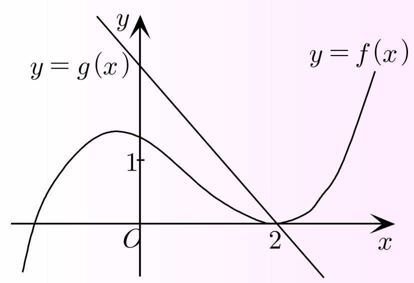
Critical Point 01

쉬운 문제와 어려운 문제의 공통점과 차이점을 분석해서 수능을 정복하라!

분수방정식은 최소공배수를 곱하여 무연근을 제외하라.

Critical Point 01		easy	difficult
문제		분수방정식 $\dfrac{x^2+x+1}{x-2}-\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{3}{(x-1)(x-2)}-2$ 의 모든 실근의 합은? [2009.6]	그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $P(2,0)$에서 x축에 접하고 일차함수 $y=g(x)$의 그래프와 한 점 P에서만 만난다. $1<f(0)<g(0)$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)}$ 의 실근의 개수는? [2010] 
풀이의 공통성	분수방정식의 양변에 최소공배수를 곱하라.	$\times(x-1)(x-2)$ 식 정리하면 $x^3+x^2-6x+4=0$	$\times f(x)g(x)$ 식 정리하면 $f(x)g(x)\{f(x)+g(x)\}=f(x)+g(x)$
	정방정식을 해결하라.	$x^3+x^2-6x+4=0$을 인수분해 하면 $(x-1)(x^2+2x-4)=0$에서 $x=1,\ x=\alpha,\ \beta$ ($x^2+2x-4=0$의 두 근)	$f(x)g(x)\{f(x)+g(x)\}=f(x)+g(x)$를 인수분해 하면 $\{f(x)+g(x)\}\{f(x)g(x)-1\}=0$에서 $f(x)+g(x)=0$ or $f(x)g(x)=1$
	무연근을 제외하라.	$x=1$은 무연근이므로 제외	$f(x)=-g(x)$에서 $x=2$는 무연근이므로 제외
차이점과 관련 심화특강		1. 완전히 기본 개념으로만 풀이 가능한 문제 2. 분수식을 정리하면 더 간단하게 해결가능 하다. **[심화특강02: 분수식의 정리방법]**	1. $f(x)g(x)=1$을 해결할 때, $\dfrac{1}{g(x)}$의 그래프의 개형을 그릴 줄 알아야 한다. **[심화특강21: 사칙연산 그래프의 논리]** 2. 방정식의 근은 그래프의 교점의 x좌표임을 알아야 한다.
풀이의 공통성을 확인해야하는 문제 (동일 CP 문항)		01, 04, 06, 11, 12	

저자의 조언

1. 어려운 문제든 쉬운 문제든 항상 CP의 공통 알고리즘이 적용됨을 알 수 있고,
   이를 깨우치면 모든 수능 문제를 어렵지 않게 같은 원리로 해결할 수 있다.
2. 방정식 문제(분수방정식과 무리방정식)의 경우 방정식과 그래프를 연결시켜서 문제의 난이도가 올라갈 수 있다.
   따라서 심화특강에서 그래프를 확실하게 배워두는 것이 좋고, 그래프의 교점의 x좌표가 방정식의 실근이 됨을 숙지하자.

무리방정식은 적절히 이항, 치환하여 제곱한 후 무연근을 제외하라.

Critical Point 02		easy	difficult
문제		무리방정식 $x^2-12x+\sqrt{x^2-12x+3}=3$의 모든 실근의 합을 구하시오. [2006.6]	n이 자연수일 때, x에 대한 무리방정식 $\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}=2n$ 이 실수해를 갖도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [2009.6]
풀이의 공통성	적절히 이항, 치환하여 제곱한 후 정방정식으로 만들어라.	$x^2-12x=X$라 하면 $\sqrt{X+3}=3-X$ 이므로 제곱하여 정리하면 $X^2-7X+6=0$	적절히 이항하면 $\sqrt{4n+x}=2n-\sqrt{4n-x}$이고 양변을 제곱하여 정리하면 $2n\sqrt{4n-x}=2n^2-x$이다. 또 양변을 제곱하면 정방정식 $x^2=16n^3-4n^4$ 이 된다.
	정방정식을 해결하라.	$X^2-7X+6=0$, $(X-1)(X-6)=0$ 이므로 $X=1$ or $X=6$이 된다.	($x^2=1$, $x^2=-1$과 같은 형태의 단순한 다항방정식임을 캐치해야 한다.) $x^2=16n^3-4n^4$은 $16n^3-4n^4\geqq 0$일 때, 실근이 존재한다. 따라서 $4n^3(4-n)\geqq 0$에서 $n\leqq 4$일 때, 실근을 가짐을 알 수 있다. 또한 그 실근은 $x=2n\sqrt{4n-n^2}$이다.
	무연근을 제외하라.	$X=6$은 무리방정식에 대입하면 무연근임을 확인할 수 있다.	$x=2n\sqrt{4n-n^2}$을 무리방정식에 대입하면 $\sqrt{4n-n^2}+n=2n-\left\|\sqrt{4n-n^2}-n\right\|$ 인데, $n=1,2,3,4$를 대입해보면 $n=1$일 때는 $x=2n\sqrt{4n-n^2}$이 무연근임을 알 수 있다.
차이점과 관련 심화특강		1. 치환 후 이항하여 제곱하면 정방정식이 된다. 2. $\sqrt{X+3}=3-X$에서 그래프를 그려서 $X=6$이 무연근임을 확인할 수도 있다.	1. 이항과 제곱을 적절히 활용하면 정방정식이 된다. 2. 무리함수의 그래프를 그릴 수 있다면 정석풀이보다 훨씬 깔끔한 풀이가 존재한다. **[심화특강21: 사칙연산 그래프의 논리]** **[심화특강23: 함수와 대칭성]**
풀이의 공통성을 확인해야하는 문제 (동일 CP 문항)		02, 03	

저자의 조언

1. 어려운 문제든 쉬운 문제든 항상 CP의 공통 알고리즘이 적용됨을 알 수 있고,
   이를 깨우치면 모든 수능 문제를 어렵지 않게 같은 원리로 해결할 수 있다.
2. 특히 difficult의 예제의 경우 수많은 강사, 선생님들이 그냥 무리함수 그래프로 해결해버리는 경우가 많았는데, 그러한 풀이는 공부할 때는 좋을 수 있지만, 교과서에 입각한 풀이가 아님을 명심하자. 교과서의 풀이에 숙달된 사람만이 [스피드 해법]을 공부할 자격이 있는 것이고, 교과서의 풀이가 수능에서 가장 중요함을 알아야 한다.

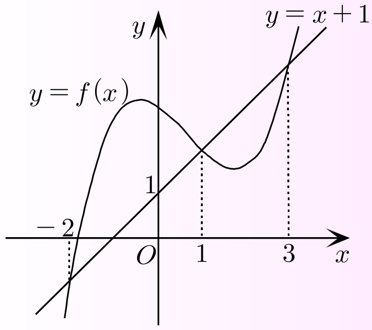
고차부등식은 인수분해 후 부호변화를 주시하며 그래프를 그려라.

Critical Point 03	
문제	고차부등식 문제는 분수부등식 문제를 풀 때, 항상 포함되므로 거의 출제가 되지 않는다. 따라서 다음 페이지의 분수부등식의 설명으로 대체하겠다. 기출문제 부분의 08번을 제외한 모든 고차부등식 문항은 분수부등식 문항이다.
풀이의 공통성을 확인해야하는 문제 (동일 CP 문항)	05, 07, 08, 09, 10

저자의 조언

1. 분수부등식을 해결할 때, 항상 고차부등식이 나타나므로 수능에서는 고차부등식 보다는 분수부등식이 출제 된다.

분수부등식은 통분한 후, 분모의 제곱을 곱하는 등 동치변형을 하라.

Critical Point 04		easy	difficult
문제		분수부등식 $\frac{3}{x+4}-\frac{1}{x-2}\geqq 1$을 만족시키는 모든 정수 x의 합은? [2009.9]	그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 세 점에서 만나고 그 교점의 x좌표는 $-2,\ 1,\ 3$이다. 부등식 $\frac{x}{f(2x)-1}\geqq\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [2009.6] 
풀이의 공통성	분수부등식을 통분하라.	이항하여 통분하면 $\frac{x^2+2}{(x+4)(x-2)}\leqq 0$	이항하여 통분하면 $\frac{(2x+1)-f(2x)}{2\{f(2x)-1\}}\geqq 0$
	분모의 제곱을 곱하는 등 동치변형 후 고차부등식으로 바꿔라.	$\frac{x^2+2}{(x+4)(x-2)}\leqq 0$ $\Leftrightarrow\ (x^2+2)(x+4)(x-2)\leqq 0\ \ (x\neq-4,\ 2)$ $\Leftrightarrow\ (x+4)(x-2)\leqq 0\ \ (x\neq-4,\ 2)$	$\frac{(2x+1)-f(2x)}{2\{f(2x)-1\}}\geqq 0$ $\Leftrightarrow\ \{(2x+1)-f(2x)\}\{f(2x)-1\}\geqq 0$ $(f(2x)\neq 1)$
	고차부등식을 풀어라.	$(x+4)(x-2)\leqq 0\ \ (x\neq-4,\ 2)$을 풀면 $-4<x<2$ (고차부등식의 풀이법에 따라 부호변화를 주시하며 $(x+4)(x-2)$의 그래프를 그려서 해결하면 된다.)	$\{(2x+1)-f(2x)\}\{f(2x)-1\}\geqq 0$ $(f(2x)\neq 1)$을 풀기 위해서는 주어진 그래프를 활용해야 하므로 $2x=X$로 치환하자. $\{(X+1)-f(X)\}\{f(X)-1\}\geqq 0\ \ (f(X)\neq 1)$ 이므로 고차부등식의 풀이법에 따라 부호변화를 주시하며 그래프를 그리면 문제를 해결할 수 있다. ($x=-2,\ \alpha,\ 1,\ 3$에서 부호가 변한다.) **그래프는 [분석 및 해제] 참조**
차이점과 관련 심화특강		1. 매우 쉬운 분수부등식 문제이다. **[심화특강01: 동치전개와 고차부등식]**	1. 고차부등식의 부호변화를 파악할 때, 그래프를 활용해야 한다. **[심화특강01: 동치전개와 고차부등식]** 2. $2x=X$라는 치환과정이 문제를 조금 더 어렵게 한다.
풀이의 공통성을 확인해야하는 문제 (동일 CP 문항)		05, 07, 09, 10	

저자의 조언

1. difficult 문제의 정답률이 easy 문제의 정답률보다 매우 낮았지만 위와 같이 풀이과정은 완전히 동등함을 알 수 있다.
이 같은 공통성을 파악하는 것이 기출문제를 분석하는 방법이며, 이러한 분석이 제대로 되기 시작하면
어떤 수능 문제든 기본 공통원리로 해결할 수 있게 된다. 기괴한 풀이를 구사하는 것이 수능을 잘 치르는 방법은 아니다.