

1. 함수의 성질이 함수의 이름을 만든다

1. 지수함수

수학의 몇 가지 특징을 말하라고 하면, 저는 ‘이름을 알면 성질을 알 수 있는 게 아니라, 성질이 이름을 만든다’라고 말하겠습니다. 갑자기 웬 뜬금없는 소리일까요? 이 말이 무슨 말인지에 대하여 설명하기 전에, 먼저 극한에 대하여 짚고 넘어가고자 합니다.

성지출판의 수학 II에는 함수의 극한을 정의하면서 다음과 같은 설명이 이어지고 있습니다.

극한의 정의에서 x 가 a 에 가까워지는 것을 구체적으로 살펴보려면 a 에 수렴하는 임의의 수열 $\{a_n\}$ 을 생각하면 편리하다. 이때, $f(x)$ 의 값이 L 에 가까워지는 것은 수열 $\{f(a_n)\}$ 이 L 에 수렴함을 뜻한다. 즉, x 가 a 와 다른 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워짐에 따라 $f(x)$ 의 값이 일정한 값 L 에 한없이 가까워지는 것은

$$a_n \neq a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$$

이 성립하는 것과 마찬가지로이다.

함수의 극한과 수열의 극한

다음은 서로 필요충분조건이다.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\textcircled{2} a_n \neq a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L \text{ 이다.}$$

②는 $a_n \neq a$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 인 모든 수열에 대하여 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$ 이 존재한다는 의미이다.¹⁾

위의 방법을 이용하면 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이라는 것은

$$a_n \neq a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a) \text{ 이다.}$$

이라고도 정의할 수 있습니다.

한편, 다음의 성질이 성립한다는 것이 알려져 있습니다.

실수의 성질 1 임의의 실수 r 에 대하여, 다음을 만족하는 수열 a_n 이 항상 존재한다.

$$a_n \text{ 은 유리수, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$$

이제, 원래 하고자 한 이야기로 돌아갑시다. 함수 $f(x)$ 가 2를 밑으로 하는 지수함수라면, 즉 $f(x) = 2^x$ 이라면 아래의 성질이 성립합니다.

$$f(1) = 2$$

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

$f(x)$ 는 실수 전체에서 연속

그런데, 위의 세 성질을 만족하는 함수는 어떤 함수일까요? 문제가 쉬워 보이지 않을 때, 간단한 경우부터 차근차근 해결하는 것이 좋은 방법일 때가 있습니다. 아래는 위의 세 성질을 만족하는 함수를 구하는 과정을 단계별로 문제화한 것입니다. 차근 차근 생각해 보세요.

1) 계승혁·김홍중 외 4인, 『고등 학교 수학 II』, 성지출판, 2010, 67쪽

문제 1 $f(1) = 2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$ 를 만족하는 연속함수 $f(x)$ 를 구하고자 한다. (단, 정의역은 실수 전체이다)

문제 1-1 $f(0)$ 의 값은 얼마인가?

문제 1-2 $f(-x)$ 를 $f(0)$, $f(x)$ 에 관한 식으로 나타내어라.

문제 1-3 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 의 값을 구하여라. 수학적귀납법을 이용하는 것이 도움이 될 것이다.

문제 1-4 양의 유리수 p 에 대하여 $f(p)$ 의 값을 구하여라. 다음의 명제를 이용하는 것이 도움이 될 것이다.

임의의 양의 유리수 p 에 대하여, $p = \frac{n}{m}$ 을 만족하는 자연수 m , n 이 존재한다.

문제 1-5 양의 무리수 r 에 대하여 $f(r)$ 의 값을 구하여라. 위의 **실수의 성질 1**과 **함수의 극한을 수열의 극한으로 정의한 방법**이 도움이 될 것이다.