2020학년도 대학수학능력시험 대비
2019학년도 4월 고3 전국연합학력평가 (수학)
4점 문제 해설

※ 본문을 읽기 전에, 먼저 읽어주세요!

1) 해당 모의고사의 문제에 대한 저작권은 **경기도교육청에** 있습니다.

2) 본 해설은 필자가 단독으로 다른 해설을 참고하지 않고 만들어낸 것이므로 다소 매끄럽지 않은 부분이 있을 수도 있습니다. 양해 부탁드립니다.

3) 이 문서는 재가공하여 판매하는 등의 **영리를 취할 목적으로 이용하지 않는 한** 누구나 자유롭게 열람, 배포, 이용할 수 있습니다. (교육 목적으로 여러 사람에게 배포되는 경우, 저작자만 명시해주시면 됩니다.)

4) 이 문서를 통해 많은 분들이 도움을 받으셨으면 좋겠습니다.

＊ 제작자: 그린란드(이재종)
(http://blog.naver.com/wowhd93)
＊ 최종 수정일자: 2019. 4. 11. 03:00

‘가’ 형

Problem #14

14. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 25 \text{ 이하의 자연수}\}$의 부분집합 중 두 원소 1, 2를 모두 포함하고 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는? [4점]

① 2^{18} ② 2^{19} ③ 2^{20} ④ 2^{21} ⑤ 2^{22}

Solution

구하는 부분집합의 개수는 집합 $A - \{1, 2\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수를 구하는 것과 같습니다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$${}_{23}\mathrm{C}_1 + {}_{23}\mathrm{C}_3 + {}_{23}\mathrm{C}_5 + \dots + {}_{23}\mathrm{C}_{23} = 2^{23} \times \frac{1}{2} = 2^{22}$$

$(x+1)^{23}$

$= {}_{23}\mathrm{C}_0 x^{23} + {}_{23}\mathrm{C}_1 x^{22} + \dots + {}_{23}\mathrm{C}_{22} x + {}_{23}\mathrm{C}_{23}$

의 양변에 $x = 1$과 $x = -1$을 각각 대입하면

(1) ${}_{23}\mathrm{C}_0 + {}_{23}\mathrm{C}_1 + {}_{23}\mathrm{C}_2 + \dots + {}_{23}\mathrm{C}_{22} + {}_{23}\mathrm{C}_{23} = 2^{23}$

(2) $-{}_{23}\mathrm{C}_0 + {}_{23}\mathrm{C}_1 - {}_{23}\mathrm{C}_2 + \dots - {}_{23}\mathrm{C}_{22} + {}_{23}\mathrm{C}_{23} = 0$

위의 두 등식을 변변 더하면

$2\left({}_{23}\mathrm{C}_1 + {}_{23}\mathrm{C}_3 + \dots + {}_{23}\mathrm{C}_{23}\right) = 2^{23}$

$\therefore\ {}_{23}\mathrm{C}_1 + {}_{23}\mathrm{C}_3 + \dots + {}_{23}\mathrm{C}_{23} = 2^{22}$

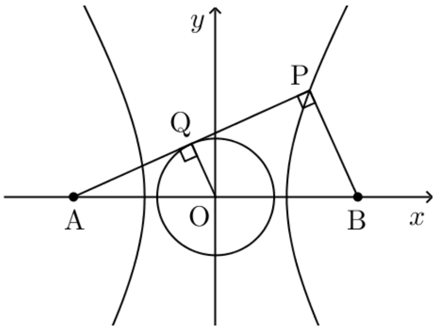
정답: ⑤

Problem #15

15. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-4, 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$과 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$이 있다. 쌍곡선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$일 때, 원점을 중심으로 하고 직선 AP에 접하는 원의 반지름의 길이는? [4점]

① $\sqrt{7} - 2$ ② $\sqrt{7} - 1$ ③ $2\sqrt{2} - 1$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

Solution



위 그림과 같이 점 A, B는 주어진 쌍곡선의 초점입니다.

문제의 원과 직선 AP의 접점을 Q라고 하고, $\overline{\mathrm{AP}} = a$, $\overline{\mathrm{BP}} = b$라 두면

쌍곡선의 정의에 의하여 $a - b = 4$

피타고라스 정리에 의하여 $a^2 + b^2 = 64$

위 두 식을 연립하면

$(b+4)^2 + b^2 = 64 \implies b^2 + 4b - 24 = 0$

$\therefore\ b = -2 + 2\sqrt{7}$

이때 두 직각삼각형 AOQ, ABP에서 닮음의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BP}}$이므로

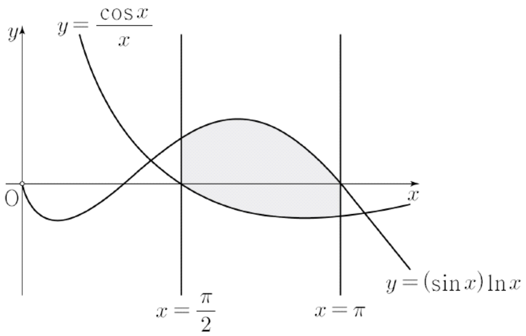
원점을 중심으로 하고 직선 AP에 접하는 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{b}{2} = \sqrt{7} - 1$입니다.

정답: ②

Problem #16

16. 두 곡선 $y=(\sin x)\ln x$, $y=\dfrac{\cos x}{x}$ 와 두 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\pi$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{4}\ln\pi$ ② $\frac{1}{2}\ln\pi$ ③ $\frac{3}{4}\ln\pi$ ④ $\ln\pi$ ⑤ $\frac{5}{4}\ln\pi$



Solution

$\dfrac{d}{dx}\{-(\cos x)\ln x\}=(\sin x)\ln x-\dfrac{\cos x}{x}$ 에서

문제에서 구하는 영역의 넓이는

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{(\sin x)\ln x-\frac{\cos x}{x}\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d}{dx}\{-(\cos x)\ln x\}dx$$

$$=\Big[-(\cos x)\ln x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\ln\pi$$

정답: ④

Problem #17

17. 다음은 비어 있는 세 주머니 A, B, C에 먼저 흰 공 6개를 남김없이 나누어 넣은 후 검은 공 6개를 남김없이 나누어 넣을 때, 빈 주머니가 생기지 않도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, 같은 색의 공은 구별하지 않는다.)

> 빈 주머니가 생기지 않도록 나누어 넣는 경우의 수는
> 세 주머니 A, B, C에 먼저 흰 공 6개를 남김없이 나누어 넣은 후
> 검은 공 6개를 남김없이 나누어 넣을 때,
> 흰 공을 넣지 않은 주머니가 있으면 그 주머니에는
> 검은 공이 1개 이상 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수와 같다.
>
> 흰 공을 넣은 주머니의 개수를 n이라 하면
> (ⅰ) $n=3$일 때
> 세 주머니 A, B, C에 흰 공을 각각 1개 이상 나누어 넣은 후,
> 검은 공을 나누어 넣는 경우이므로
> 이 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3\times$ (가) 이다.
> (ⅱ) $n=2$일 때
> 세 주머니 A, B, C 중 2개의 주머니에 흰 공을 각각
> 1개 이상 나누어 넣은 후, 검은 공을 나누어 넣는 경우이므로
> 이 경우의 수는 (나) 이다.
> (ⅲ) $n=1$일 때
> 세 주머니 A, B, C 중 1개의 주머니에 흰 공을 넣은 후,
> 검은 공을 나누어 넣는 경우이므로
> 이 경우의 수는 (다) 이다.
>
> 따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
> ${}_3\mathrm{H}_3\times$ (가) + (나) + (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 374 ② 381 ③ 388 ④ 395 ⑤ 402

Solution

(가): 세 주머니 A, B, C에 흰 공을 각각 1개 이상 나누어 넣는 방법의 수는
방정식 $x_1+x_2+x_3=3$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_3$이고,

검은 공을 나누어 넣는 방법의 수는
$x_1+x_2+x_3=6$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_6$입니다.

$\therefore\ p={}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

(나): 세 주머니 A, B, C 중 흰 공을 넣지 않는 주머니를 택하는 방법의 수는 ${}_3C_1 = 3$이고,

남는 두 주머니에 각각 1개 이상의 흰 공을 넣는 방법의 수는 방정식 $x_1 + x_2 = 4$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_2H_4 = {}_5C_1 = 5$

검은 공을 넣을 때는, 흰 공을 넣지 않은 주머니에 1개 이상의 검은 공을 넣어야 하므로
검은 공을 넣는 방법의 수는 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 = 5$의 음이 아닌 정수해의 개수$({}_3H_5)$와 같습니다.

따라서 $n=2$일 때 공을 나누어 넣는 방법의 수는
$3 \times 5 \times {}_3H_5 = 15 \times {}_7C_2 = 315$

$\therefore\ q = 315$

(다): 한 개의 주머니에 흰 공을 모두 넣는 방법의 수는 3이고, 검은 공은 흰 공을 넣지 않은 두 개의 주머니에 각각 1개 이상 나누어 넣어야 하므로

검은 공을 넣는 방법의 수는 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 = 4$의 음이 아닌 정수해$({}_3H_4)$의 개수와 같습니다.

따라서 $n=1$일 때 공을 나누어 넣는 방법의 수는
$3 \times {}_3H_4 = 3 \times {}_6C_2 = 45$

$\therefore\ r = 45$

$\therefore\ p + q + r = 28 + 315 + 45 = 388$

정답: ③

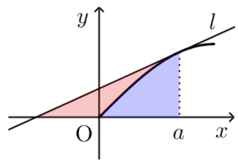
Problem #18

18. 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x) = \sin x$의 그래프 위의 한 점 $P(a, \sin a)\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선을 l이라 하자.
곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 $x = a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 같을 때, $\cos a$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

Solution

접선 l의 방정식은 $y - \sin a = \cos a(x - a)$
$\Rightarrow\ y = (\cos a)x - a\cos a + \sin a$



오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

접선 l과 x축, 직선 $x = a$으로 둘러싸인 직각삼각형의 넓이가 파란색으로 색칠한 부분의 넓이의 2배입니다.

접선 l과 x축, 직선 $x = a$으로 둘러싸인 직각삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \left(a - \frac{a\cos a - \sin a}{\cos a}\right) \times \sin a = \frac{1}{2}\tan a \sin a$

이므로

$2\int_0^a \sin x\, dx = \frac{1}{2}\tan a \sin a$

$\Rightarrow\ 4\Big[-\cos x\Big]_0^a = \tan a \sin a$

$\Rightarrow\ 4(1 - \cos a) = \tan a \sin a$

$\Rightarrow\ 4\cos a(1 - \cos a) = \sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

$\Rightarrow\ 3\cos^2 a - 4\cos a + 1 = 0$

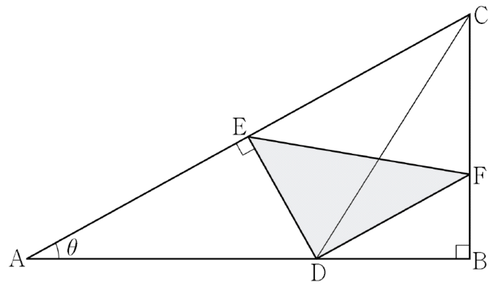
$\Rightarrow\ (3\cos a - 1)(\cos a - 1) = 0$

$0 < a < \frac{\pi}{2}$이므로 $\therefore\ \cos a = \frac{1}{3}$

정답: ②

Problem #19

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{AD}=\overline{CD}$가 되도록 점 D를 잡는다. 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E, 점 D를 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 F라 하자. $\angle BAC=\theta$일 때, 삼각형 DEF의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{5}{32}$

Solution

$\overline{AD}=\overline{CD}$이므로 $\overline{AE}=\overline{CE}$이고,

$\overline{AB}=1 \Rightarrow \overline{AC}=\sec\theta \Rightarrow \overline{AE}=\frac{1}{2}\sec\theta$

직각삼각형 AED에서

$\overline{DE}=\overline{AE}\tan\theta=\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta \cdots ①$

$\overline{AD}=\overline{AE}\sec\theta=\frac{1}{2}\sec^2\theta$

$\Rightarrow \overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=1-\frac{1}{2}\sec^2\theta$

직각삼각형 BDF에서

$\overline{DF}=\overline{BD}\sec\theta=\sec\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right) \cdots ②$

$\angle ADE=\frac{\pi}{2}-\theta$이고

$\overline{AC}\,//\,\overline{DF}$이므로 $\angle BDF=\angle DAE=\theta$

따라서 $\angle EDF=\frac{\pi}{2}$

①, ② 에서

$$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{DF}$$
$$=\frac{1}{4}\sec^2\theta\tan\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{1}{4}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\sec^2\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times 1\times 1\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

정답: ④

Problem #20

20. 좌표평면 위에 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=4$가 있다. $t\neq -3$, $t\neq 3$인 실수 t에 대하여 직선 $y=4$ 위의 점 $P(t,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 $f(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f(\sqrt{2})=-1$
ㄴ. 열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 $f''(t)<0$이다.
ㄷ. 방정식 $9f(x)=3^{x+2}-7$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution

점 $P(t,\ 4)$에서 그은 한 접선의 기울기를 m이라 하면 이 접선의 방정식은

$y=m(x-t)+4 \Leftrightarrow mx-y-mt+4=0$

이고, 이 접선에서 원점까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|mt-4|}{\sqrt{m^2+1}}=3 \Leftrightarrow |mt-4|=3\sqrt{m^2+1}$$
$$\Leftrightarrow\ 9m^2+9=t^2m^2-8tm+16$$
$$\Leftrightarrow\ (t^2-9)m^2-8tm+7=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$f(t)=\dfrac{7}{t^2-9}$ 입니다.

ㄱ) 위의 내용으로부터 $f(\sqrt{2})=\dfrac{7}{2-9}=-1$

(참)

ㄴ) $f'(t)=-\dfrac{14t}{(t^2-9)^2}$ 이고

$$f''(t)=-\frac{14(t^2-9)^2-56t^2(t^2-9)}{(t^2-9)^4}$$
$$=-\frac{(t^2-9)(14(t^2-9)-56t^2)}{(t^2-9)^4}$$
$$=\frac{14(t^2-9)(3t^2+9)}{(t^2-9)^4}$$

열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 $t^2-9<0$이고

$(t^2-9)^4>0,\ \ 3t^2+9>0$이므로

열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 $f''(t)>0$입니다.

(참)

ㄷ) ㄴ으로부터

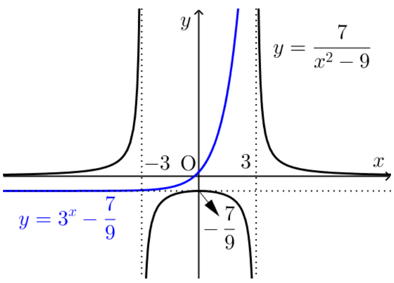
(1) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 유일한 극값(극댓값)을 가짐을 알 수 있고,

(2) 열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 위로 볼록한 그래프의 형태를 갖습니다.

(3) 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 y축 대칭인 그래프의 형태를 갖고,

(4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$이므로 x축을 점근선으로 갖습니다.

이를 이용하여 두 함수 $y=f(x)$와 $y=3^x-\dfrac{7}{9}$의 그래프를 그리면 다음과 같습니다.



곡선 $y=3^x-\dfrac{7}{9}$는 그림과 $y=-\dfrac{7}{9}$를 점근선으로 가지므로 두 곡선은 $x>3$일 때 단 하나의 교점만 갖게 됩니다.

따라서 방정식

$$9f(x)=3^{x+2}-7\ \Leftrightarrow\ f(x)=3^x-\frac{7}{9}$$

는 단 하나의 실근을 갖습니다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ입니다.

정답: ③

Problem #21

21. 자연수 n에 대하여 열린 구간 $(3n-3,\ 3n)$에서 함수

$$f(x)=(2x-3n)\sin 2x-(2x^2-6nx+4n^2-1)\cos 2x$$

가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소가 되는 모든 α의 값의 합을 a_n이라 하자.
$\cos a_m=0$이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값을 l이라 할 때, $\sum\limits_{k=1}^{l+2}a_k$의 값은? [4점]

① $7+\dfrac{45}{2}\pi$ ② $8+\dfrac{45}{2}\pi$ ③ $7+\dfrac{47}{2}\pi$ ④ $8+\dfrac{47}{2}\pi$ ⑤ $7+\dfrac{49}{2}\pi$

Solution

$$f'(x)=2\sin2x+(4x-6n)\cos2x-(4x-6n)\cos2x$$
$$+(4x^2-12nx+8n^2-2)\sin2x$$
$$=4(x^2-3nx+2n^2)\sin2x$$
$$=4(x-n)(x-2n)\sin2x$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=n,\ \ x=2n,\ \ \sin2x=0$일 때 극값을 갖습니다. ⋯ (*)

이때 열린 구간 $(3n-3,\ 3n)$에 $x=n$ 또는 $x=2n$이 속하게 되면 $\cos a_m=0$이 되는 것은 불가능합니다.

$(\because\ \ \cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2k-1}{2}\pi$ (k는 정수))

$\therefore\ \cos a_m = 0 \Rightarrow 3m-3 \geq 2m \Leftrightarrow m \geq 3$

실제로 $m=3$일 때

$\sin 2x = 0\ (6<x<9) \Rightarrow x=2\pi$ 또는 $x=\dfrac{5\pi}{2}$

즉, $a_3 = 2\pi + \dfrac{5\pi}{2} = \dfrac{9\pi}{2}$이므로 $\cos a_3 = 0$

$\therefore\ l=3$

1) $n=1$일 때, $(*)$로부터

$f'(x)=0\ (0<x<3) \Rightarrow x=1,\ x=2,\ x=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ a_1 = 3+\dfrac{\pi}{2}$

2) $n=2$일 때,

$f'(x)=0\ (3<x<6) \Rightarrow x=4,\ x=\pi,\ x=\dfrac{3\pi}{2}$

$\therefore\ a_2 = 4+\dfrac{5\pi}{2}$

3) $3 \leq n \leq 5$일 때,

$f'(x)=0$을 만족하는 x는 $x=\dfrac{2k-1}{2}\pi$ (k는 정수)

꼴의 수뿐이고,

$f'(x)=0$인 x의 최솟값은 $n=3$일 때 $x=2\pi$,

x의 최댓값은 $n=5$일 때 $x=\dfrac{9\pi}{2}$

$$\left(\because \pi < 3.2 \Rightarrow \frac{9\pi}{2} < 15\right)$$

$$\therefore\ a_3+a_4+a_5 = 2\pi + \frac{5\pi}{2} + \dots + \frac{9\pi}{2} = \frac{39\pi}{2}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{l+2} a_k = \sum_{k=1}^{5} a_k$$

$$= \left(3+\frac{\pi}{2}\right) + \left(4+\frac{5\pi}{2}\right) + \frac{39\pi}{2} = 7 + \frac{45\pi}{2}$$

정답: ①

Problem #26

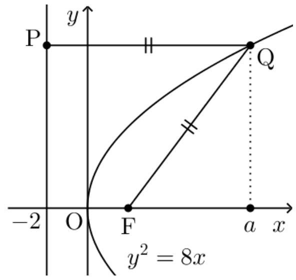
26. 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(-2, k)$와 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF}}=10$일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [4점]

Solution

점 P는 포물선 $y^2=8x$의 준선 위의 점이고

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QF}}$이므로 포물선의 정의에 의하여

점 Q의 y좌표는 k입니다.



점 Q의 x좌표를 a라 두면

$\overline{\mathrm{PQ}} = a+2 = 10 \Rightarrow a=8$

점 Q는 포물선 위의 점이고

$k>0$이므로

$k^2 = 8\times 8 \quad \therefore\ k=8$

정답: 8

Problem #27

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이고 $g(2)=1$, $g(5)=5$일 때, $\displaystyle\int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx$의 값을 구하시오. [4점]

Solution

역함수의 미분법에 의하여 $f'(x) = \dfrac{1}{g'(f(x))}$이고,

$g(2)=1,\ g(5)=5 \Rightarrow f(1)=2,\ f(5)=5$ 이므로

$$(\text{주어진 식}) = \int_1^5 \frac{40f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx$$

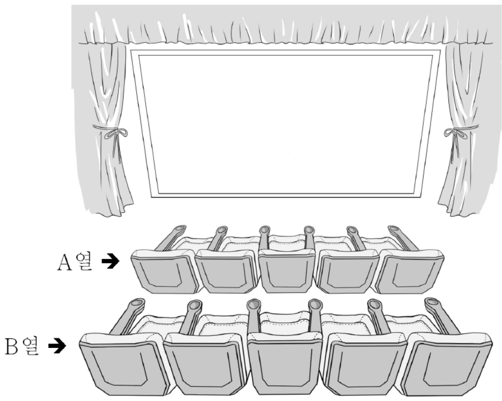
$$= 40\int_1^5 \frac{d}{dx}\left\{-\frac{1}{f(x)}\right\}dx = 40\left[-\frac{1}{f(x)}\right]_1^5$$

$$= 40\left(\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(5)}\right) = 40\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = 12$$

정답: 12

Problem #28

28. 할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아이로 구성된 5명의 가족이 영화를 보려고 한다. 영화관의 좌석은 그림과 같이 A, B 두 개의 열로 이루어져 있고, 각 열에는 5개의 좌석이 있다. A열에는 할아버지와 할머니가 이웃하여 앉고, B열에는 아버지, 어머니, 아이가 앉되 아이는 아버지 또는 어머니와 이웃하고, 아이의 바로 앞에 있는 좌석은 비어 있도록 한다. 이때, 5명이 모두 좌석에 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 2명이 같은 열의 바로 옆에 앉을 때만 이웃한 것으로 본다. 또한 한 좌석에는 한 명만 앉고, 다른 관람객은 없다.) [4점]



Solution

아이 옆에는 아버지 또는 어머니가 앉아 있어야 하므로 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각합니다.

1) 아이가 B열의 맨 왼쪽과 오른쪽에 앉은 경우

A열					
B열					

A열					
B열					

(아이: 노란색 / 할아버지, 할머니: 초록색)

할아버지와 할머니가 앉는 방법의 수는 $3\times 2! = 6$이고

아버지와 어미니가 앉는 방법의 수는

B열의 남은 네 자리가 앉는 방법의 수에서

아이와 떨어진 세 자리(회색 자리)에 앉는 방법의 수를

빼면 되므로 $_4P_2 - {_3P_2} = 6$

따라서 5명이 좌석에 앉는 방법의 수는 $6\times 6 = 36$

2) 아이가 B열의 $2, 3, 4$번째 자리에 앉은 경우

A열					
B열					

A열					
B열					

A열					
B열					

할아버지와 할머니가 앉는 방법의 수는 $2\times 2! = 4$이고

아버지와 어머니가 앉는 방법의 수는

B열의 남은 네 자리가 앉는 방법의 수에서

아이와 떨어진 두 자리(회색 자리)에 앉는 방법의 수를

빼면 되므로 $_4P_2 - {_2P_2} = 10$

따라서 5명이 자리에 앉는 방법의 수는 $4\times 10 = 40$

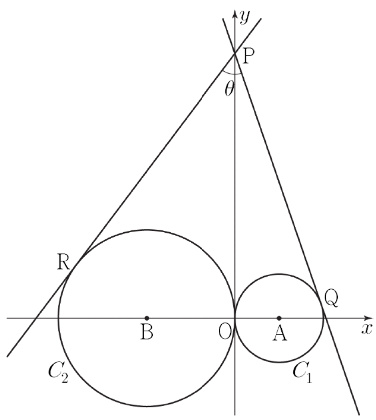
1), 2)에서 5명이 모두 좌석에 앉는 방법의 수는

$2\times 36 + 3\times 40 = 192$

정답: 192

Problem #29

29. 그림과 같이 중심이 점 $A(1, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1과 중심이 점 $B(-2, 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원 C_2가 있다. y축 위의 점 $P(0, a)\,(a>\sqrt{2})$에서 원 C_1에 그은 접선 중 y축이 아닌 직선이 원 C_1과 접하는 점을 Q, 원 C_2에 그은 접선 중 y축이 아닌 직선이 원 C_2와 접하는 점을 R라 하고 $\angle RPQ = \theta$라 하자. $\tan\theta = \frac{4}{3}$일 때, $(a-3)^2$의 값을 구하시오. [4점]



Solution

$\angle \mathrm{OPB} = \alpha$, $\angle \mathrm{OPA} = \beta$라 하면

직각삼각형 BOP와 AOP에서 $\tan\alpha = \dfrac{2}{a}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{a}$

$\therefore\ \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{3/a}{1-2/a^2} = \dfrac{3a}{a^2-2}\ \cdots\ (*)$

이때 원과 접선의 성질에 의해 $\theta = 2(\alpha+\beta)$이므로

$\tan(\alpha+\beta) = t$라 하면

$\tan\theta = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow\ 2t^2+3t-2=0,\ (2t-1)(t+2)=0$

$a > \sqrt{2}$에서 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $0 < \tan\dfrac{\theta}{2} < 1$

$\therefore\ t = \dfrac{1}{2}$

$(*)$로부터 $\dfrac{3a}{a^2-2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ a^2-2 = 6a\ \Rightarrow\ a^2-6a-2=0$

$\therefore\ (a-3)^2-11=0,\ (a-3)^2=11$

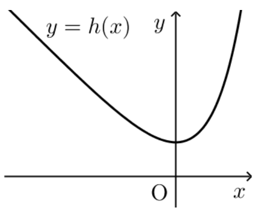
정답: 11

Problem #30

30. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 정수)에 대하여
함수 $g(x)=e^{f(x)}-f(x)$는
$x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$ $(\alpha<-1<\beta)$에서만 극값을 갖는다.
함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2일 때,
$\{f(-1)\}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]

Solution

함수 $h(x)=e^x-x$에 대하여



$g(x)=h(f(x))$이고,

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \infty$입니다.

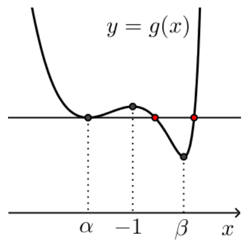
따라서 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극소이고,

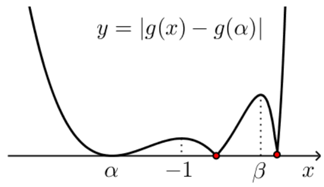
$x=-1$에서 극대입니다.

따라서 다음 그림과 같이 함수 $|g(x)-g(\alpha)|$가

미분가능하지 않은 점의 개수가 2이려면 $g(\alpha) > g(\beta)$

이어야 합니다.





$g'(x) = f'(x)e^{f(x)} - f'(x) = f'(x)\left(e^{f(x)}-1\right)$에서

$g'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0$ 또는 $f(x)=0$

또한, $g'(x)=0$인 x의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가

바뀌어야 하므로

함수 $f(x)$의 극점의 개수와 곡선 $y=f(x)$와 x축과의

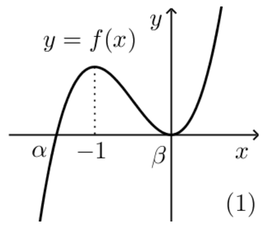
교점의 개수의 합이 3이어야 합니다.

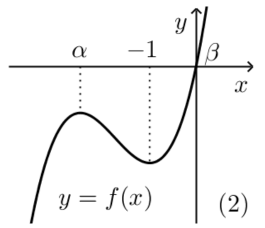
> $g'(x) = f'(x)\left(e^{f(x)}-1\right)$에서
>
> 1) $f'(x)$의 부호가 $x=a$의 좌우에서 바뀌는 경우
> 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 가지므로 $f(x)$의
> 부호는 $x=a$ 좌우에서 바뀌지 않습니다.
>
> 2) $f(x)$의 부호가 $x=a$의 좌우에서 바뀌는 경우
> 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 증가하거나 감소하므로
> $f'(x)$의 부호는 $x=a$에서 변하지 않습니다.
>
> 따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지거나
> x축에서 만나는 경우 $g(x)$는 극값을 갖습니다.

$f(0)=0$이므로 $\beta=0$이고,

위의 조건들을 만족하는 삼차함수 $f(x)$의 그래프로는

다음과 같은 경우가 가능합니다.





이때 $g(\alpha) > g(\beta)$이므로 $f(\alpha) \neq f(\beta) = f(0)$입니다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 (2)와 같습니다.

따라서

$f'(x) = 3(x-\alpha)(x+1) = 3x^2 + 3(-\alpha+1)x - 3\alpha$

$\Rightarrow\ f(x) = x^3 + \frac{3}{2}(-\alpha+1)x^2 - 3\alpha x$

$\qquad\qquad = x^3 + ax^2 + bx$

$\frac{3}{2}(-\alpha+1) = a \Rightarrow b = -3\alpha = 2a-3$

여기서 $f(\alpha) < 0$이므로

$\alpha^3 + \frac{3}{2}(-\alpha+1)\alpha^2 - 3\alpha^2$

$= -\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha^2 = -\frac{1}{2}\alpha^2(\alpha+3) < 0 \Rightarrow \alpha > -3$

문제의 조건에 의하여 $\alpha < -1$이므로

$\therefore\ -3 < \alpha < -1$

$\Rightarrow\ 3 < a = \frac{3}{2}(-\alpha+1) < 6$

a는 정수이므로 $a=4$ 또는 $a=5$입니다.

$f(-1) = a-b-1 = a-(2a-3)-1 = 2-a$

$\Rightarrow\ \{f(-1)\}^2 = (a-2)^2$

따라서 $\{f(-1)\}^2$의 최댓값은 $a=5$일 때 9입니다.

정답: 9

'나' 형

Problem #14

14. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_9=|S_3|=27$일 때, a_{10}의 값은? [4점]

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

Solution

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이므로

$S_9 = -S_3 = 27$이어야 합니다.

등차중항의 성질에 의하여

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = -27 \Rightarrow a_2 = -9$

$S_9 = a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 9a_5 = 27 \Rightarrow a_5 = 3$

이 등차수열의 공차를 d라고 하면

$a_2 + 3d = a_5 \Rightarrow d = 4$

$\therefore\ a_{10} = a_5 + 5d = 3 + 20 = 23$

정답: ①

Problem #15

15. 전체집합 $U=\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 두 부분집합 A, B가

$A^C \subset B,\quad n(A\cap B)=2$

를 만족시킨다. 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$의 모든 원소의 합의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

Solution

$(A\cup B)-(A\cap B) = (A-B)\cup(B-A)$ 에서

$B-A = B\cap A^C = A^C$

$$(A-B)\cup(B-A) = (A\cap B^C)\cup A^C$$
$$= (A\cup A^C)\cap(B^C\cup A^C)$$
$$= (A\cap B)^C$$

$n(A\cap B) = 2$이므로

집합 $(A\cup B)-(A\cap B) = (A\cap B)^C$의 원소의 합의 최댓값은 $5+7+9 = 21$, 최솟값은 $1+3+5 = 9$ 입니다.

$\therefore\ M+m = 21+9 = 30$

정답: ⑤

Problem #16

16. 두 실수 a, b에 대하여 $2^a=3, 6^b=5$일 때, 2^{ab+a+b}의 값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

Solution

주어진 조건으로부터 $2^{a+1}=6,\ 6^{b+1} = 30$

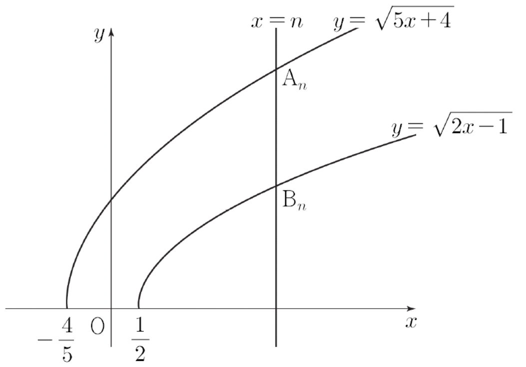
$$\Rightarrow 6^{b+1} = \left(2^{a+1}\right)^{b+1} = 2^{(a+1)(b+1)}$$
$$= 2^{ab+a+b+1} = 30$$

$\therefore\ 2^{ab+a+b} = 15$

정답: ①

Problem #17

17. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=\sqrt{5x+4}$, $y=\sqrt{2x-1}$과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 선분 OA_n의 길이를 a_n, 선분 OB_n의 길이를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{12}{a_n-b_n}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

Solution

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$a_n=\sqrt{n^2+5n+4}$, $b_n=\sqrt{n^2+2n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{12}{a_n-b_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{\sqrt{n^2+5n+4}-\sqrt{n^2+2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12\left(\sqrt{n^2+5n+4}+\sqrt{n^2+2n-1}\right)}{3n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)}{3+\frac{5}{n}}=8$$

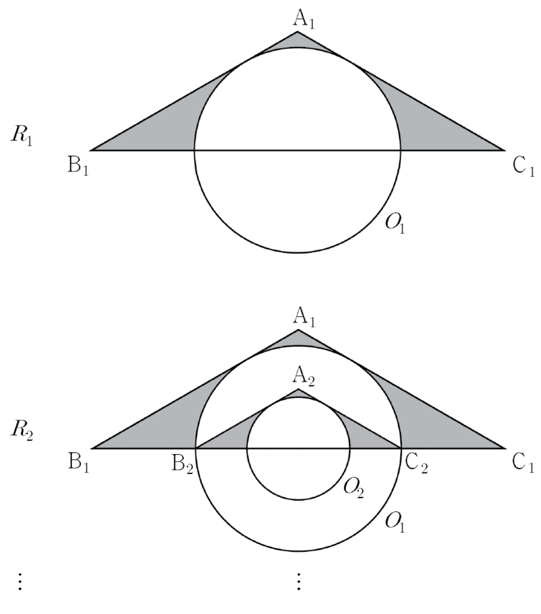
정답: ③

Problem #18

18. $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}=8$이고 $\angle \mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1=120^\circ$인 이등변삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$이 있다. 그림과 같이 중심이 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ 위에 있고 직선 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$과 직선 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$에 동시에 접하는 원 O_1을 그리고 이등변삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

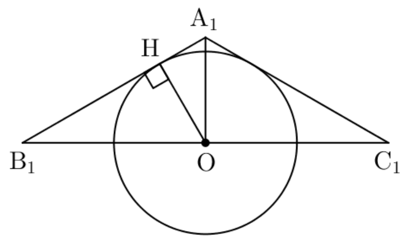
그림 R_1에서 원 O_1과 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$이 만나는 점을 각각 B_2, C_2라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ 내부의 점 A_2를 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$가 $\angle \mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2=120^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 중심이 선분 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$ 위에 있고 직선 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$와 직선 $\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2$에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 이등변삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{32}{3}\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi$　② $\frac{32}{3}\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$　③ $\frac{64}{9}\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi$
④ $\frac{64}{9}\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$　⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

Solution



위 그림과 같이 그림 R_1에서 원의 중심에서

원과 선분 $\mathrm{A_1B_1}$이 접하는 점을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OB_1}} = 4$이고 $\angle \mathrm{OB_1H} = 30^\circ$ 이므로

$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OB_1}}\sin 30^\circ = 2$

즉, 원 O_1의 반지름은 2이고

$\overline{\mathrm{OA_1}} = \overline{\mathrm{OB_1}}\tan 30^\circ = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$이므로

$\therefore\ S_1 = \dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{B_1C_1}}\times\overline{\mathrm{OA_1}} - \dfrac{1}{2}\times 4\pi = \dfrac{16}{\sqrt{3}} - 2\pi$

한편, 그림 R_1에서 색칠된 도형과

그림 R_2에서 새로 색칠된 도형의 닮음비는

$\overline{\mathrm{B_1C_1}} : \overline{\mathrm{B_2C_2}} = 2:1$이고,

비슷한 방법으로 그림 R_n에서 새로 색칠된 도형과

그림 R_{n+1}에서 새로 색칠된 도형의 닮음비도 $2:1$

입니다.

따라서 R_{n+1}에서 새로 색칠된 도형의 넓이에 대한

그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이의 비는

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$입니다.

등비급수 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{16}{\sqrt{3}} - 2\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{64}{9}\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$$

정답: ③

Problem #19

19. 좌표평면에서 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-5$, $g(x)=\sqrt{x+1}$ 의 그래프에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=-5$와 만나지 않는다.

ㄴ. $0 \le x \le 8$일 때, 곡선 $y=g(x)$ 위에 있는 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 3이다.

ㄷ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=8$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 61이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution

ㄱ) 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 5$의 그래프는 $y=-5$를

점근선으로 가지므로 곡선 $y=f(x)$는 $y=-5$와

만나지 않습니다.

(참)

ㄴ) $0 \le x \le 8$일 때, $g(x)$의 값이 정수인 경우는

$x+1$이 제곱수인 경우이므로

$x=0$, $x=3$, $x=8$의 세 가지 경우만 가능합니다.

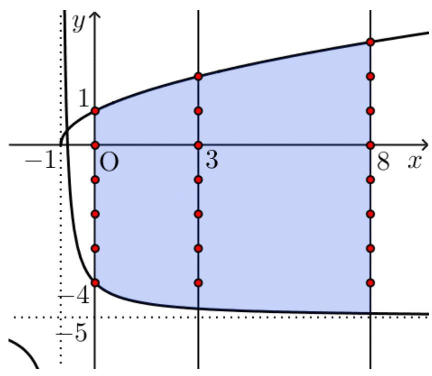
따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인

점의 개수는 3입니다.

(참)

ㄷ) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 그리고,

ㄷ에서 주어진 영역을 표시하면 아래와 같습니다.



위와 같이 표시한 영역에서

1) $x=0,\ 1,\ 2$일 때

x좌표와 y좌표가 정수인 점의 개수는 6

2) $x=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$일 때

x좌표와 y좌표가 정수인 점의 개수는 7

3) $x=8$일 때

x좌표와 y좌표가 정수인 점의 개수는 8

이므로 주어진 영역에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $3\times6+5\times7+8=61$입니다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ입니다.

정답: ⑤

Problem #20

20. 다음은 40 이하의 서로 다른 두 자연수 $a,\ b$의 최대공약수가 3인 $a,\ b$의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하는 과정이다.

> 40 이하의 서로 다른 두 자연수 $a,\ b$의 최대공약수가 3이므로 서로소인 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $a=3m,\ b=3n$이라 하면 m과 n은 13 이하의 자연수이다.
> 순서쌍 $(a,\ b)$를 선택하는 경우는
> '(ⅰ) 서로 다른 두 자연수 $m,\ n$을 선택하는 경우'에서
> '(ⅱ) 서로 다른 두 자연수 m과 n이 서로소가 아닌 경우'를 제외하면 된다.
>
> (ⅰ)의 경우 :
> 13개의 자연수에서 서로 다른 두 자연수 $m,\ n$을 선택하는 경우의 수는 (가) 이다.
> (ⅱ)의 경우 :
> m과 n이 2의 배수인 경우의 수는 ${}_6\mathrm{P}_2$이고,
> m과 n이 3의 배수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2$이고,
> m과 n이 5의 배수인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{P}_2$이다.
> 이 때, m과 n이 (나) 의 배수인 경우가 중복되므로 서로 다른 두 자연수 m과 n이 서로소가 아닌 경우의 수는 (다) 이다.
>
> 따라서 40 이하의 서로 다른 두 자연수 $a,\ b$의 최대공약수가 3인 $a,\ b$의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 (가) $-$ (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p,\ q,\ r$라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 192　② 196　③ 200　④ 204　⑤ 208

Solution

(가): 13개의 자연수에서 서로 다른 두 자연수 $m,\ n$을 선택하는 경우의 수는 ${}_{13}\mathrm{P}_2=156$

$\therefore\ p=156$

(나), (다): m과 n이 모두 6의 배수인 경우는 m과 n이 2의 배수인 경우와 3의 배수인 경우에서 중복해서 세게 되므로 한 번 빼주어야 합니다.

m과 n이 모두 6의 배수인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{P}_2=2$

이므로 서로 다른 두 자연수 m과 n이 서로소가 아닌 경우의 수는 ${}_6\mathrm{P}_2+{}_4\mathrm{P}_2+{}_2\mathrm{P}_2-{}_2\mathrm{P}_2=42$

$\therefore\ q=6,\ r=42$

$\therefore\ p+q+r=156+6+42=204$

정답: ④

Problem #21

21. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\dfrac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}\ (k>0)$$

에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) & (x=k)\\(x-k)^2 & (x\neq k)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 상수 k에 대하여 $(g\circ f)(k)$의 값은? [4점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

Solution

등비수열의 극한에서

(1) $\dfrac{x-1}{k}>1$ 또는 $\dfrac{x-1}{k}<-1$인 경우

($x<-k+1$ 또는 $x>k+1$인 경우)

(2) $-1<\dfrac{x-1}{k}<1$인 경우

($-k+1<x<k+1$인 경우)

(3) $\dfrac{x-1}{k}=1$인 경우 ($x=k+1$인 경우)

(4) $\dfrac{x-1}{k}=-1$인 경우 ($x=-k+1$인 경우)

로 나누어 생각하면

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<-k+1 \text{ or } x>k+1) \\ -1 & (-k+1<x<k+1) \\ 0 & (x=k+1 \text{ or } x=-k+1) \end{cases}$$

이고,

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to k}(x-k)^2=f(f(k)) \Rightarrow f(f(k))=0$

따라서 $f(k)=k+1$ 또는 $f(k)=-k+1$입니다.

1) $f(k)=k+1$인 경우

(i) $k+1=1 \Rightarrow k=0$이고 이는 문제의 조건($k>0$)을 만족시키지 않습니다.

(ii) $k+1=-1 \Rightarrow k=-2$이고 이때 부등식 $-k+1<k<k+1$은 성립하지 않으므로 이 k의 값은 주어진 조건을 만족시키지 않습니다.

(iii) $k+1=0 \Rightarrow k=-1$이고 이때 방정식 $k=k+1$ 또는 $k=-k+1$이 성립하지 않으므로 이 k의 값은 주어진 조건을 만족시키지 않습니다.

2) $f(k)=-k+1$인 경우

(i) $-k+1=1 \Rightarrow k=0$이고 이는 문제의 조건을 만족시키지 않습니다.

(ii) $-k+1=-1 \Rightarrow k=2$이고 이때 부등식 $-k+1<k<k+1$이 성립하므로 이 k의 값은 주어진 조건을 만족시킵니다.

(iii) $-k+1=0 \Rightarrow k=-1$이고 이때 방정식 $k=k+1$ 또는 $k=-k+1$이 성립하지 않으므로 이 k의 값은 주어진 조건을 만족시키지 않습니다.

1), 2)에서 $k=2$입니다.

$\therefore\ (g\circ f)(k)=g(-1)=(-1-k)^2=9$

정답: ⑤

Problem #26

26. 두 상수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2-1}=2,\quad \lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{x^2-1}=b$$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

Solution

극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1-\frac{1}{x^2}}=a=2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=1=b$$

$\therefore\ a+b=3$

정답: 3

Problem #27

27. 세 실수 3, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루고 $\log_a 3b+\log_3 b=5$를 만족시킨다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

Solution

등비중항의 성질에 의하여 $a^2=3b$이므로

$\log_a 3b+\log_3 b=\log_a a^2+\log_3 b=2+\log_3 b=5$

$\therefore\ \log_3 b=3 \Rightarrow b=27$

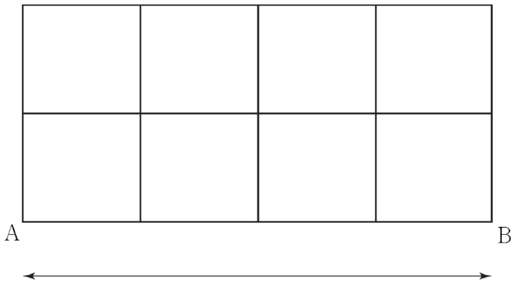
$a^2=3b$에서 $a=9$ ($\because\ a>0$ - 로그의 밑 조건)

$\therefore\ a+b=9+27=36$

정답: 36

Problem #28

28. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 8개로 이루어진 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점에 도착할 때, 가로 방향으로 이동한 길이의 합이 4이고 전체 이동한 길이가 12인 경우의 수를 구하시오. (단, 한 번 지나간 도로는 다시 지나지 않는다.) [4점]



Solution

문제의 조건을 만족하는 경우는 도로망을 따라 → 방향으로 4번, ↑ 방향으로 4번, ↓방향으로 4번 이동한 경우입니다.

이때 한 번 지나간 도로는 다시 지나지 않으므로
- ↑ 방향의 이동과 ↓방향의 이동은 인접하지 않고,
- 진행 생황에서 ↓방향의 이동 횟수가 ↑ 방향의 이동 횟수보다 많을 수 없습니다.

이에 따라 가능한 ↑ 방향과 ↓방향의 이동 순서는 다음 경우밖에 없습니다.

↑ ↑ / ↓ ↓ / ↑ ↑ / ↓ ↓

(만약 여기에서 ↑방향과 ↓방향의 이동 순서를 한 군데라도 바꾸게 되면 ↑방향과 ↓방향의 이동이 연속하여 발생하는 부분의 개수가 5 이상이 되므로 문제의 조건을 만족시킬 수 없게 됩니다.)

따라서 문제에서 구하는 경우의 수는 위와 같이 배열된 ↑과 ↓의 사이와 양 끝에 생긴 9개의 자리 중에 ↑과 ↓가 인접한 세 부분('/'로 표시한 부분)에는 반드시 1개 이상의 → 방향의 이동이 들어가도록 4개의 → 방향을 배열하는 방법의 수와 같으므로 9입니다.

정답: 9

Problem #29

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) a, b, c는 모두 짝수이다.
(나) $a \times b \times c = 10^5$

Solution

$10^5 = 2^5 \times 5^5$ 에서

$a = 2^{x_1} \times 5^{y_1}$, $b = 2^{x_2} \times 5^{y_2}$, $c = 2^{x_3} \times 5^{y_3}$라 하면

a, b, c는 모두 짝수이므로

x_1, x_2, x_3를 정하는 방법의 수는 방정식

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$의 자연수 해의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$이고,

y_1, y_2, y_3를 정하는 방법의 수는 방정식

$y_1 + y_2 + y_3 = 5$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = 21$입니다.

따라서 문제의 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $6 \times 21 = 126$입니다.

정답: 126

Problem #30

30. 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x) = ax + b,$$

$$g(x) = \frac{1}{ax+b-2} + 3$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 좌표평면에 나타낸 영역을 R라 하자.

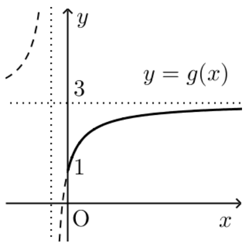
(가) $x > 0$일 때, $1 < g(x) < 3$
(나) 두 함수 $y = f(x)$와 $y = \dfrac{1}{x-2} + 3$의 그래프의 교점이 제4사분면 위에는 있지 않다.

영역 R에 속하는 점 (a, b)에 대하여 $a^2 + b^2$의 최댓값을 M이라 할 때, $100M$의 값을 구하시오. (단, $a \neq 0$) [4점]

Solution

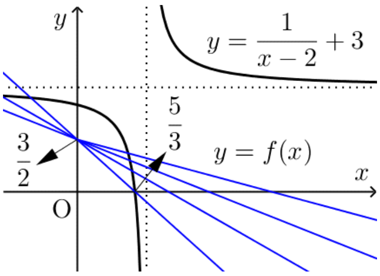
(가) 조건에서 $x>0$일 때 $1<g(x)<3$이므로

유리함수 $g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x>0$일 때 점근선 $y=3$ 아래에 있어야 하고, $g(0)=1$이어야 합니다.



$\therefore\ a<0,\ b=\dfrac{3}{2}$

이때 함수 $y=f(x)$와 $y=\dfrac{1}{x-2}+3$의 그래프가 제4사분면에서 교점을 가지지 않으려면



위 그림과 같이 직선 $y=f(x)$의 x절편이 유리함수 $y=\dfrac{1}{x-2}+3$의 x절편인 $\dfrac{5}{3}$보다 크거나 같아야 합니다.

$f(x)=ax+\dfrac{3}{2}$에서

직선 $y=f(x)$의 x절편은 $-\dfrac{3}{2a}$이므로

$-\dfrac{3}{2a}\ge\dfrac{5}{3} \Rightarrow a\ge-\dfrac{9}{10} \qquad \therefore\ -\dfrac{9}{10}\le a<0$

$\therefore\ a^2+b^2\le\left(-\dfrac{9}{10}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{306}{100}$

$\therefore\ M=\dfrac{306}{100},\quad 100M=306$

정답: 306