

2020 수특 기백 변형

1. 이차곡선

★★☆

5p 예제 1 - 포물선 성질

포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점을 F라 하자. 포물선 위의 점 A와 x 축 위의 점 B에 대해 삼각형 AFB가 정삼각형일 때, \overline{OB} 의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x 좌표는 1보다 크다.)

☆☆

9p 예제 3, 14p 기본 7 - 쌍곡선, 삼각형

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F'이라 하자. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 A에 대하여 선분 AF'이 쌍곡선과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 삼각형 ABF의 둘레의 길이가 20일 때, \overline{AF} 의 값을 구하시오.

★★

7p 예제 2 - 타원, 피타고라스

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F'이라 하자. 제1사분면에 있는 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PFF'이 이등변삼각형일 때, 점 P의 y 좌표의 값은?

- ① $\frac{7\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{2}}{3}$

★

11p 예제 4 - 이차곡선 평행이동

두 초점이 F(1,3), F'(5,3)이고 주축의 길이가 2인 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y = ax + b$ ($a > 0$)일 때, $3a + b$ 의 값을 구하시오.

★★

13p 기본 2 - 포물선, 무게중심

초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$)가 있다. 이 포물선 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AF} + \overline{BF} = 20$ 이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6일 때, 상수 p의 값을 구하시오.

★★★

13p 기본 4 - 타원, 삼각형

두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이 있다. 점 F를 지나는 직선이 이 타원과 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\frac{\overline{BF'}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{BF}} = 2$ 이다. $\frac{a^2}{b^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

★★★

14p 기본 8 - 쌍곡선, 내접원

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 P와 이 쌍곡선의 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)에 대하여 $\angle PFF' = \frac{\pi}{2}$ 이고, 삼각형 PF'F의 내접원의 반지름의 길이는 1이다. $10c$ 의 값을 구하시오.

★★

15p 실력 1 - 포물선, 사다리꼴

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점 F를 지나는 직선이 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AF} = 2\overline{BF}$ 일 때, 사각형 CDBA의 둘레의 길이는 $a + b\sqrt{2}$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

2. 평면 곡선의 접선

★★★☆☆

25p 기본 2 - 근과 계수 또는 역함수

곡선 $\sin y = x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ 위에 있는 서로 다른 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 에서의 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 하자. $(x_1)^2, (x_2)^2$ 이 이차방정식 $9x^2 - 9x + 1 = 0$ 의 서로 다른 두 근일 때, $\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^2 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

★★★★☆

26p 실력 1 - 점 자취 추론

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F , 음수인 점을 F' 이라 하자. 쌍곡선 위의 x 좌표가 양수인 점 P 에 대하여 직선 $F'P$ 위의 점 Q 가 $\overline{PQ} = \overline{PF}$ 를 만족시킬 때, 점 Q 가 나타내는 도형을 C 라 하자. 쌍곡선 위의 점 $A(a, b)$ 에서의 접선이 도형 C 와 만나지 않게 하는 실수 a 의 최솟값은?

- ① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ -1
 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

★★★

25p 기본 3 - 이차곡선 접선

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $(4, 4)$ 에서의 접선 l 이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)의 한 초점과 한 꼭짓점을 지날 때, 가능한 모든 $a^2 + b^2$ 의 값의 합을 구하시오.

★★☆

26p 실력 4 - 매개변수, 기울기 최소

매개변수 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 나타낸 곡선 $x = 3 + \sec \theta$, $y = \tan \theta + 4 \cos \theta$ 위의 점에서의 접선의 기울기의 최솟값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3. 벡터의 연산

★★

29p 예제 1 - 벡터의 크기

좌표평면 위의 점 $A(4, 0)$ 에서 직선 $y = \sqrt{3}x$ 에 내린 수선의 발을 B 라 하자. y 축 위에 있는 점 P 에 대하여 점 Q 가 $\vec{AB} + \vec{PQ} = \vec{0}$ 을 만족시킨다. $|\vec{AB}| = |\vec{BP}|$ 일 때, 점 Q 의 좌표는 (a, b) 이다. a^2b^2 의 값을 구하시오.

★★☆

33p 예제 3 - 점 위치 잡기

한 평면 위에 있는 삼각형 ABC 와 점 P 가

$$\vec{PB} + 2\vec{PC} + k\vec{PA} = \vec{BC}$$

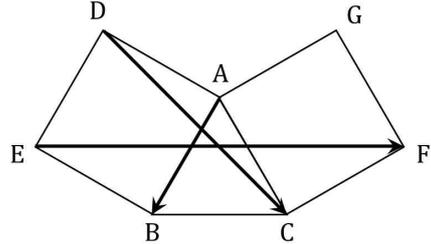
를 만족시킨다. 삼각형 ABC 의 넓이가 삼각형 APC 의 넓이의 3배가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합은?

- ① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

★☆☆

31p 예제 2 - 벡터의 덧셈, 뺄셈

그림과 같이 한 평면 위에 정삼각형 ABC 와 두 정사각형 $ADEB, ACFG$ 가 있다. 벡터 $\vec{EF} - \vec{DC} + \vec{AB}$ 의 크기가 3일 때, $|\vec{DG}|^2$ 의 값을 구하시오.



★★

35p 기본 2 - 벡터 정리

$\vec{AB} = 3, \vec{BC} = 4$ 인 평행사변형 $ABCD$ 에 대하여 평면 $ABCD$ 위의 점 P 가 $\vec{PA} = \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD}$ 를 만족시킬 때, 삼각형 ABP 의 넓이의 최댓값을 구하시오.

★★★

35p 기본 3 - 포물선과 벡터

타원 $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < 9$)의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F'이라 하자. 원점을 꼭짓점으로 하고 점 F를 초점으로 하는 포물선이 타원과 만나는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{PF}| = 8$ 일 때, $|\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PF}'|$ 의 값은 $a + \sqrt{b}$ 이다. 두 자연수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

★★☆

36p 실력 2 - 평행사변형을 좌표계로

평행사변형 ABCD에서 $3\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ 인 점을 E, $3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD}$ 인 점을 F라 하자. 직선 BD와 선분 EC, AF가 만나는 점을 각각 G, H라 할 때, $\overrightarrow{GH} = s\overrightarrow{BD}$ 이다. 상수 s 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{20}$ ③ $\frac{11}{30}$ ④ $\frac{23}{60}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

★★★

36p 실력 1 - 합이 0인 벡터 이해

원 $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 3 = 0$ 위의 점 P와 직선 $y = x + k$ 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| = 0$ 을 만족시키는 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합을 구하시오.

★★☆

36p 실력 3 - 도형의 이동

좌표평면에 점 A(2,0)과 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 위의 점 P, 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 Q가 있다. $|\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.

4. 평면벡터의 성분과 내적

★★

39p 유제 2 - 위치벡터

평행사변형 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 두 변 AB, BC의 중점을 각각 P, Q라 하자. $\overrightarrow{GP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{GQ} = \vec{q}$ 라 할 때, $\overrightarrow{DA} = m\vec{p} + n\vec{q}$ 이다. 두 상수 m, n 에 대하여 $10m+n$ 의 값을 구하시오.

★★☆

45p 예제 4 - 벡터 2개 또는 중점

$\overline{AB} = \overline{AC} = 4$ 인 이등변삼각형 ABC에서 선분 BC를 1:3로 내분하는 점을 D라 하고, 선분 AC를 1:3과 3:1로 내분하는 점을 각각 E, F라 하자. $|\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}| = \sqrt{19}$ 일 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 의 값을 구하시오.

★★☆

43p 예제 3 - 내적 기하적 의미

$\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC에 중심이 O이고 반지름이 1인 원이 내접할 때, 이 원이 선분 BC와 만나는 점을 P라 하자. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$ 일 때, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PC}$ 의 값을 구하시오.

☆☆

46p 기본 3 - 식 정리

한 평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2$, $|2\vec{a} + \vec{b}| = 4|\vec{a}|$ 이다. 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은? (단, $0 \leq \theta \leq \pi$)

- ① $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

★★★

48p 실력 1 - 내적 연산

좌표평면에서 중심이 O이고 반지름이 1인 원 위의 두 점 A, B에 대하여 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ 라 하면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ 이다.
 두 자연수 m, n 에 대하여 두 벡터 $\vec{OP} = 2\vec{a} + \vec{b}$,
 $\vec{OQ} = m\vec{a} - n\vec{b}$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $m+n$ 의 최솟값을 구하시오.

- (가) $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 0$
 (나) $|\vec{OQ}|^2 \geq 7$

★★★★☆

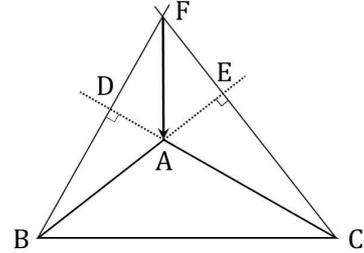
48p 실력 4 - 벡터 제곱, 평면곡선 접선

좌표평면에서 서로 수직인 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$,
 $|2\vec{a} + \vec{b}| = 3\sqrt{2}$ 를 만족시킬 때, $|x\vec{a} + \vec{b}| = y$ 가 되도록 하는 두 실수 x, y 에 대하여 점 (x, y) 가 나타내는 곡선을 C라 하자. 점 $A(1, \sqrt{3})$ 과 곡선 C 위의 점 P에 대하여 $\vec{OA} \cdot \vec{OP}$ 의 최솟값을 구하시오.

★★★★★

48p 실력 2 - 두 벡터, 수직 이용

그림과 같이 $\overline{AB} = 2, \overline{AC} = 3, \overline{BC} = 4$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고 두 직선 BD와 CE가 만나는 점을 F라 하자. $\vec{FA} = k\vec{AB} + l\vec{AC}$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



< 보 기 >

- ㄱ. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\frac{3}{2}$ 이다.
 ㄴ. $\vec{AB} \cdot \{k\vec{AB} + (l+1)\vec{AC}\} = 0$ 이다.
 ㄷ. $k = \frac{2}{3}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 평면 곡선과 평면 운동

★★☆

51p 예제 1 - 직선과 원 방정식

좌표평면 위의 두 점 $A(-1, -1)$, $B(3, 1)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P 가 두 개 존재할 때, 그 두 점을 각각 P_1, P_2 라 하자. $\overline{P_1P_2} = \sqrt{15}$ 일 때, 가능한 모든 양수 r 의 값의 곱은?

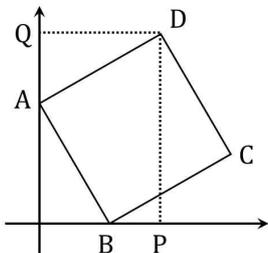
(가) $|\overrightarrow{AP}| = r$
 (나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AP}|^2$

- ① $2\sqrt{15}$ ② 8 ③ $6\sqrt{2}$
 ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

★★

58p 실력 1 - 좌표, 수직 조건 복합

좌표평면에서 점 $A(0, 1)$, x 축 위의 점 B , 제1사분면 위의 두 점 C, D 에 대하여 사각형 $ABCD$ 가 정사각형이다. 점 D 에서 x 축에 내린 수선의 발을 P , y 축에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 직선 PQ 와 직선 BC 가 서로 수직일 때, 점 C 의 좌표는 (a, b) 이다. $(a+b)^2$ 의 값을 구하시오.



★★

55p 예제 3 - 점이 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t ($t > 0$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = \sqrt{t(t-3)}, \quad y = 3t-2$$

일 때, 점 P 의 y 좌표가 1에서 25까지 변하는 동안 점 P 가 움직인 거리를 구하시오.

★★☆

58p 실력 2 - 좌표 식 세우기

좌표평면 위에 원점 O 가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 점 P 는 점 $A(1, 0)$ 을 출발하여 원 위를 시계 방향으로 매초 1만큼의 거리를 움직이고, 점 Q 는 점 P 보다 $\frac{\pi}{2}$ 초 후에 점 A 를 출발하여 원 위를 반시계 방향으로 매초 1만큼의 거리를 움직인다. 점 P 가 점 A 를 출발하여 $\frac{\pi}{2}$ 초 경과한 후부터 선분 PQ 의 중점을 R 라 할 때, 점 R 의 속력의 최댓값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$