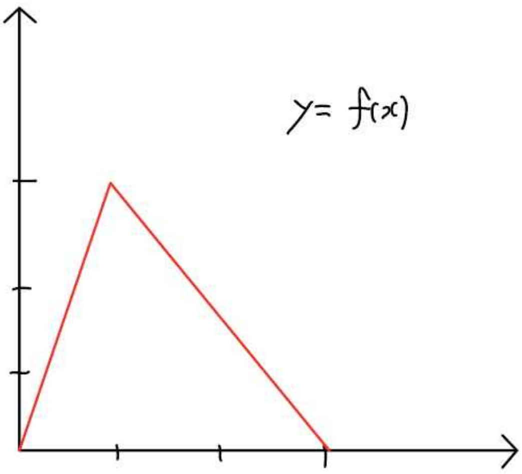
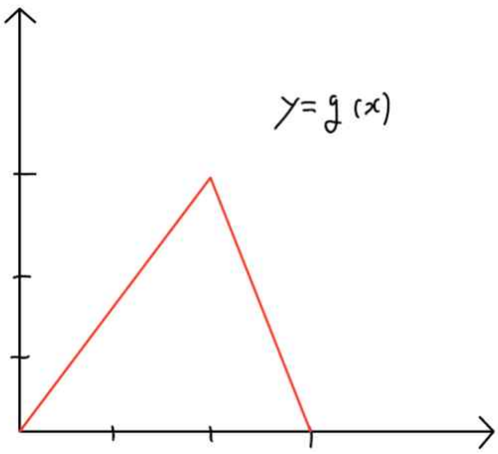
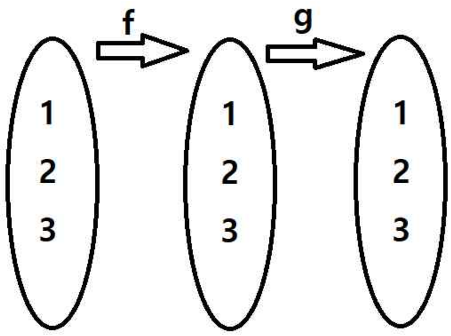
합성 함수 그래프 그리기 by 파급 효과

g(f(x)) 합성함수를 그려보자. (눈금 한 칸 = 1)



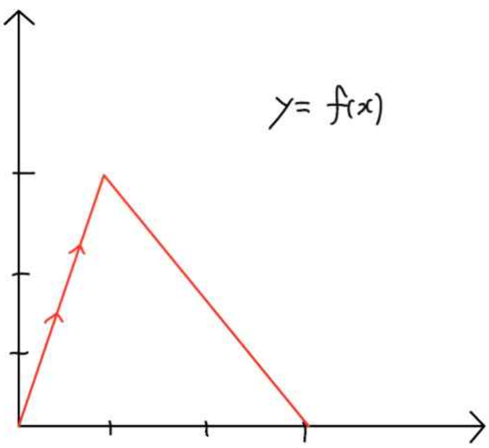


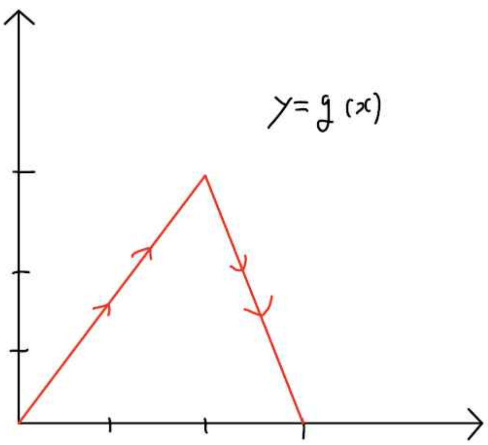
어떻게 그렸는가? f(x), g(x), g(f(x)) 정의역 구간을 열심히 나누고 직선의 방정식을 열심히 구해 가며 그렸는가? 이래도 답이 나오긴 하지만 시간이 좀 걸릴 것이다. 이제 좀 더 효율적인 방법을 알려주도록 하겠다.

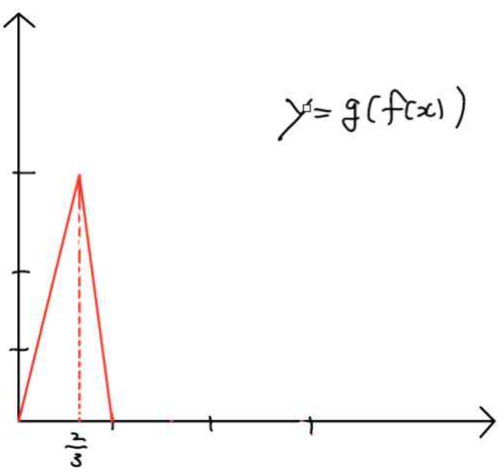


y=g(f(x))의 정의역은 f(x)의 정의역을 따른다. y=g(f(x))에서 f(x)의 치역은 g(x)의 정의역이 된다. 도식화한 것을 보면 쉽게 이해가 갈 것이다.
(도식화에서는 일부 정의역과 일부 치역만 나타내었다.)

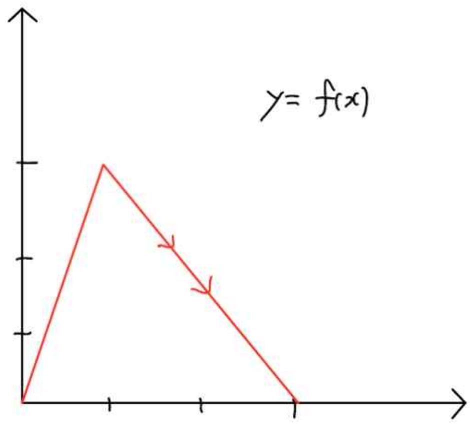
이제 본격적으로 g(f(x))를 그려보자!
먼저 f(x) 정의역을 '증감'을 기준으로 구간을 나눈다.
f(x)는 x=1 기준으로 증감이 바뀌므로 정의역을 [0,1], [1,3] 이렇게 두 구간으로 나눈다.
(이에 대한 이유는 그래프 그리는 과정에서 알게 된다.)

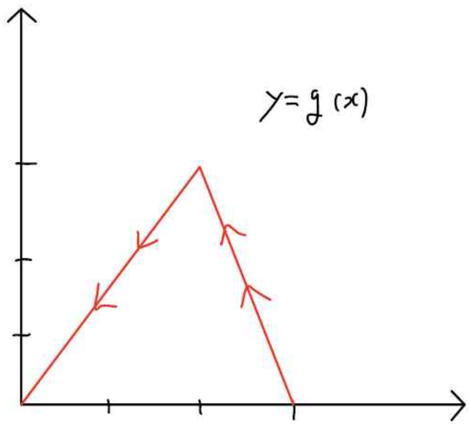


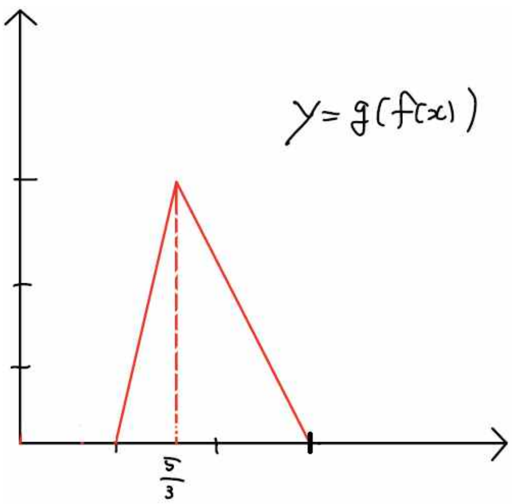




먼저 [0,1]에서 g(f(x))를 그려보자.
[0,1]에서 f(x)의 치역은 [0,3]이 된다.
f(x)의 치역은 g(x)의 정의역이 되므로
g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 '그래프 개형'을
g(f(x))의 정의역 [0,1]에 그리면 된다.
따라서 그려지는 그래프 개형은 왼쪽과 같다.
(보다시피 g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 그래프가 scale에 맞게 잘 축소되었다.)



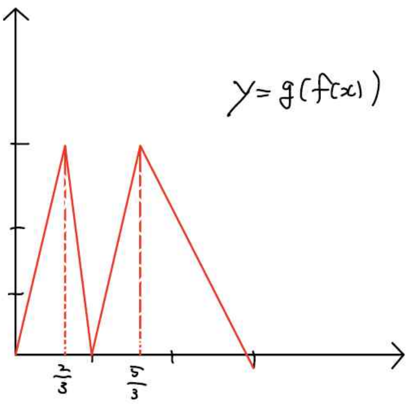




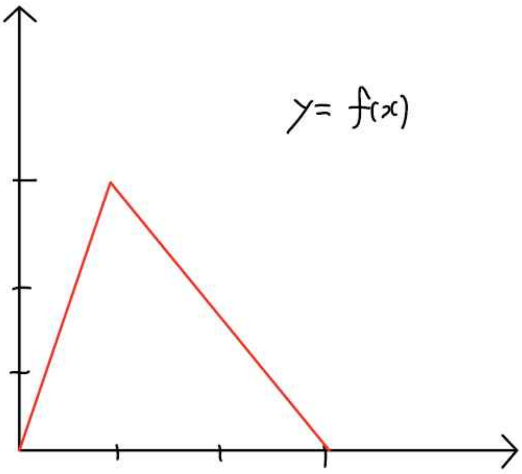
다음으로 [1,3]에서 g(f(x))를 그려보자.
[1,3]에서 f(x)의 치역은 [0,3]이 된다.
f(x)의 치역은 g(x)의 정의역이 되므로
g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 '그래프 개형'을
g(f(x))의 정의역 [1,3]에 그리면 된다.
하지만 이번에는 좀 다르다!
[0,1]에서는 f(x)는 증가하므로 g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 '그래프 개형'을 '정방향'으로 그려야했다.
그러나 [1,3]에서 f(x)는 감소하므로 g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 '그래프 개형'을 '역방향'으로 그려야 한다.

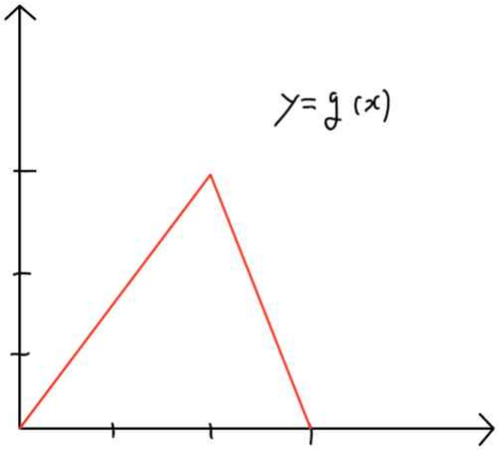
'역방향'으로 그린다는 말은 g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 '그래프 개형'을 [3,0] 방향으로 되감듯이 g(f(x))의 정의역 [1,3]에 그리면 된다는 것이다.
(f(x), g(x)위의 화살표를 보면 이해가 쉽다.)

따라서 그려지는 그래프 개형은 위와 같다. (보다시피 g(x)에서 정의역 [3,0](역방향이므로)에 해당하는 그래프가 scale에 맞게 잘 축소되었다.) 최종적으로 y=g(f(x)) 그래프는 밑과 같다.

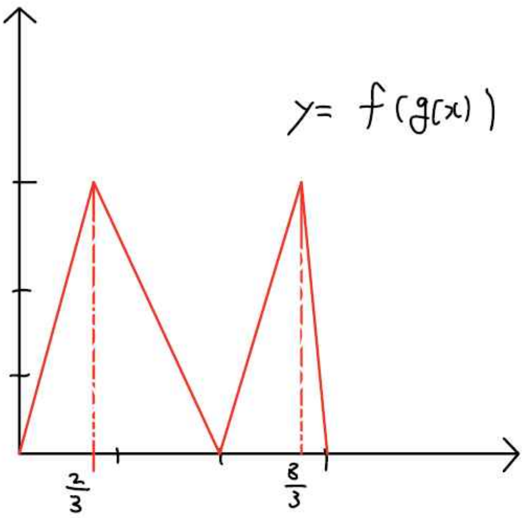


이번에는 f(g(x)) 합성함수를 그려보자. (눈금 한 칸 = 1)

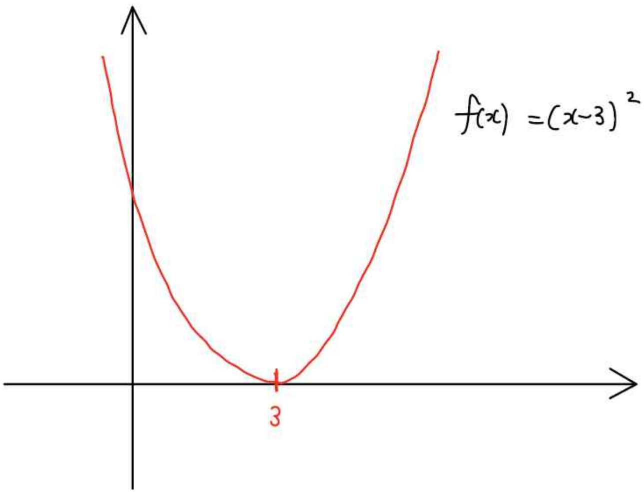




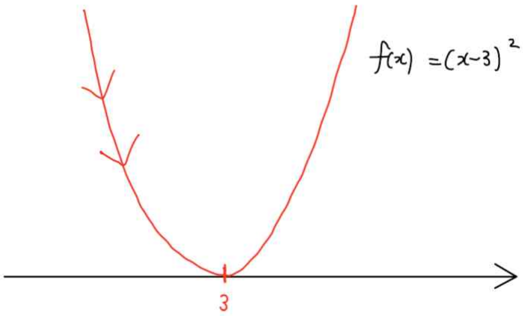
위에서 배운대로 잘 따라한다면 이와 같은 그래프가 나온다.(직접 꼭 해봐라!)

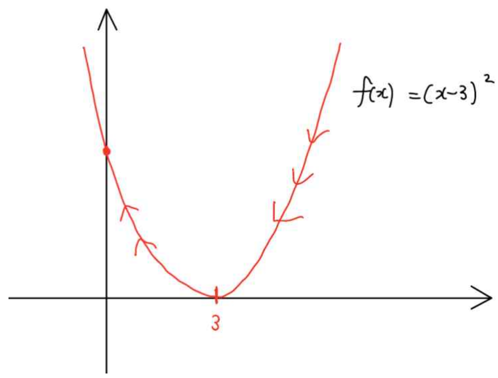


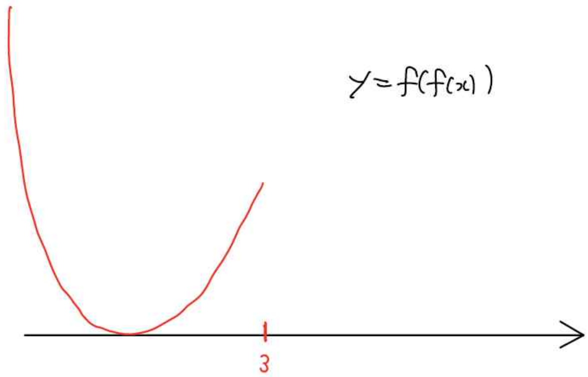
f(x) 그래프가 밑과 같을 때 f(f(x))를 그려보자.



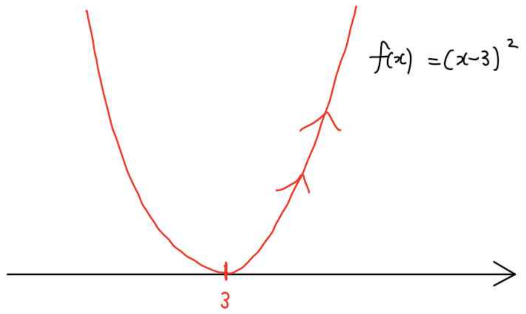
이제 본격적으로 $f(f(x))$를 그려보자!
먼저 $f(x)$ 정의역을 '증감'을 기준으로 구간을 나눈다.
$f(x)$는 $x=3$ 기준으로 증감이 바뀌므로 정의역을 $(-\infty,3]$, $[3,\infty)$ 이렇게 두 구간으로 나눈다.

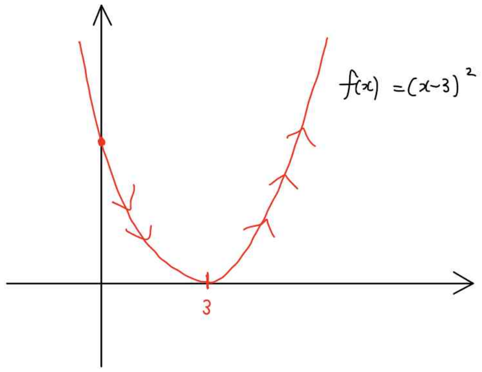


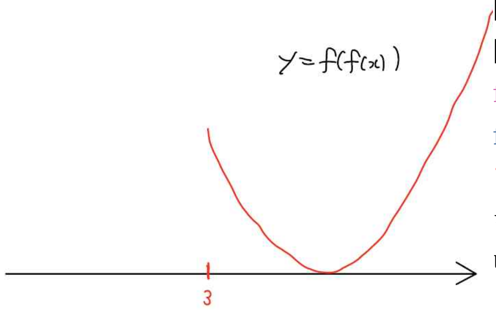




$(-\infty,3]$에서 $f(f(x))$를 그려보자.
$(-\infty,3]$에서 $f(x)$의 치역은 $[0,\infty)$이 된다.
$f(x)$의 치역은 $f(x)$의 정의역이 되므로
$f(x)$에서 정의역 $[0,\infty)$에 해당하는
'그래프 개형'을 '역방향'으로($(-\infty,3]$에서
$f(x)$는 감소하므로) $f(f(x))$의 정의역 $(-\infty,3]$
에 그리면 된다.
따라서 $(-\infty,3]$에서 $f(f(x))$는 왼쪽과 같다.

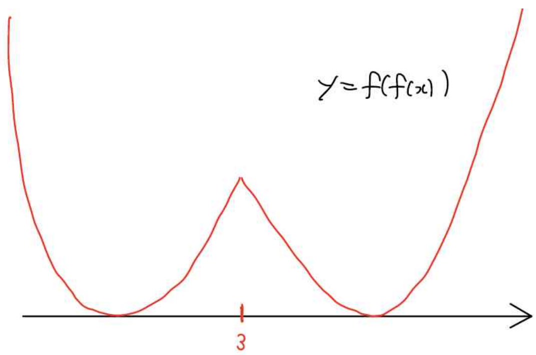




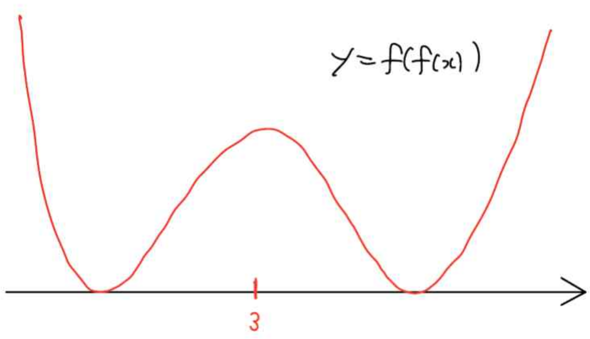


[3,∞)에서 f(f(x))를 그려보자.
[3,∞)에서 f(x)의 치역은 [0,∞)이 된다.
f(x)의 치역은 f(x)의 정의역이 되므로
f(x)에서 정의역 [0,∞)에 해당하는
'그래프 개형'을 '정방향'으로([3,∞)에서 f(x)는 증가하므로) f(f(x))의 정의역 [3,∞)에 그리면 된다.
따라서 [3,∞)에서 f(f(x))는 왼쪽과 같다.

따라서 y=f(f(x))의 그래프 개형은 밑과 같이 그려진다.



알다시피 미분 가능한 함수에 미분 가능한 함수를 합성하면 미분 가능한 함수이다.
따라서 f(x)는 미분 가능한 함수이므로 f(f(x))도 미분 가능한 함수이다.
f(f(x))그래프 개형을 좀 더 예쁘게 그리면 밑과 같다. (x=3에서 미분 가능한걸 추가시켜줌.)



16년도 4평0.번

20. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

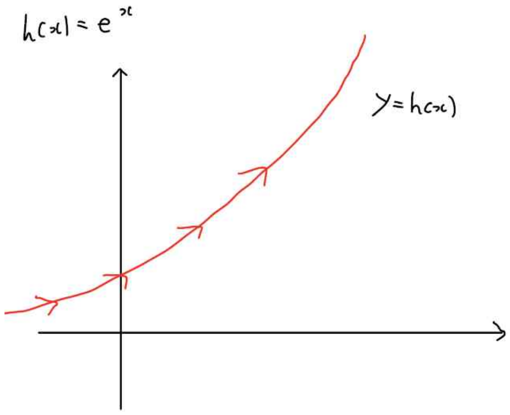
> (가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.
>
> (나) 구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

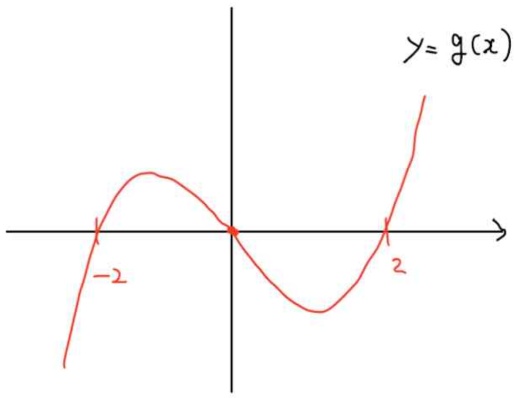
사실 이 문제 푸는게 목적이 아니기에 b = -4a 라는 사실은 이미 구해 놓았다고 가정하고 f(x) 그래프를 그려보자.

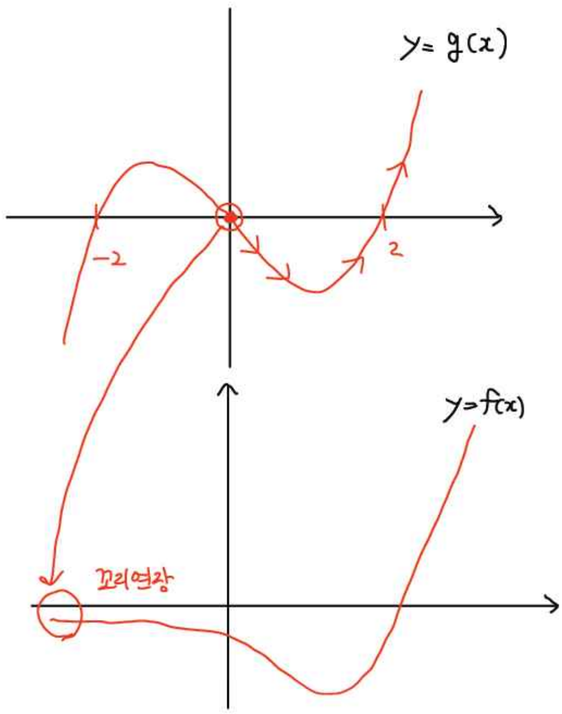
$f(x) = a(e^{3x} - 4e^{x})$ 는 이렇게도 표현이 가능하다.
(나중 되면 이렇게 분리하는게 익숙해질거다.)

$g(x) = a(x^3 - 4x)\ (a > 0)$
$h(x) = e^x$
$f(x) = g(h(x))$

먼저 h(x)의 정의역을 '증감'을 기준으로 구간을 나눈다.
하지만 h(x)는 단조 증가이므로 정의역을 (-∞, ∞) 이렇게 딱 한 구간이다.







(-∞, ∞) 에서 f(x) = g(h(x))를 그려보자.
(-∞, ∞) 에서 h(x)의 치역은 (0,∞)이 된다.
h(x)의 치역은 g(x)의 정의역이 되므로 g(x)에서 정의역 (0,∞)에 해당하는 '그래프 개형'을 '정방향'으로 g(h(x))의 정의역 (-∞, ∞)에 그리면 된다. 여기서 문제가 발생한다. h(x)의 치역이 0을 포함하지 않는다. 따라서 f(x)는 x가 무한히 작으면 g(0)=0에 무한히 가까워진다.
이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

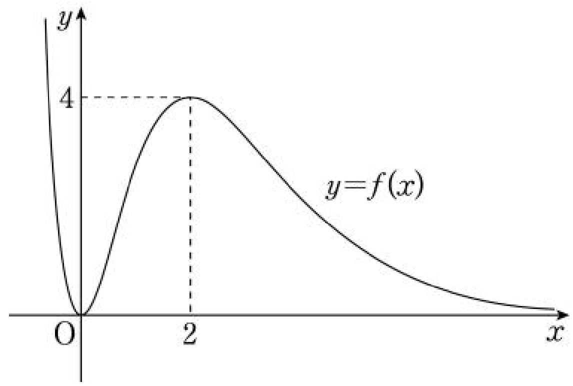
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(h(x)) = \lim_{x \to 0+} g(x) = 0$$

이걸 수식으로 맨날 쓰면 힘드니 왼쪽 그림처럼 '꼬리 연장'이라고 이름을 붙였다.
따라서 그려지는 f(x) 그래프 개형은 왼쪽과 같다.

초월 함수 합성이 있으면 이렇게 점근선이 생길 수도 있다.(문과와 다르게)
이렇게 그래프를 그린다면 (나) 조건에서 $[k,\infty)$에서 단조 증가하여 역함수가 존재한다는 걸 단순히 느낌이 아닌 확신을 줄 수 있다. 이런 식으로 합성함수는 최근 기출에 자주 나온다.
나중에 EBS 선별 겸 기출에 대한 보편적인 태도들을 알려주는 전자책에서 다 다룰 예정이다.

17년 3월 18번이다. 한 번 자유롭게 풀어보자.

18. 그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



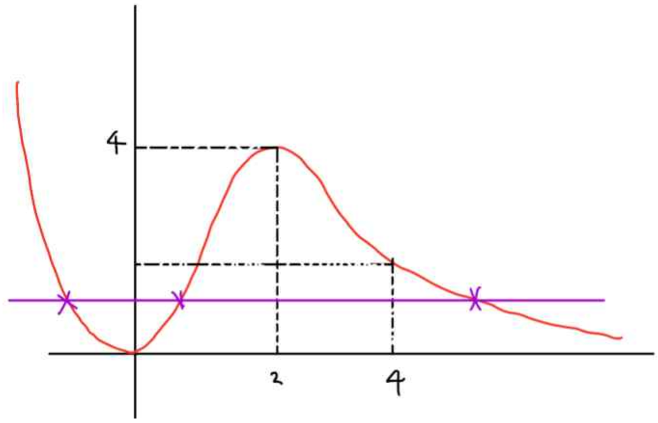
함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는?

(단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

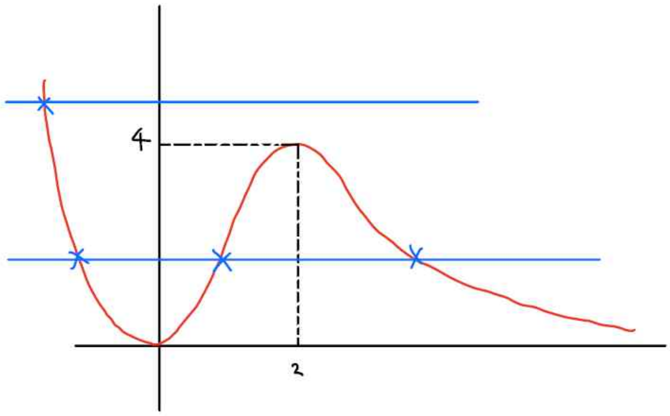
어떻게 풀었는가? 아마 대부분 이렇게 풀지 않았을까?

이 문제의 포인트는 $f(4)=\frac{16}{e^2}$여서 $\frac{15}{e^2}$가 $f(4)$보다 작다는 점이다.

$f(f(x))=\frac{15}{e^2}$
$f(x)=a$
$f(a)=\frac{15}{e^2}$



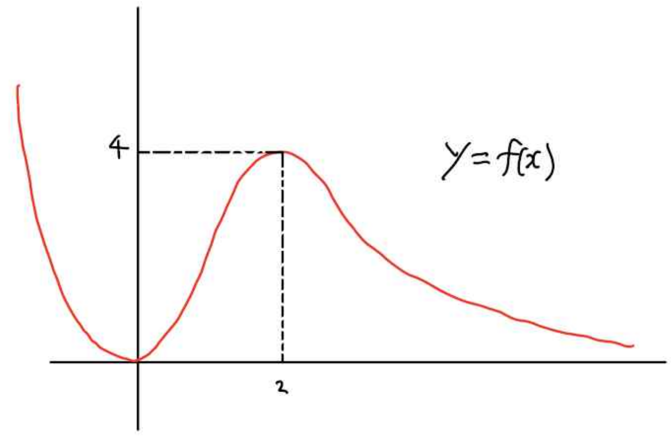
이를 만족하는 a는 4보다 큰 α, 0과 2사이의 β, 0보다 작은 γ가 있다.



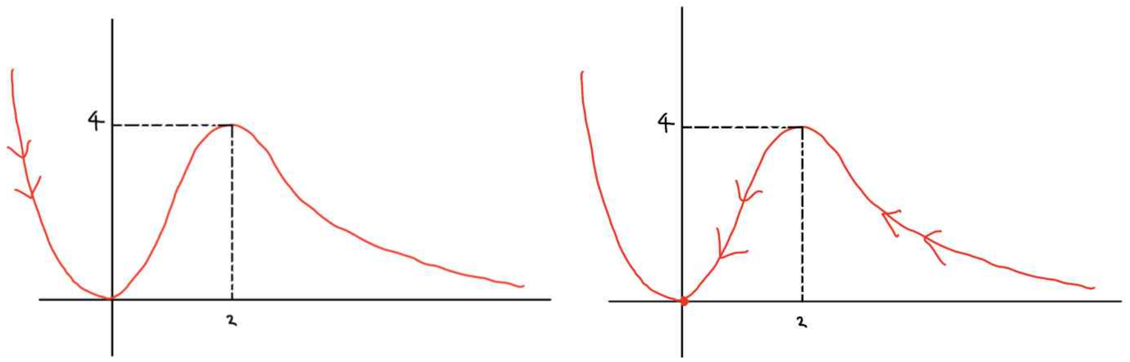
$f(x)=$ α를 만족시키는 해의 개수는 1개, $f(x)=$ β를 만족시키는 해의 개수는 3개, $f(x)=$ γ를 만족시키는 해의 개수는 0개이므로 총 해의 개수는 4개이다.

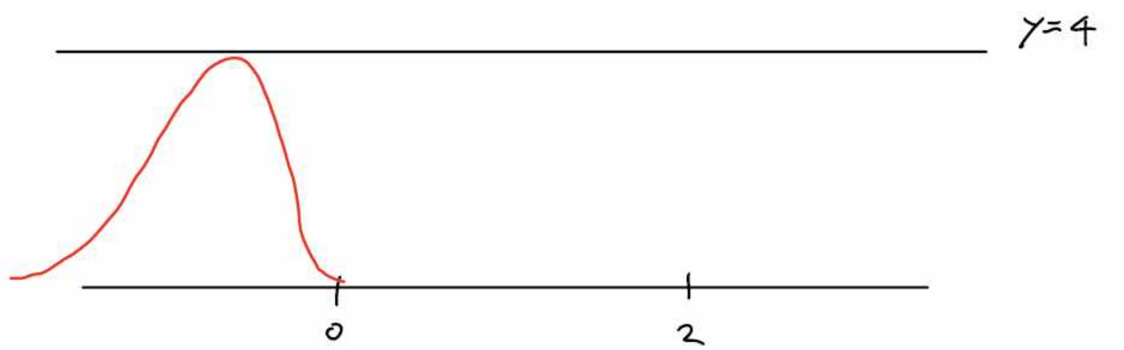
사실 이 문제처럼 단순히 교점 개수 알아보는 문제는 이렇게 합성함수 그래프 안 그리고도 풀 수 있다. (이렇게 푸는게 이 문제에서는 더 빠를 수 있다.) 하지만 우리 목적은 합성함수 그래프 그리는 것이므로 한 번 f(f(x)) 그리는 걸 도전해보자!!

$f(x)=x^2e^{-x+2}$ 그래프 정도는 단번에 그릴 줄 알아야 한다.
(아직 그릴 줄 모르더라도 걱정마라. 파급 효과 팔로우하면 이에 관한 컬럼 언젠간 써준다.)

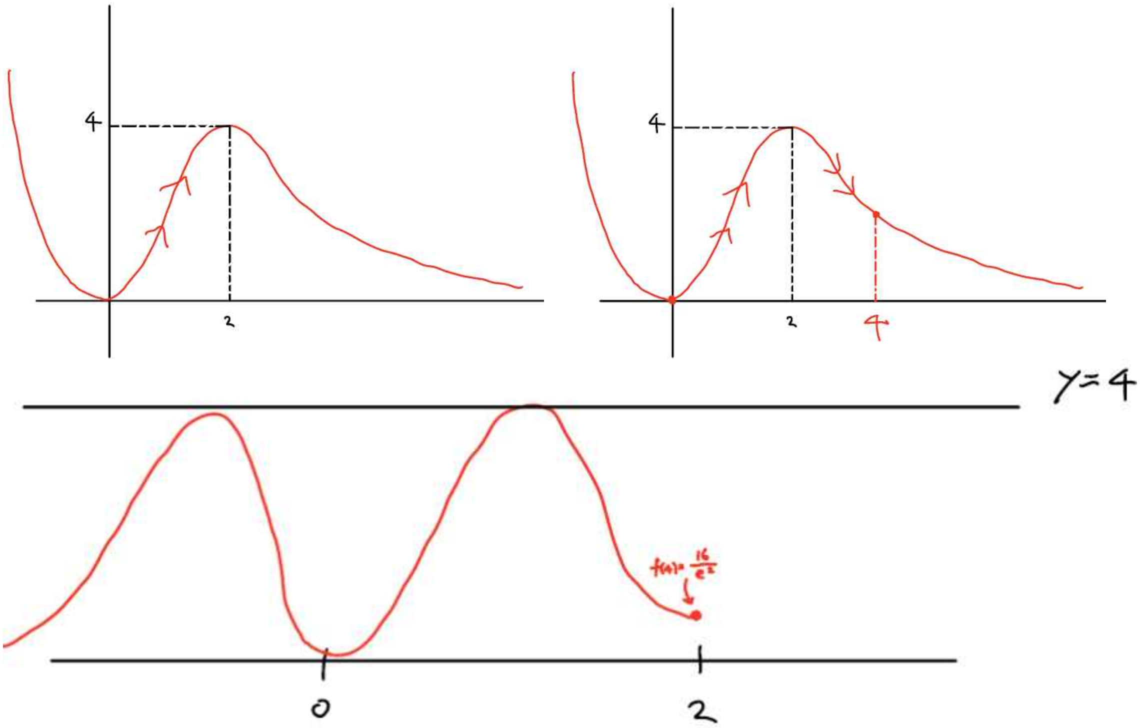


이제 본격적으로 f(f(x))를 그려보자!
먼저 f(x) 정의역을 '증감'을 기준으로 구간을 나눈다.
f(x)는 x=0, x=2 기준으로 증감이 바뀌므로 정의역을 (-∞,0], [0,2], [2,∞) 이렇게 세 구간으로 나눈다.





(-∞,0]에서 f(f(x))를 그려보자.
(-∞,0]에서 f(x)의 치역은 [0,∞)이 된다.
f(x)의 치역은 f(x)의 정의역이 되므로
f(x)에서 정의역 [0,∞)에 해당하는 '그래프 개형'을 '역방향'으로
f(f(x))의 정의역 (-∞,0]에 그리면 된다.
따라서 (-∞,0]에서 f(f(x))는 위쪽과 같다.



[0,2]에서 f(f(x))를 그려보자.

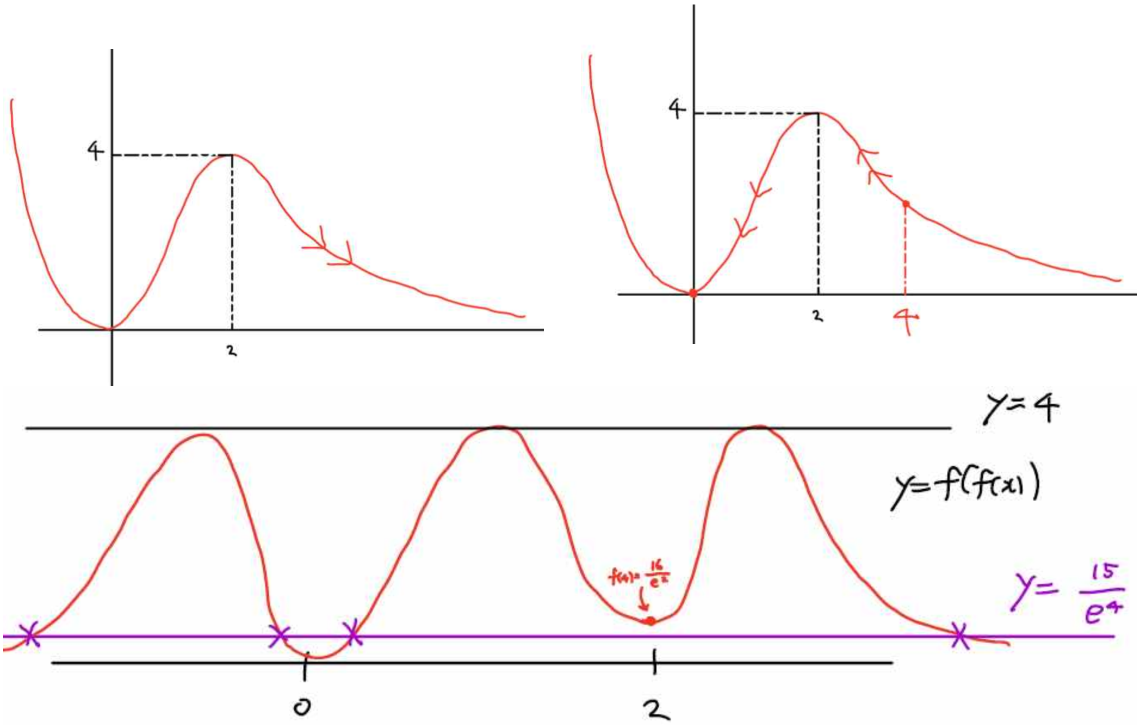
[0,2]에서 f(x)의 치역은 [0,4]이 된다.

f(x)의 치역은 f(x)의 정의역이 되므로

f(x)에서 정의역 [0,4]에 해당하는 '그래프 개형'을 '정방향'으로

f(f(x))의 정의역 [0,2]에 그리면 된다.

따라서 [0,2]에서 f(f(x))는 위쪽과 같다.

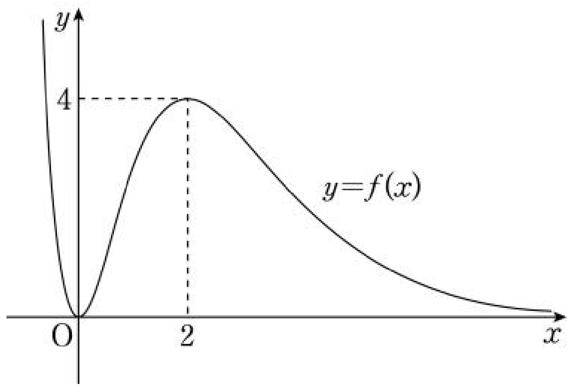


$[2,\infty)$에서 f(f(x))를 그려보자.
$[2,\infty)$에서 f(x)의 치역은 $(0,4]$이 된다.
f(x)의 치역은 f(x)의 정의역이 되므로
f(x)에서 정의역 $(0,4]$에 해당하는 '그래프 개형'을 '역방향'으로
f(f(x))의 정의역 $[2,\infty)$에 그리면 된다.
따라서 $[2,\infty)$에서 f(f(x))는 위쪽과 같다.

결론적으로 f(f(x))와 $y=\frac{15}{e^2}$는 네 점에서 만난다. (사실 이 문제에 한에서는 함성함수 그래프 그리기가 익숙하지 않으면 시간이 더 거릴 수도 있다. 많이 연습하자.)

배운 내용을 바탕으로 다시 풀어보자.

18. 그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는?

(단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

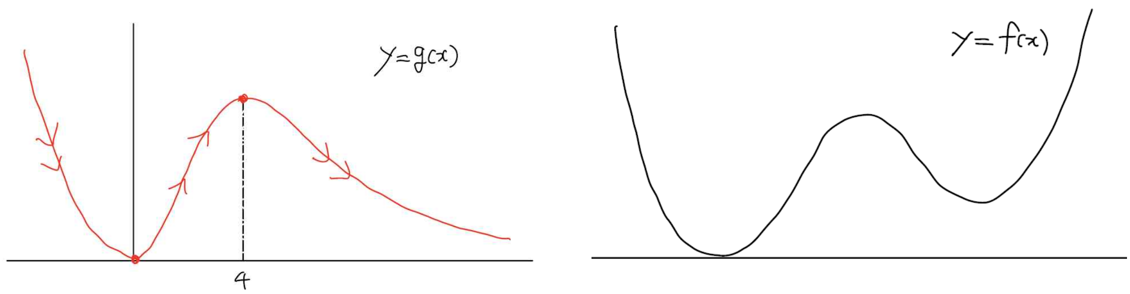
자유롭게 19년도 9평 30번을 풀어보자.

30. 최고차항의 계수가 이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

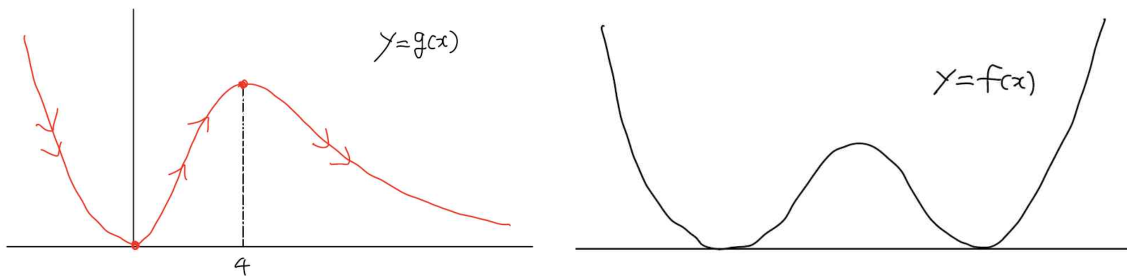
> (가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
>
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
>
> (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점]

먼저 g(x)의 그래프 개형은 다음과 같다. (자주 보지 않는가? 다항함수×지수함수 꼴은 단골로 나온다.)
먼저 g(x) 정의역을 '증감'을 기준으로 구간을 나눈다.
g(x)는 x=0, x=4 기준으로 증감이 바뀌므로 정의역을 (-∞,0], [0,4], [4,∞)이렇게 세 구간으로 나눈다. f(x)는 x축에서 한 번만 만난다고 하자.



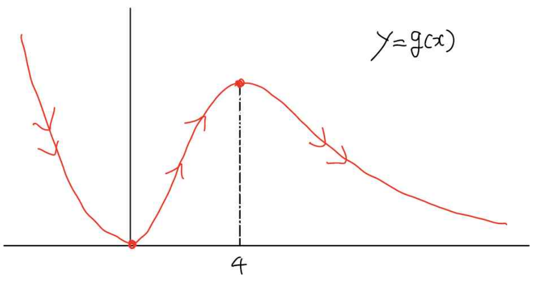
h(x) = f(g(x))를 그려야 하는데...... 지금까지 합성함수 그래프 그리는 방식을 생각하면 h(x) 정의역 구간도 (-∞,0], [0,4], [4,∞)이렇게 세 구간으로 나누어진다. f(x)가 x축과 한 번만 만난다면 h(x) 의 각 정의역 구간에서는 최대 한 번 밖에 x축과 만나지 않는다. 이렇다면 h(x)=0의 해의 최대 개수는 3개가 나온다. 하지만 이는 조건 (가)를 충돌한다.

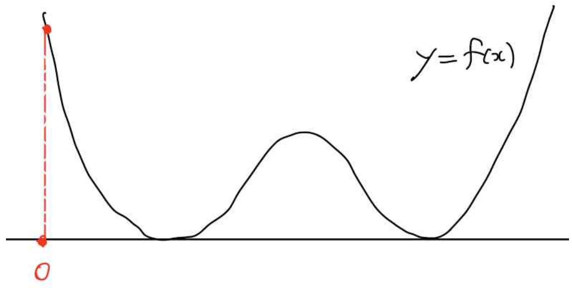


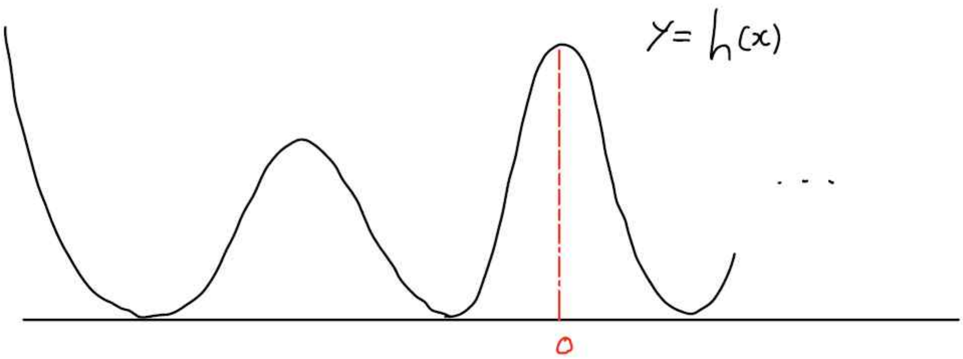
따라서 f(x)가 이와 같이 극솟값 두 개가 0으로 동일할 경우가 되어야 (가) 조건을 만족시키 가능성이라도 있다.(무조건적으로 (가)조건을 만족하는 것은 절대 아니다. 이후 풀이과정을 보면 안다.) 이제 f(x)에서 원점 위치를 달리하며 그려지는 h(x)가 (가),(나)를 확인해보겠다. 사실 왼쪽 극솟값을 원점으로 하고 싶은 마음이 굴뚝같지만 공부하는 단계이므로 원점 위치를 다양하게 잡고 왜 f(x)의 왼쪽 극솟값을 원점이어야 하는지 보여주도록 하겠다.

이제 미안하지만 합성 함수 그래프 그리는 방법은 많이 설명했으므로 생략하고 바로 그리겠다. 그리는 방법이 잘 생각이 안 난다면 앞 페이지로 돌아가라.

1) f(x)의 원점 위치가 왼쪽 극솟점 왼쪽에 있을 때

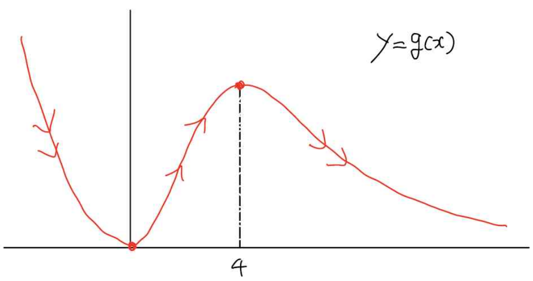


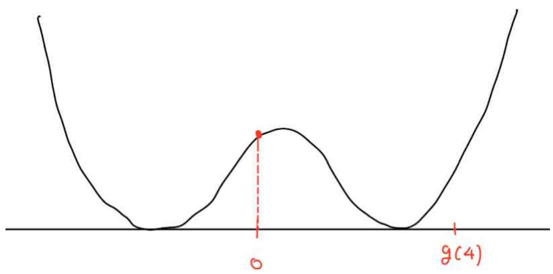


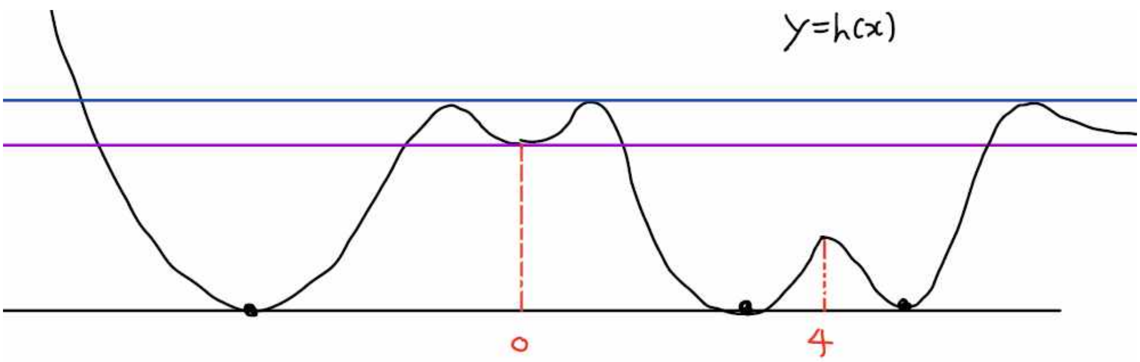


h(x)는 x=0에서 극댓값을 가지므로 (나) 조건을 위반한다.

2) f(x)의 원점 위치가 왼쪽 극솟점과 오른쪽 극솟점 사이에 있을 때

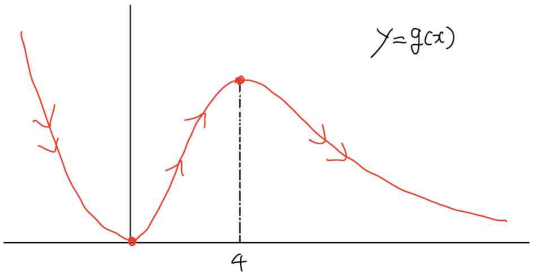


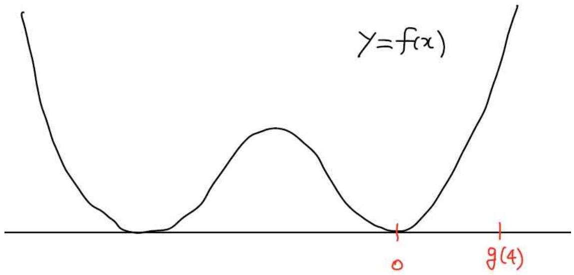


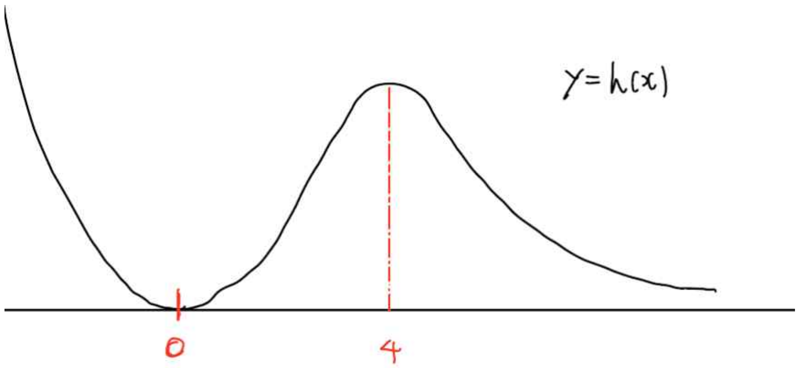


h(x)=0의 해는 3개이므로 (가) 조건을 위반한다.

3) f(x)의 원점 위치가 오른쪽 극솟점에 있을 때

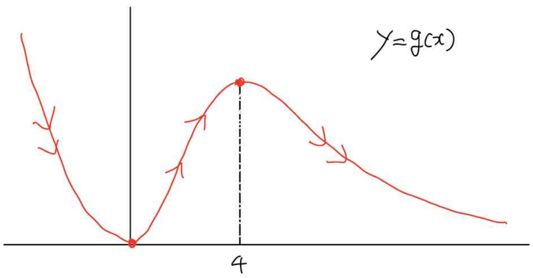


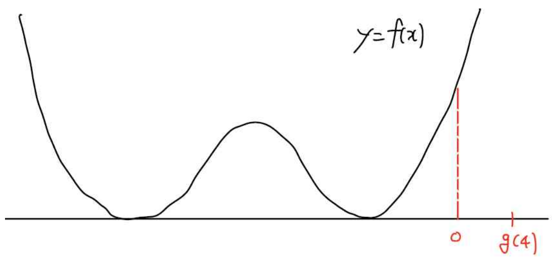


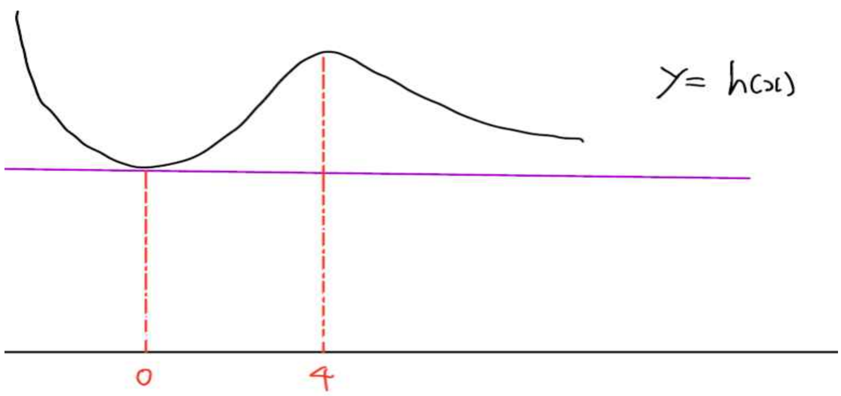


h(x)=0의 해는 1개이므로 (가) 조건을 위반한다.

4) f(x)의 원점 위치가 오른쪽 극솟점 오른쪽에 있을 때

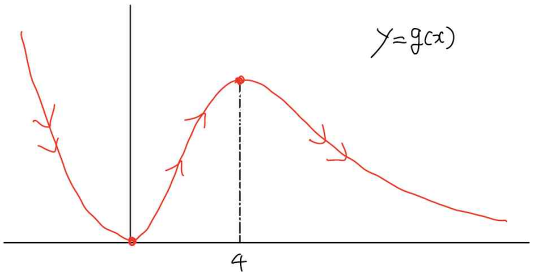


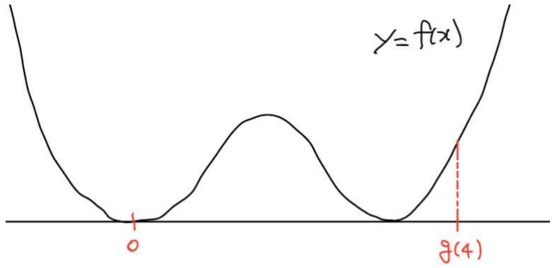


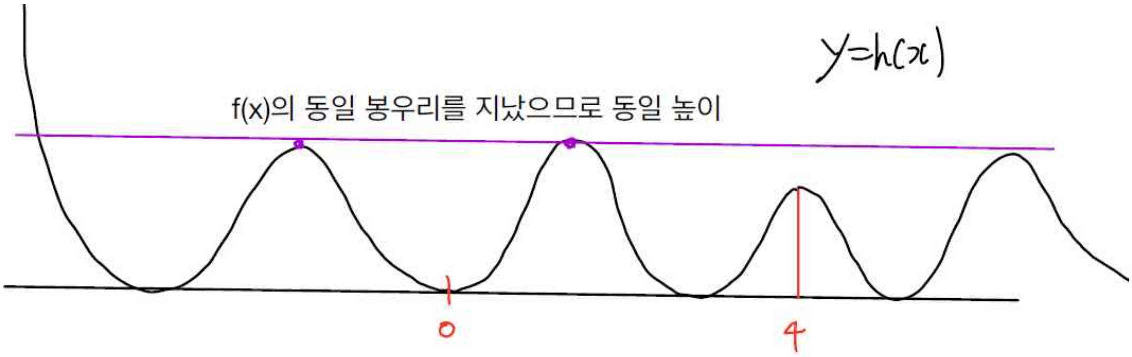


h(x)=0의 해는 0개이므로 (가) 조건을 위반한다.
따라서 f(x)의 원점의 위치는 왼쪽 극솟점에 있다. (일부로 이렇게 돌아왔다. 시험장에선 그냥 왼쪽 극솟점에 원점에 있을 때부터 확인하면 된다.)

5-a) f(x)의 원점 위치가 왼쪽 극솟점 왼쪽에 있을 때

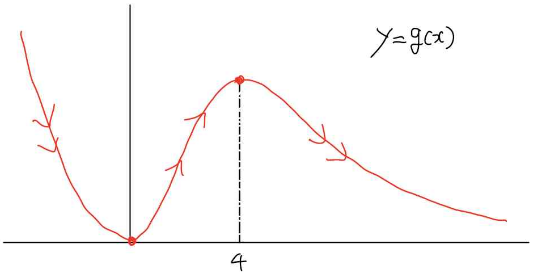


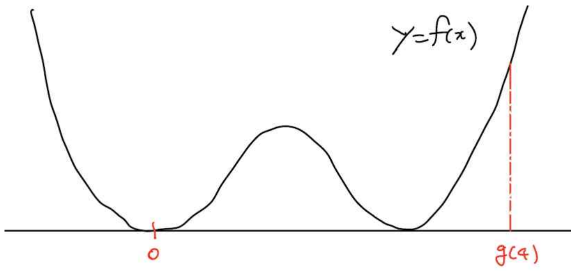


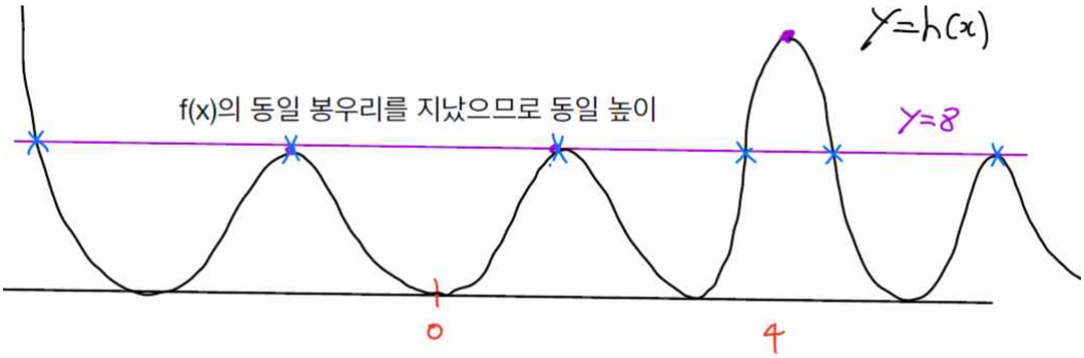


(다) 조건을 아쉽게도 만족시키지 못한다.

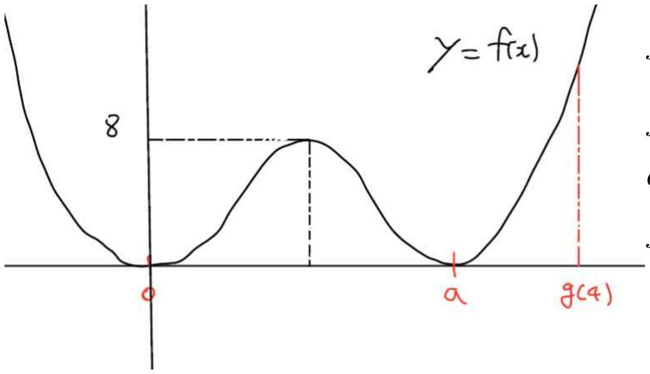
5-b) f(x)의 원점 위치가 왼쪽 극솟점과 오른쪽 극솟점 사이에 있을 때







드디어 (가), (나), (다) 조건 모두 만족시킨다.



$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-a)^2$$
$$f(\frac{a}{2})=8$$
$$a=4$$
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$$

따라서 f'(5)는 계산하면 30이다.

배운 내용을 바탕으로 다시 풀어보자.

30. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
(나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
(다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점]