 정수해의 개수를 구하면

$x=x'+1, y=y'+1, z=z'+1$로 놓으면

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=10$

$x'+y'+z'=7$의 음이 아닌 정수해이므로

따라서 구하는 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

19. 정답 220

서로 다른 10개의 상자에서 중복을 허락하여 3개의 상자를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 10개 중 중복을 허락하여 3개를 뽑는 경우의 수와 같다.

${}_{10}\mathrm{H}_3 = {}_{10+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$

[다른 풀이]

$i\,(1 \le i \le 10)$가 적힌 상자에 x_i개의 구슬을 넣는다고 하면 구하는 방법의 수는 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{10}=3$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는 ${}_{10}\mathrm{H}_3 = 220$

20. 정답 ⑤

(ⅰ) 같은 주스 4병을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$\quad {}_3\mathrm{H}_4 = {}_{3+(4-1)}\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$

(ⅱ) 같은 생수 2병을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$\quad {}_3\mathrm{H}_2 = {}_{3+(2-1)}\mathrm{C}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$

(ⅲ) 우유 1병을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$\quad {}_3\mathrm{H}_1 = {}_{3+(1-1)}\mathrm{C}_1 = {}_3\mathrm{C}_1 = 3$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 주스를 나눠 주는 것, 생수를 나눠 주는 것, 우유를 나눠 주는 것은 동시에 일어나므로 곱의 법칙에 의해 $15\times6\times3=270$

21. 정답 60

$(a+b+c)^4(x+y)^3$의 전개식에서 $(a+b+c)^4$, $(x+y)^3$이 동류항을 가지고 있지 않으므로 서로 다른 항의 개수는 $(a+b+c)^4$의 서로 다른 항의 개수와 $(x+y)^3$의 서로 다른 항의 개수의 곱과 같다.

(ⅰ) $(a+b+c)^4$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 세 문자 a, b, c에서 중복을 허락하여 4개를 선택하는 방법의 수 ${}_3\mathrm{H}_4 = {}_{3+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$

(ⅱ) $(x+y)^3$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 두 문자 x, y에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 방법의 수는 ${}_2\mathrm{H}_3 = {}_{2+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_4\mathrm{C}_3 = {}_4\mathrm{C}_1 = 4$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는 $15\times4=60$

22. 정답 36

$x=2l,\ y=2m,\ z=2n$(단, l, m, n은 자연수)라 하면

$x+y+z=20$에서 $2l+2m+2n=20$

즉 $l+m+n=10$(단, l, m, n은 자연수)

$l=a+1,\ m=b+1,\ n=c+1$로 놓으면

$a+b+c=7$(단, a, b, c는 음이 아닌 정수)

방정식 $a+b+c=7$의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 a, b, c에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_7 = {}_{3+(7-1)}\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_2 = 36$

23. 정답 ③

$x'=x+1,\ y'=y+1,\ z'=z+1$로 놓으면 x, y, z가 -1 이상의 정수이므로 x', y', z'은 0이상의 정수이다.

이때 주어진 방정식에 대입하면

$(x'-1)+(y'-1)+(z'-1)=4$

$\therefore\ x'+y'+z'=7$

$x'+y'+z'=7$를 만족하는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_2 = 36$

24. 정답 ②

네 자연수 a, b, c, d중 홀수가 2개인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$

a, b, c, d 중 두 홀수를 $2x+1, 2y+1$, 두 짝수를 $2z+2, 2w+2$라 하면 (단, x, y, z, w는 음이 아닌 정수)

$(2x+1)+(2y+1)+(2z+2)+(2w+2)=12$

$\therefore\ x+y+z+w=3$

이때 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_3 = {}_{4+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = 20$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $6\times20=120$

25. 정답 9

자연수 n에 대하여 $abc=2^n$을 만족시키는 1보다 큰 자연수 a, b, c는 2^p(p는 자연수)꼴이므로 $a=2^x,\ b=2^y,\ c=2^z$(x, y, z는 자연수)이라 하면

$abc=2^n$에서 $2^{x+y+z}=2^n$

$\therefore\ x+y+z=n$

$x+y+z=n$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍은

$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1$이라 하면

$x'+y'+z'=n-3$(단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)

이때 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 x, y, z3개 중 중복을 허락하여 $(n-3)$개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_{n-3} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3} = {}_{n-1}\mathrm{C}_2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = 28$

$(n-1)(n-2)=56, n^2-3n-54=0$

$(n+6)(n-9)=0 \quad \therefore\ n=9\,(\because\ n \ge 1)$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 9

26. 정답 32

조건 (나)에서 $a,\ b,\ c$가 모두 s의 배수이면 $a+b+c+d$도 d의 배수이다. 즉 $a=dp,\ b=dq,\ c=dr$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)라 하면 조건 (가)에서 $dp+dq+dr+d=20$, $d(p+q+r+1)=20$

$20=2^2\times5$이므로 $d\,$(2이상 자연수)가 될 수 있는 값은 2, 4, 5

(ⅰ) $d=2$일 때, $a=2p,\ b=2q,\ c=2r$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면 $2p+2q+2r+2=20$

$p+q+r=9$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$의 개수가 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수와 같으므로

$\quad {}_3\mathrm{H}_{9-3} = {}_8\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_2 = 28$

(ⅱ) $d=4$일 때, $a=4p$, $b=4q$, $c=4r$(단, p, q, r은 자연수)로 놓으면 $4p+4q+4r+4=20$
$p+q+r=4$(단, p, q, r은 자연수)를 만족시키는 순서쌍 (p, q, r)의 개수가 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같으므로 ${}_3H_{4-3}={}_3C_1=3$
(ⅲ) $d=5$일 때, $a=5p$, $b=5q$, $c=5r$(단, p, q, r은 자연수)로 놓으면 $5p+5q+5r+5=20$
$p+q+r=3$ (단, p, q, r은 자연수)를 만족시키는 순서쌍 (p, q, r)의 개수가 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같으므로 1
(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $28+3+1=32$

[다른풀이]
조건 (나)에서 a, b, c가 모두 d의 배수이면
$a=d(a'+1)$, $b=d(b'+1)$, $c=d(c'+1)$
(단, a', b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면
조건 (가)에 의하여 $d(a'+b'+c'+4)=20$
이때, $a'+b'+c' \geq 4$, $d \geq 2$이므로 $20=2^2\times5$에서 d가 될 수 있는 값은 2, 4, 5
(ⅰ)$d=2$일 때, $a'+b'+c'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍의 개수는 ${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$
(ⅱ)$d=4$일 때, $a'+b'+c'=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍의 개수는 ${}_3H_1={}_3C_1=3$
(ⅲ)$d=5$일 때,$a'+b'+c'=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍의 개수는 ${}_3H_0=1$
(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $28+3+1=32$

27. 정답 210

(나)에서 자연수 x, y, z, w 중 3으로 나눈 나머지가 1인 수 2개를 선택하고 3으로 나눈 나머지가 2인 수 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2=6$

x, y가 3으로 나눈 나머지가 1인 수,
z, w는 3으로 나눈 나머지가 2인 수라 하면
$x=3x'+1$, $y=3y'+1$, $z=3z'+2$, $w=3w'+2$…… ㉠
(단,x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)
조건(가)에서 $x+y+z+w=18$에 ㉠을 대입하면

$(3x'+1)+(3y'+1)+(3z'+2)+(3w'+2)=18$
$x'+y'+z'+w'=4$
…… ㉡

이때 ㉡을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 4개의 문자 x', y', z', w'에서 4개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4=35$

따라서 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 $6\times35=210$

28. 정답 8

서로 구별되지 않는 공 10개 중 A가 세 개의 공을 받으므로 남는 공의 수는 7이다.
따라서 7개의 공을 B, C 두 사람에게 나누어 주는 경우의 수이므로 ${}_7H_2={}_{2+7-1}C_7={}_8C_7=8$

29. 정답 28

월요일, 화요일, 수요일에 상담하는 학생 수가 각각 a, b, c명이고 3일 동안 상담하는 학생 수는 모두 9명이므로 $a+b+c=9$
이때 각 요일별로 적어도 한 명의 학생과 상담해야 하므로
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$이라 하면
$a'+b'+c'=6$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다. 따라서 각 요일별로 상담 계획표의 가짓수는

$${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2}=28$$

[다른풀이]
구하는 가짓수는 9를 3개의 자연수로 분할하고 각각 a, b, c에 배정하는 경우의 수와 같다.
(ⅰ) (1, 1, 7)로 분할할 때,
1명, 1명,7명을 월요일, 화요일, 수요일에 각각 배정하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$
(ⅱ)(1, 2, 6)로 분할할 때,
1명, 2명,6명을 월요일, 화요일, 수요일에 각각 배정하는 경우의 수는 $3!=6$
(ⅲ)(1, 3, 5)로 분할할 때,
1명, 3명, 5명을 월요일, 화요일, 수요일에 각각 배정하는 경우의 수는 $3!=6$
(ⅳ)(1, 4, 4)로 분할할 때,
1명, 4명, 4명을 월요일, 화요일, 수요일에 각각 배정하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$
(ⅴ)(2, 2, 5)로 분할할 때,
2명, 2명, 5명을 월요일, 화요일, 수요일에 각각 배정하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$
(ⅵ)(2, 3, 4)로 분할할 때,
2명, 3명, 4명을 월요일, 화요일, 수요일에 각각 배정하는 경우의 수는 $3!=6$
(ⅶ)(3, 3, 3)로 분할할 때,
3명, 3명, 3명을 월요일, 화요일, 수요일에 각각 배정하는 경우의 수는 1
따라서 구하는 가짓수는 $3+6+6+3+3+6+1=28$

30. 정답 ②

각 구역을 순찰하는 순경의 인원수를 x, y, z라 하면, $x+y+z=10$ $(1 \le x,\ y,\ z \le 5)$인 정수해의 경우의 수를 구하면 된다.

이때 각 구역에는 적어도 한 명의 순경이 순찰해야 하므로

$$x=a+1,\ y=b+1=,\ z=c+1$$

(단, a, b, c는 음이 아닌 정수)

이라 하면

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)=10$$

즉, $a+b+c=7$이므로 가능한 모든 경우의 수는

$$_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$$

이때 각 구역의 순찰인원이 5명 이하가 되어야 하므로 a, b, c 중 어느 하나가 5이상이 되는 경우를 뺀다.

(ⅰ) a가 5가 되는 경우($a=5,\ b+c=2$)

남은 두 구역에 중복을 허락하여 2명을 배치하게 되므로 경우의 수는 $_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

(ⅱ) a가 6이 되는 경우($a=6,\ b+c=1$)

남은 두 구역에 중복을 허락하여 1명을 배치하게 되므로 경우의 수는 $_2\mathrm{C}_1=2$

(ⅲ) a가 7이 되는 경우 ($a=7,\ b+c=0$)

남은 두 구역에 추가로 배치될 순경이 없으므로 1가지

즉 b, c에 대해서도 동일하므로 a, b, c 중 어느 하나가 5이상이 되는 경우의 수는 $3(3+2+1)=18$

따라서 구하는 방법의 수는 $36-18=18$

31. 정답 455

선택하는 빨간색, 파란색, 노란색 색연필의 개수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c \le 15$이고 a, b, c는 적어도 하나씩 포함되므로 양의 정수이어야 한다.

먼저 빨간색, 파란색, 노란색 색연필을 각각 1개씩 선택하면 필요한 색연필의 개수를 각각 $a-1$, $b-1$, $c-1$이 되고 이것을 각각 a', b', c'이라 하면 전체 색연필의 개수는 15개 이하이므로 $3 \le a+b+c \le 15$ $a'+b'+c' \le 12$ (a', b', c'는 음이 아닌 정수)가 된다.

$a'+b'+c'=0$ 일 때, $_3\mathrm{H}_0={}_{3+0-1}\mathrm{C}_0={}_2\mathrm{C}_0$

$a'+b'+c'=1$ 일 때, $_3\mathrm{H}_1={}_{3+1-1}\mathrm{C}_0={}_3\mathrm{C}_1$

$a'+b'+c'=2$ 일 때, $_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2$

$$\vdots$$

$a'+b'+c'=12$ 일 때, $_3\mathrm{H}_{12}={}_{3+12-1}\mathrm{C}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_{12}$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}&{}_3\mathrm{H}_0+{}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_2+\cdots+{}_3\mathrm{H}_{12}\\&={}_2\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{14}\mathrm{C}_{12}\\&={}_2\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{14}\mathrm{C}_2\\&={}_{15}\mathrm{C}_3=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}=455\end{aligned}$$

[다른 풀이]

부등식 $a'+b'+c' \le 12$를 $a'+b'+c'+d'=12$ (d는 음이 아닌 정수)로 변형하면 d의 값의 변화에 따라 $a'+b'+c'$의 값이 0부터 12까지 변하게 되므로 같은 상황임을 알 수 있다.

따라서 총 방법의 수는

$$_4\mathrm{H}_{12}={}_{4+(12-1)}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_3=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}=455$$

새로운 변수 d를 하나 사용함으로써 $_3\mathrm{H}_0+{}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_2+\cdots+{}_3\mathrm{H}_{12}$를 모두 계산해야 했던 것을 $_4\mathrm{H}_{12}={}_{4+(12-1)}\mathrm{C}_{12}$로 간단히 계산할 수 있다.

32. 정답 210

$x_1<x_2$일 때, $f(x_1) \ge f(x_2)$를 만족사면 $f(1) \ge f(2) \ge f(3) \ge f(4)$인 함수이다. 즉 치역의 원소가 결정되면 정의역 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$와의 대응관계가 정해지므로 구하는 함수의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 원소 중에서 중복을 허락하여 4개를 뽑는 중복조합의 수와 같다.

따라서 함수 f의 개수는 $_7\mathrm{H}_4={}_{7+4-1}\mathrm{C}_4={}_{10}\mathrm{C}_4=210$

33. 정답 ⑤

1부터 15가지의 자연수 중 짝수는 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14의 7개이고 홀수는 8개다.

(ⅰ) a, b, c가 모두 짝수인 경우

$a \le b \le c \le 15$를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$_7\mathrm{H}_3={}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$$

(ⅱ) a, b, c 중 1개만 짝수인 경우

$a \le b \le c \le 15$를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

짝수 1개를 선택하는 경우의 수는 $_7\mathrm{C}_1=7$

홀수 8개 중 중복을 허락하여 2개를 선택하는 경우의

수는 $_8\mathrm{H}_2$

선택한 세 수를 크기순으로 나열하는 경우의 수는 1

이므로 $7\times{}_8\mathrm{H}_2\times1=252$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 336

34. 정답 ②

연립방정식 $\begin{cases}x+y+z+3w=14 & \cdots\cdots ㉠\\ x+y+z+w=10 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

에서 ㉠−㉡을 하면 $2w=4$

$\therefore\ w=2$

이것을 ㉠ 또는 ㉡에 대입하면 $x+y+z=8$을 만족하는 음이 아닌 정수 $(x,\ y,\ z,\ 2)$의 순서쌍의 개수는 서로

다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$$

35. 정답 ⑤

(ⅰ) 3명의 학생에게 흰색 탁구공을 각각 x, y, z개씩 나누어 주면

$x+y+z=8$ ($x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$인 자연수)

$x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$

$a+b+c=5$ (a, b, c는 음이 아닌 정수)

즉 흰색 탁구공을 각각 1개씩 나누어 주고 남은 흰색 탁구공 5개를 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$ (가지)

(ⅱ) 3명의 학생에게 주황색 탁구공을 각각 x', y', z'개씩 나누어 주면

$x'+y'+z'=7$ ($x' \ge 1$, $y' \ge 1$, $z' \ge 1$인 자연수)

$x'=a'+1$, $y'=b'+1$, $z'=c'+1$

$a'+b'+c'=4$ (a', b', c'는 음이 아닌 정수)

즉 주황색 탁구공을 각각 1개씩 나누어 주고 남은 주황색 탁구공 4개를 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 경우의 수는 $21\times 15 = 315$

[다른 풀이]

흰색 탁구공 8개와 주황색 탁구공 7개가 있으므로 흰색 탁구공과 주황색 탁구공을 각각 한 개씩 3명의 학생에게 나눠주면 흰색 탁구공은 5개, 주황색 탁구공은 4개가 남는다.

이때 구하는 경우의 수는 흰색 탁구공 5개를 3명의 학생에게 나눠 주는 중복조합의 수와 주황색 탁구공 4개를 3명의 학생에게 나눠주는 중복조합의 수의 곱과 같으므로

$$\begin{aligned} {}_3H_5 \times {}_3H_4 &= {}_{3+5-1}C_5 \times {}_{3+4-1}C_4 = {}_7C_5 \times {}_6C_4 \\ &= 21\times 15 \\ &= 315 \end{aligned}$$

36. 정답 185

선택하는 초콜릿사탕의 개수를 x, 박하사탕의 개수를 y, 딸기사탕의 개수를 z, 버터사탕의 개수를 w라 하면 $x+y+z+w=15$이고 x, y, z, w는 $0 \leqq x \leqq 4$, $y \geqq 3$, $z \geqq 2$, $w \geqq 1$인 정수이다.

$y=b+3$, $z=c+2$, $w=d+1$라 하면 $x+y+z+w=15$에 대입하면 $x+b+c+d=9$($0 \leqq x \leqq 4$인 정수, b, c, d는 음이 아닌 정수)

x의 값에 따라 경우를 나누고 $x+b+c+d=9$에 대입하여 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수를 구한다.

(ⅰ) $x=4$일 때, $b+c+d=5$이므로 음이 아닌 정수해 (b, c, d)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 경우의 수이므로

${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$

(ⅱ) $x=3$일 때, $b+c+d=6$이므로 음이 아닌 정수해 (b, c, d)의 개수는

${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$

(ⅲ) $x=2$일 때, $b+c+d=7$이므로 음이 아닌 정수해 (b, c, d)의 개수는

${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$

(ⅳ) $x=1$일 때, $b+c+d=8$이므로 음이 아닌 정수해 (b, c, d)의 개수는

${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$

(ⅴ) $x=0$일 때, $b+c+d=9$이므로 음이 아닌 정수해 (b, c, d)의 개수는

${}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 구하는 경우의 수는

$21+28+36+45+55=185$

37. 정답 ②

위와 옆에서 보았을 때 모양이 (가), (나)와 같이 되려면 각 가로줄과 각 세로줄에 적어도 하나씩은 검은색 상자가 들어가야 한다.

4개의 유리 상자를 검은색 상자로 바꾸므로 각 가로줄에 검은색 상자가 들어간 개수를 기준으로 나누면

(2개, 1개, 1개), (1개, 2개, 1개), (1개, 1개, 2개)

가로줄 중에서 검은 색 유리 상자를 두 개 포함할 줄을 선택하는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$

이때 가로 줄의 4개의 유리 상자 중 두 개를 검은 색 유리 상자로 바꾸어야 하므로 ${}_4C_2=6$

두 개를 바꾸고 난 후 나머지 두 개의 가로줄과 두 개의 세로줄에 각각 검은 색 유리 상자가 하나씩 포함되도록 선택하는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $3\times 6\times 2=36$

[다른 풀이]

(2개, 1개, 1개)인 경우의 방법의 수를 구하면 검은 색 상자가 2개가 들어간 것부터 먼저 결정하면 1행의 4개의 유리 상자 중 2개를 택해 검은 색 상자로 바꾸는 방법의 수는 ${}_4C_2$

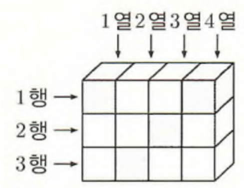
또한 2행의 남은 2개의 유리상자 중 1개를 택해 검은색 상자로 바

꾸는 방법의 수는 2가지이고 3행은 검은색 상자를 바꿔지 않은 열을 바꾸면 되므로 방법의 수는 1가지이다.

즉 방법의 수는 ${}_4C_2\times 2\times 1 = 6\times 2\times 1 = 12$

따라서 (1개, 2개, 1개), (1개, 1개, 2개)마찬가지 방법의 수이므로 구하는 모든 방법의 수는 $12\times 3=36$

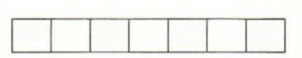
[다른 풀이]



위에서 보았을 때, 각 열에 검은색 유리 상자가 한 개씩 있어야 하므로 각 열에는 검은 색 유리 상자가 한 개씩 포함되고 옆에서 보았을 때, 각 행에는 검은 색 유리 상자가 한 개 이상씩 있어야 하므로 검은 색 유리 상자가 어떤 행 중에는 두 개, 나머지 행에는 한 개씩 포함되어야 한다.
즉 상자 4개를 2개, 1개, 1개의 3개의 그룹으로 나누어 1행, 2행, 3행에 배정하여 검은 색 유리 상자로 바꾸면 구하는 방법의 수는 $\left({}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}\right)\times 3! = 36$

38. 정답 495

먼저 선택된 4개의 좌석이 이웃하지 않도록 7개의 좌석을 배열하면 다음 그림과 같다.



이때 총 15개의 좌석 중 아직 배열되지 않은 8개의 좌석을 5개의 ○으로 표시된 구역에 중복을 허락하여 끼워 넣으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{H}_8 = {}_{5+8-1}\mathrm{C}_8 = {}_{12}\mathrm{C}_8 = {}_{12}\mathrm{C}_4 = 495$

[다른 풀이]

서로 이웃하지 않도록 4개의 좌석을 나열하고 다음 그림에서 색칠된 좌석의 앞 뒤에 올 수 있는 빈 좌석의 개수를 x, y, z, w, t라 하면

x		y		z		w		t

$x+y+z+w+t=11$(단 , $x\geq 0,\ t\geq 0,\ y\geq 1,\ z\geq 1,\ w\geq 1$)
즉, x, t는 음이 아닌 정수이고 y, z, w는 양의 정수이므로
$y=a+1,\ z=b+1,\ w=c+1$라 하면

$x+y+z+w+t=x+(a+1)+(b+1)+(c+1)+t=11$
$\therefore\ x+a+b+c+t=8$
따라서 음이 아닌 정수 x, a, b, c, t의 순서쌍의 개수는
${}_5\mathrm{H}_8 = {}_{5+8-1}\mathrm{C}_8 = {}_{12}\mathrm{C}_8 = {}_{12}\mathrm{C}_4 = 495$

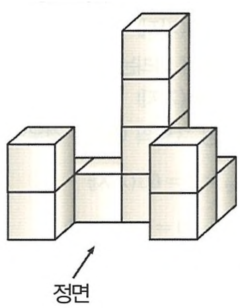
[다른 풀이]

좌석 중에서 서로 이웃하지 않도록 4개의 좌석을 선택하는 경우 우선 빈 좌석 11개의 좌석의 사이사이는 양끝을 포함하여 12개다. (빈 좌석은 구별이 안 되므로 1가지 경우)
따라서 12개의 가능한 틈새 중 4개를 선택하는 경우의 수는

$${}_{12}\mathrm{C}_4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495$$

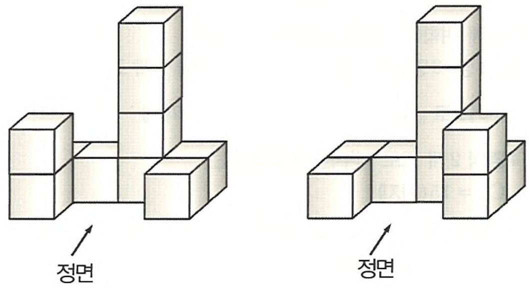
39. 정답 60가지

[그림 1]처럼 1층에는 반드시 블록 6개를 모두 쌓아야 한다. 그 후 나머지 6개를 쌓는 방법은 다음 두 가지 경우로 나눈다.
(ⅰ) 2층 앞줄에 모두 1개씩 쌓는 경우



뒷줄의 네 곳 중 한 곳에 블록 3개를 층층이 쌓고 나머지 세
곳에 블록 1개를 쌓으면 된다.
즉 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1 = 12$

(ⅱ) 2층 앞줄의 두 곳 중 한 곳만 1개를 쌓는 경우

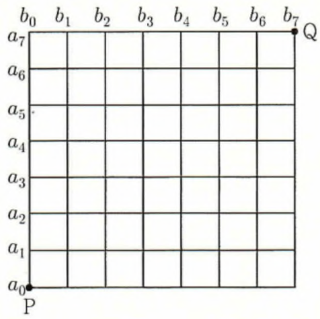


뒷줄의 네 곳 중 한 곳에 블록 3개를 층층이 쌓고 나머지 세 곳에 중복을 허락하여 2곳을 골라 블록을 쌓으면 된다.
즉
${}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{H}_2 = {}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_{3+2-1}\mathrm{C}_{2} = 2\times 4\times{}_4\mathrm{C}_2 = 48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는 $12+48=60$

40. 정답 ⑤

다음 그림과 같이 가로 길을 각각 a_0, a_1, $\cdots$, a_7, 세로 길을 각각 b_0, b_1, $\cdots$, b_7이라 하자.



x의 값에 따라 경로를 구해 보면

(ⅰ) $x=1$ 일 때 : $a_0 \to b_7$

$b_0 \to a_7$

(ⅱ) $x=2$ 일 때 : $a_0 \to b_i \to a_7$

$b_0 \to a_i \to b_7$

(ⅲ) $x=3$ 일 때 : $a_0 \to b_i \to a_j \to b_7$

$b_0 \to a_i \to b_j \to a_7$

(ⅳ) $x=4$ 일 때 : $a_0 \to b_1 \to a_j \to b_k \to a_7$

$b_0 \to a_i \to b_j \to a_k \to b_7$

a_0으로 시작하는 경우와 b_0로 시작하는 경우는 서로 대칭이지만 둘 중 하나만 생각한다.

그리고 (ⅰ)~(ⅳ)에서 x가 짝수인 경우 a로 시작하면 a로 끝나고 x가 홀수인 경우 a로 시작하면 b로 끝난다는 것을 알 수 있다.

① $x=2n$인 경우 (단, n은 자연수)

P에서 Q로 가는 경로는

$a_0 \to b_i \to a_j \to \cdots a_k \to b_1 \to a_7$

이때 $x=2n$일 때,

'→'의 개수는 $2n$이다. ← '→'의 개수=방향을 바꾸는 횟수 $a_0 \sim a_7$ 총 $(2n+1)$개의 길을 지나고 양 끝에 a_0, a_7을 빼면 총 $(2n-1)$개의 길을 지난다. b길을 a길보다 한 번 더 가므로 b길을 n번, a길을 $(n-1)$번 지난다. 그리고 중간경로이기 때문에 a_0, a_7, b_0, b_7은 될 수 없으므로 선택할 수 있는 길은 $a_1 \sim a_6$중에서 $(n-1)$개, $b_1 \sim b_6$중에서 n개다. b_0로 시작하는 경우는 a_0로 시작하는 경우와 대칭이므로 구하는 경우의 수는 $f(x)=2\times{}_6\mathrm{C}_{n-1}\times{}_6\mathrm{C}_n\ (x=2n)$

② $x=2n-1$인 경우 (단, n은 자연수)

P에서 Q로 가는 경로는

$a_0 \to b_i \to a_j \to \cdots \to b_k \to a_1 \to b_7$

a_0, a_7은 고정으로 지나는 길이고 가운데 $(2n-2)$개의 길을 지난다. a길과 b길을 거치는 횟수가 동일하므로 a길을 $(n-1)$번 b길을 $(n-1)$번 지난다.

a_0, a_7, b_0, b_7은 지날 수 없으므로 선택할 수 있는 길은 $a_1 \sim a_6$중에서 $(n-1)$개, $b_1 \sim b_6$중에서 $(n-1)$개다. b_0로 시작하는 경우는 a_0로 시작하는 경우와 대칭이므로 구하는 경우의 수는

$f(x)=2\times{}_6\mathrm{C}_{n-1}\times{}_6\mathrm{C}_{n-1}(x=2n-1)$

①, ②중에서

$$f(x)=\begin{cases}2\times{}_6\mathrm{C}_{n-1}\times{}_6\mathrm{C}_n & (x=2n)\\ 2\times{}_6\mathrm{C}_{n-1}\times{}_6\mathrm{C}_{n-1} & (x=2n-1)\end{cases}$$

ㄱ. $f(1)=2\times{}_6\mathrm{C}_0\times{}_6\mathrm{C}_0=2$ [참]

ㄴ. $f(2)=2\times{}_6\mathrm{C}_0\times{}_6\mathrm{C}_1=2\times1\times6=12$

$f(12)=2\times{}_6\mathrm{C}_5\times{}_6\mathrm{C}_6=2\times6\times1=12$

$\therefore\ f(2)=f(12)$ [참]

ㄷ. ${}_n\mathrm{C}_r$에서 r가 $\frac{n}{2}$에 가까울수록 ${}_n\mathrm{C}_r$의 값이 커지므로 ${}_6\mathrm{C}_{n-1}$에서 $n=4$일 때, $f(x)$가 최대가 된다. $x=2n$ 또는 $x=2n-1$이므로 $x=8$ 또는 $x=7$일 때, $f(8)=2\times{}_6\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_4$, $f(7)=2\times{}_6\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3$이므로 $f(7)>f(8)$ 즉 $f(x)$의 최댓값은 $f(7)$이다. [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

41. 정답 45가지

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는 ●○●○● 또는 ○●○●○로 2가지가 있다.

(ⅰ) ●○●○●인 경우

1번의 <D형>을 만들기 위해서는 이미 나열되어 있는 2개의 ○에 이웃하도록 새로운 ○을 나열하면 되므로 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$

4번의 <A형>을 만들기 위해서는 이미 나열되어 있는 3개의 ●에 이웃하도록 중복을 허락하여 새로운 4개의 ●을 나열하면 되므로 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2$

즉 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2=2\times15=30$

(ⅱ) ○●○●○인 경우 같은

1번의 <D형>을 만들기 위해서는 이미 나열되어 있는 3개의 ○에 이웃하도록 새로운 ○을 나열하면 되므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$

4번의 <A형>을 만들기 위해서는 이미 나열되어 있는 2개의 ●에 이웃하도록 중복을 허락하여 새로운 4개의 ●을 나열하면 되므로 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_4={}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1$

즉 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=3\times5=15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $30+15=45$