절대수학 극

그래프 와 대수

예습 배부용 발췌 - 자연

Day 1 새로운 시작

2018 학년도 6월 평가원

21. 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

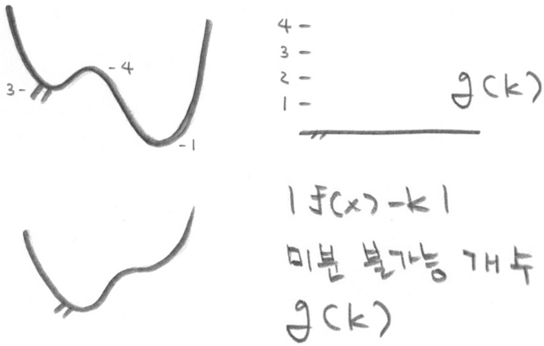
가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$
(나) 함수 $\sqrt{\lvert f(x)-t\rvert}$ 는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

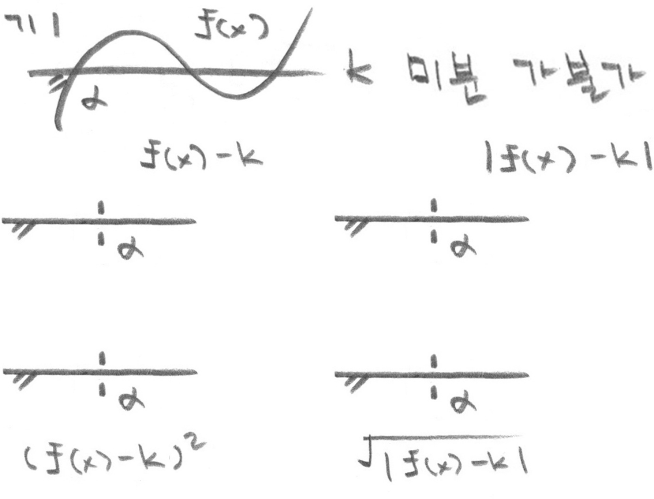
함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

① 96 ② 97 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

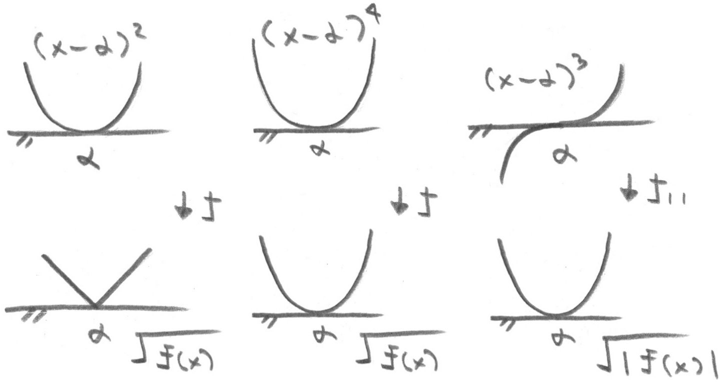
접어 미분 가불가 함수



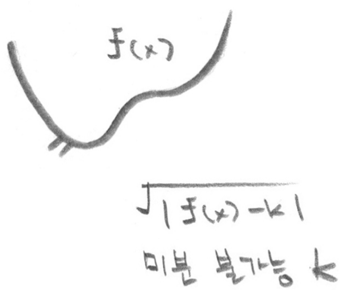
접어 루트 제곱 미분 가불가



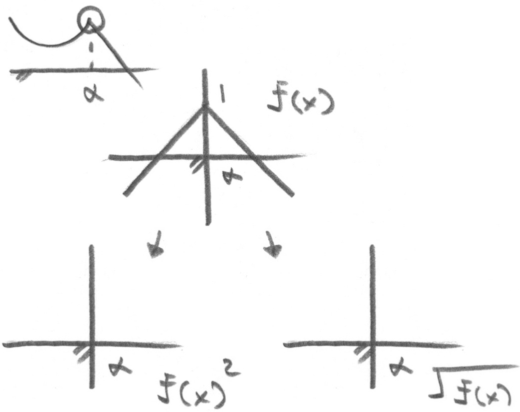
▎접어 루트 차수 저항



▎접어 루트 미분 가불가 함수



▍첨점 제곱 루트 돋보기 미분 가불가



$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}) \\ \cos x & (\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$ 에서

$$f'(x)=\begin{cases} 6\sin^2 x\cos x & (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}) \\ -\sin x & (\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

이므로

$f'(x)=0$

에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$

이때, $f'(0)=0$ 이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)>0$ 이므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않고 $x=\pi$ 에서는 극솟값 $f(\pi)=-1$을 갖는다.

또한,

$f(\frac{\pi}{4})=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$ 이고

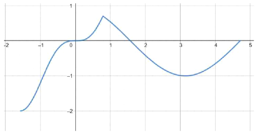
$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$을 갖는다.

그리고, $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x)=-2$,

$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}-} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



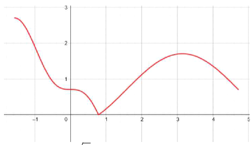
이때 $g(x)=|f(x)-t|$라 하면

$$(\sqrt{g(x)})'=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\times g'(x)$$

이므로 함수 $\sqrt{g(x)}$는 $g(x)$가 미분가능하지 않는 x의 값과 $g(x)=0$인 x의 값에서 미분가능하지 않다.

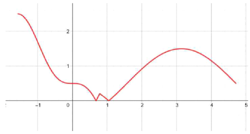
(i) $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

함수 $g(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 1이다.



(ii) $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

함수 $g(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 3이다.



(iii) $t=0$일 때

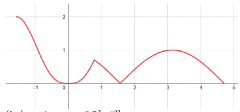
함수 $g(x)=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

이때, $i(x)=\sqrt{|2\sin^3 x|}$라 하면

$$i'(0)=\lim_{h\to0}\frac{i(0+h)-i(0)}{h}$$

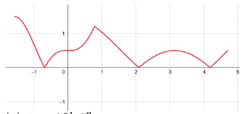
$$=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{|2\sin^3 h|}}{h}=0$$

이므로 $x=0$에서는 미분이 가능하다. 따라서, 조건을 만족시키는 k의 개수는 2이다.



(iv) $-1<t<0$일 때

함수 $g(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 4이다.



(v) $t=-1$일 때

함수 $g(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같다.

이때, $j(x)=\sqrt{|\cos x+1|}$라 하면

$$\lim_{h\to0-}\frac{j(\pi+h)-j(\pi)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{\sqrt{|\cos(\pi+h)+1|}-\sqrt{|\cos\pi+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{\sqrt{|-\cos h+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{\sqrt{-\cos h+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}(-\sqrt{\frac{1-\cos h}{h^2}})$$

$$=\lim_{h\to0-}\left\{-\sqrt{\frac{\sin^2 h}{h^2(1+\cos h)}}\right\}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

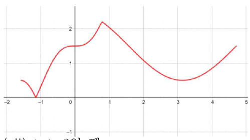
$$\lim_{h\to0+}\frac{j(\pi+h)-j(\pi)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{|\cos(\pi+h)+1|}-\sqrt{|\cos\pi+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{|-\cos h+1|}}{h}$$

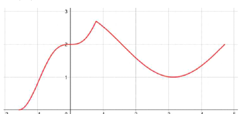
$$=\lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{-\cos h+1}}{h}$$

같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 2이다.



(vii) $t\le-2$일 때

함수 $g(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 1이다.



따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.

$\lim_{t\to0-}(h\circ g)(t)=\lim_{t\to0+}(h\circ g)(t)$

$=(h\circ g)(0)$

즉, $h(4)=h(3)=h(2)\cdots$㉡

$\lim_{t\to-1-}(h\circ g)(t)=\lim_{t\to-1+}(h\circ g)(t)$

$=(h\circ g)(-1)$

즉, $h(2)=h(4)=h(3)\cdots$㉢

$\lim_{t\to-2-}(h\circ g)(t)=\lim_{t\to-2+}(h\circ g)(t)$

$=(h\circ g)(-2)$

즉, $h(1)=h(2)\cdots$㉣

따라서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$

이므로

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)=k$

라 하면 사차함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$

또한,

$a=g(\frac{\sqrt{2}}{2})=1$,

$b=g(0)=2$, $c=g(-1)=3$

❙ 2016 학년도 9월 평가원

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = \left| 2\sin(x + 2|x|) + 1 \right|$$

에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

$g(x)=\begin{cases} |2\sin 3x+1| & (x \ge 0) \\ |-2\sin x+1| & (x<0) \end{cases}$이므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $x=0$과 $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값에서 미분가능하지 않다.

또, $\lim_{x\to 0+} g'(x)=6$, $\lim_{x\to 0-} g'(x)=-2$이다.

(i) 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 0+} h'(x)=\lim_{x\to 0-} h'(x)$가 성립해야 한다.

$$\lim_{x\to 0+} h'(x)=\lim_{x\to 0+} f'(g(x))g'(x)$$
$$=\lim_{x\to 0+} f'(g(x))\times \lim_{x\to 0+} g'(x)$$
$$=f'(1)\times 6$$

$$\lim_{x\to 0-} h'(x)=\lim_{x\to 0-} f'(g(x))g'(x)$$
$$=\lim_{x\to 0-} f'(g(x))\times \lim_{x\to 0-} g'(x)$$
$$=f'(1)\times(-2)$$

즉 $6f'(1)=-2f'(1)$에서

$f'(1)=0$ …… ㉠

(ii) $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 α라 하자.

함수 $h(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to \alpha+} h'(x)=\lim_{x\to \alpha-} h'(x)$가 성립해야 한다.

$$\lim_{x\to \alpha+} h'(x)=\lim_{x\to \alpha+} f'(g(x))g'(x)$$
$$=\lim_{x\to \alpha+} f'(g(x))\times \lim_{x\to \alpha+} g'(x)$$
$$=f'(0)\times k$$ (단, k는 양의 상수)

$$\lim_{x\to \alpha-} h'(x)=\lim_{x\to \alpha-} f'(g(x))g'(x)$$
$$=\lim_{x\to \alpha-} f'(g(x))\times \lim_{x\to \alpha-} g'(x)$$
$$=f'(0)\times(-k)$$

즉 $kf'(0)=-kf'(0)$에서

$f'(0)=0$ …… ㉡

(iii) 함수 $h'(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 0+} h''(x)=\lim_{x\to 0-} h''(x)$가 성립해야 한다.

$$\lim_{x\to 0+} h''(x)$$
$$=\lim_{x\to 0+} \left[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)\right]$$
$$=\lim_{x\to 0+} f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to 0+} f'(g(x))g''(x)$$
$$=\lim_{x\to 0+} f''(g(x))\times \lim_{x\to 0+} \{g'(x)\}^2+0$$
$$=f''(1)\times 6^2$$

$$\lim_{x\to 0-} h''(x)$$
$$=\lim_{x\to 0-} \left[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)\right]$$
$$=\lim_{x\to 0-} f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to 0-} f'(g(x))g''(x)$$
$$=\lim_{x\to 0-} f''(g(x))\times \lim_{x\to 0-} \{g'(x)\}^2+0$$
$$=f''(1)\times(-2)^2$$

즉 $36f''(1)=4f''(1)$에서

$f''(1)=0$ …… ㉢

(i), (ii), (iii)에서

함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이고,

㉠, ㉡에서 $f'(1)=0$, $f'(0)=0$이므로

$f'(x)=4x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f'(x)=(4x^2-4x)(x-a)$에서

$f''(x)=(8x-4)(x-a)+(4x^2-4x)$

㉢에서 $f''(1)=0$이므로

$4(1-a)+0=0$에서 $a=1$

따라서 $f'(x)=4x(x-1)^2$이므로

$f'(3)=4\times 3\times 2^2=48$

정답 48

[참고]

함수 $h'(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능한지 확인해보자

$$\lim_{x\to \alpha+} h''(x)$$
$$=\lim_{x\to \alpha+} \left[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)\right]$$
$$=\lim_{x\to \alpha+} f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to \alpha+} f'(g(x))g''(x)$$
$$=\lim_{x\to \alpha+} f''(g(x))\times \lim_{x\to \alpha+} \{g'(x)\}^2+0$$
$$=f''(0)\times k^2$$

$$\lim_{x\to \alpha-} h''(x)$$
$$=\lim_{x\to \alpha-} \left[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)\right]$$
$$=\lim_{x\to \alpha-} f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to \alpha-} f'(g(x))g''(x)$$
$$=\lim_{x\to \alpha-} f''(g(x))\times \lim_{x\to \alpha-} \{g'(x)\}^2+0$$
$$=f''(0)\times(-k)^2$$

즉 $\lim_{x\to \alpha+} h''(x)=\lim_{x\to \alpha-} h''(x)$이므로

함수 $h'(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하다.

2018 학년도 9월 평가원

30. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이고 최솟값이 0 인 사차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$ 에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4 이다.
(나) 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이다.
(다) 방정식 $h(x)=8$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6 이다.

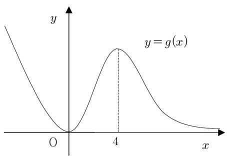
$f'(5)$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \to \infty} g(x)=0$) [4점]

30. 출제의도 : 합성함수 미분법을 이용하여 내적문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :
사차함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다.
한편, $g(x)=2x^4e^{-x}$에서
$g'(x)=8x^3e^{-x}-2x^4e^{-x}$
$\quad=-2x^3e^{-x}(x-4)$
이때, $g'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=4$
그러므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

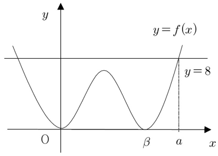
x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2^9e^{-4}	$\searrow$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

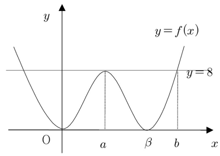


한편, 조건 (가)에서 함수 $h(x)=0$은 서로 다른 4개의 실근을 가진다.
이때, $f(g(x))=0$에서 $g(x)=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $f(t)=0$이다.
이때, 방정식 $f(t)=0$의 한 근을 $t=\alpha$라 하면
$\quad g(x)=\alpha$
이때, $g(x)\geq 0$이므로 $\alpha\geq 0$이어야 한다.
또, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 많아야 세 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 방정식 $f(t)=0$은 적어도 2개의 0이상의 실근을 가져야 한다.
한편, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이고 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로
$f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\ (0\leq\alpha<\beta)$
$\quad\cdots\cdots$ ㉠
또, 조건 (나)에서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 $h'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌어야 한다.
한편, $h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$이고 $g'(x)$의 부호가 $x=0$의 좌우에서 $-$에서 $+$로 바뀌므로 $f'(g(x))$의 부호는 $x=0$의 좌우에서 $+$에서 $+$로 나타나야 한다.

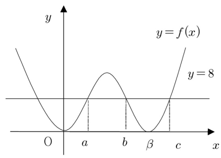
한편, x의 값이 0에 아주 가까이 있을 때, $x<0$이면 $g(x)>0$이고 $x>0$이면 $g(x)>0$이다. 또, $g(0)=0$이므로 위의 조건을 만족시키기 위해서는 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0의 근처이고 양수일 때, $f'(x)>0$이어야 한다.
이때, $\alpha\geq 0$이므로 $\alpha=0$이어야 한다.
그러므로 ㉠에서
$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$ $\cdots\cdots$ ㉡
또, 조건 (다)에서 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수가 6이어야 한다.
이때, $f(g(x))=8$에서 $g(x)=t$로 놓으면 $f(t)=8$이고 $g(x)\geq 0$이므로 $t\geq 0$이어야 한다.
이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=8$의 그래프를 각 경우로 나누고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=8$의 교점 중 x좌표가 0보다 큰 점만 나타내면 다음과 같다.
(ⅰ) 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 작은 경우



두 함수 $y=f(x)$, $y=8$의 그래프의 교점의 x좌표 중 0보다 큰 값을 a라 하면 방정식 $g(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 6이어야 한다.
그런데 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a>0)$인 직선은 많아야 세 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 못한다.
(ⅱ) 함수 $f(x)$의 극댓값이 8인 경우



두 함수 $y=f(x)$, $y=8$의 그래프의 교점의 x좌표 중 0보다 큰 값을 a, $b(a<b)$라 하면 방정식 $g(x)=a$ 또는 $g(x)=b$의 서로 다른 실근의 개수는 6이어야 한다.
그런데 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a>0)$인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.
마찬가지로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b(b>0)$인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.
그러므로 조건을 만족시킬 수 있다.
(ⅲ) 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 큰 경우



두 함수 $y=f(x)$, $y=8$의 그래프의 교점의 x좌표 중 0보다 큰 값을 a, b, c $(a<b<c)$라 하면 방정식 $g(x)=a$ 또는 $g(x)=b$ 또는 $g(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수는 6이여야 한다.
그런데 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a>0)$인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.
마찬가지로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b(b>0)$, 함수 $y=g(x)$와 직선 $y=c(c>0)$의 교점의 개수도 모두 2 또는 3이다.
그러므로 방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 실근의 개수가 6이기 위해서는 모두 교점의 개수가 2가 되어야 한다.
그런데 $0<a<b<c$이고 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2^9e^{-4}$만 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 못한다.
그러므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(x)$의 극댓값은 8이다.
한편, ㉡에서
$f'(x)=x(x-\beta)^2+x^2(x-\beta)$
$\quad=x(x-\beta)(2x-\beta)$
$\quad=2x(x-\beta)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)$
이때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

그러므로 $f\left(\frac{\beta}{2}\right)=8$에서
$\frac{1}{2}\times\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\times\left(\frac{\beta}{2}-\beta\right)^2=8$
$\beta^4=2^8$
이때, $\beta>0$이므로
$\quad\beta=4$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$에서
$f'(x)=x(x-4)^2+x^2(x-4)$
$\quad=2x(x-2)(x-4)$
이므로
$f'(5)=2\times5\times3\times1$
$\quad=30$

정답 30

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x)=\ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=3,\quad \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

$F(x)=\ln|f(x)|$이므로

$\lim\limits_{x\to1}(x-1)F'(x)=3$에서

$\lim\limits_{x\to1}\left\{(x-1)\times\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right\}=3$ ---- ㉠

이때, $x\to0$일 때 (분자)$\to0$이므로

(분모)$\to0$에서

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$

또, $f'(x)$는 다항함수이므로 미분가능하다.

그러므로 ㉠에서

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}=3$

이때, $f'(1)\neq0$이라 하면 위의 식의 좌변은 $\dfrac{f'(1)}{f'(1)}=1$이므로 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(1)=0$이어야 한다.

이때, $f(x)=(x-1)^2(x^2+ax+b)$

$(1+a+b\neq0)$라 하면 ㉠의 좌변은

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\{2(x-1)(x^2+ax+b)+(x-1)^2(2x+a)\}}{(x-1)^2(x^2+ax+b)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(x^2+ax+b)+(x-1)(2x+a)}{x^2+ax+b}$

$=2$

그러므로 만족시키지 않는다.

$f(x)=(x-1)^3(x+a)$ $(a+1\neq0)$이라 하면 ㉠의 좌변은

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\{3(x-1)^2(x+a)+(x-1)^3\}}{(x-1)^3(x+a)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3(x+a)+(x-1)}{x+a}$

$=3$

그러므로 만족시킨다.

따라서 $f(x)=(x-1)^3(x+a)$

한편, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F'(x)}{G'(x)}=\dfrac{1}{4}$에서

$F'(x)=\dfrac{3(x-1)^2(x+a)+(x-1)^3}{(x-1)^3(x+a)}$

$=\dfrac{3(x+a)+(x-1)}{(x-1)(x+a)}$

이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{3(x+a)+(x-1)}{(x-1)(x+a)}}{\dfrac{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}{g(x)\sin x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\{3(x+a)+(x-1)\}g(x)\sin x}{(x-1)(x+a)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(4x+3a-1)g(x)\sin x}{(x-1)(x+a)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$

$=\dfrac{1}{4}$ ------ ㉡

위에서 $x\to0$일 때, (분자)$\to0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to0$에서

$\lim\limits_{x\to0}[(x-1)(x+a)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}]=0$

$ag(0)=0$

$a=0$ 또는 $g(0)=0$

$a=0$일 때,

㉡에서

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(4x-1)g(x)\sin x}{x(x-1)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$

$=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{g(x)}{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}$

$\times\dfrac{4x-1}{x-1}\times\dfrac{\sin x}{x}]$

$=\dfrac{1}{4}$

이때, 위의 극한값이 존재하고 극한값

$\lim\limits_{x-1}\dfrac{4x-1}{x-1}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}=\dfrac{1}{4}$ ---㉢

이어야 한다.

$g(0)\neq0$이라 하면 위의 식의 좌변은

$\dfrac{g(0)}{g(0)}=1$

이므로 만족시키지 않는다.

$g(0)=0$일 때, $g(x)=x(x^2+cx+d)$

$(d\neq0)$라 하면 ㉢의 좌변은

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x^2+cx+d)}{(3x^2+2cx+d)\sin x+x(x^2+cx+d)\cos}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+cx+d}{(3x^2+2cx+d)\dfrac{\sin x}{x}+(x^2+cx+d)c}$

$=\dfrac{d}{d+d}=\dfrac{1}{2}$

이므로 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(x)=x^2(x+c)$ $(c\neq0)$이라 하면 ㉢의 좌변은

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(x+c)}{(3x^2+2cx)\sin x+x^2(x+c)\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+c}{(3x+2c)\dfrac{\sin x}{x}+(x+c)\cos x}$

$=\dfrac{c}{2c+c}$

$=\dfrac{1}{3}$

$g(x)=x^3$이라 하면 ㉢의 좌변은

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{3x^2\times\sin x+x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{3\times\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}$

$=\dfrac{1}{4}$

그러므로 위의 식을 만족시킨다.

그러므로

$g(x)=x^3$

이다.

만약, $a\neq0$이고 $g(0)=0$하자.

$g(x)=x(x^2+cx+d)$ 라 하면 ㉡에서

$-\dfrac{1}{a}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(4x-3a+1)(x^2+cx+d)\sin x}{(3x^2+2cx+d)\dfrac{\sin x}{x}+(x^2+cx+d)\cos x}$

$=\dfrac{1}{4}$

이때, $x\to0$일 때, (분자) $\to0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to0$에서

$d=0$

이때, 위의 식은

$-\dfrac{1}{a}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(4x-3a+1)(x+c)\sin x}{(3x+2c)\dfrac{\sin x}{x}+(x+c)\cos x}$

$=\dfrac{1}{4}$

$x\to0$일 때, (분자) $\to0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to0$에서

$c=0$

이때, 위의 식은

$-\dfrac{1}{a}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(4x-3a+1)x\sin x}{3\sin x+x\cos x}$

$=-\dfrac{1}{a}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(4x-3a+1)\sin x}{3\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}$

$=0$

그러므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서

$f(x)=x(x-1)^3$, $g(x)=x^3$이므로

$f(3)+g(3)=24+27=51$

정답 ④

❙ 2017 학년도 수능

30. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x-t| & (|x-t|\le 1) \\ 0 & (|x-t|>1) \end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

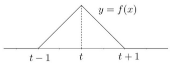
함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

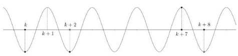
30. **출제의도** : 정적분으로 나타내어진 함수의 특성을 파악할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, 함수 $y=\cos(\pi x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$이므로 홀수 k에 대하여 함수 $y=\cos(\pi x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, $x<t-1$ 또는 $x>t+1$일 때 $f(x)=0$이므로 닫힌 구간 $[a,\ b]$가 $(-\infty, t-1]$에 포함되거나 $[t+1,\ \infty)$에 포함되면

$$\int_a^b f(x)\cos(\pi x)dx=0$$

이다.

따라서 t의 값을 증가시키면서 함수 $g(t)$를 구하하면 다음과 같다.

(i) $t+1\le k$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_k^{k+8} 0\times\cos(\pi x)dx=0$$

(ii) $t-1\le k\le t+1$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_k^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$

(iii) $k\le t-1<t+1\le k+8$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$

(iv) $t-1\le k+8\le t+1$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{t-1}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

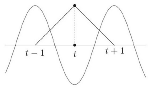
(v) $t-1\ge k+8$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_k^{k+8} 0\times\cos(\pi x)dx=0$$

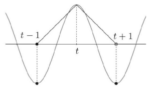
한편, 다음 그래프에서 함수 $\displaystyle\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$는

t가 홀수일 때 극소이자 최소이고,

t가 짝수일 때 극대이자 최대임을 알 수 있다.



[t가 홀수일 때]



[t가 짝수일 때]

그런데,

$$\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{\pi}(1-x)\sin(\pi x)\right]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)dx$$
$$=0+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{\pi^2}$$

이므로 t가 $k\le t-1<t+1\le k+8$인 홀수일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{1} (1-|x|)\cos(\pi x)dx$$
$$=-2\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\frac{4}{\pi^2}$$

이고, t가 $k\le t-1<t+1\le k+8$인 짝수일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1} (1-|x|)\cos(\pi x)dx$$
$$=2\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\frac{4}{\pi^2}$$

이다.

그런데 k는 홀수이므로 함수 $g(t)$는 다음과 같이 극솟값을 갖는다.

(1) $t=k$에서 극솟값

$$\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_k^{k+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\frac{2}{\pi^2}$$

을 갖는다.

(2) $t=k+8$에서 극솟값 이때

$$\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{k+7}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$ 또,
$$=-\int_{-1}^{0} (1+x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)dx$$ 따리
$$=-\frac{2}{\pi^2}$$

를 갖는다.

(3) $t=k+2$에서 극솟값

$$\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{k+1}^{k+3} f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\int_{-1}^{1} (1+x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-2\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\frac{4}{\pi^2}$$

를 갖는다.

(4) $t=k+4,\ k+6$에서도 (3)과 마찬가지로 극솟값

$$-\frac{4}{\pi^2}$$

를 갖는다.

이상에서

$$\alpha_1=k,\ \alpha_2=k+2,\ \alpha_3=k+4,$$
$$\alpha_4=k+6,\ \alpha_5=k+8$$

이고,

$$g(\alpha_1)=g(\alpha_8)=-\frac{2}{\pi^2}$$
$$g(\alpha_2)=g(\alpha_3)=g(\alpha_4)=-\frac{4}{\pi^2}$$

이다.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=5k+20=45$이므로

$k=5$

$$\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{5} g(\alpha_i)$$
$$=-\frac{1}{\pi^2}(2+4+4+4+2)=-\frac{16}{\pi^2}$$

·서

$$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$$
$$=5-\pi^2\times\left(-\frac{16}{\pi^2}\right)$$
$$=5+16=21$$

정답 21

생각에  목마르다