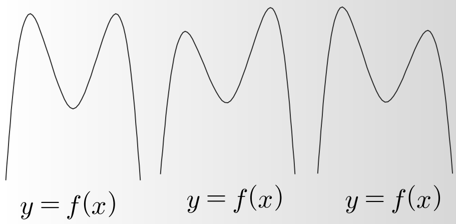
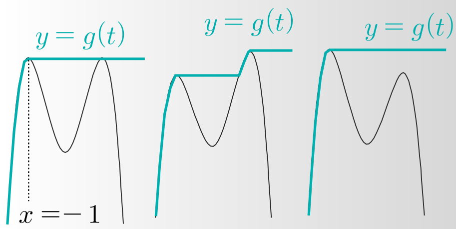
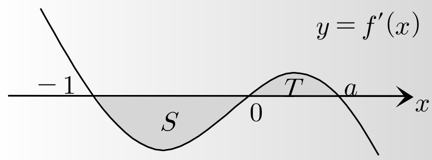
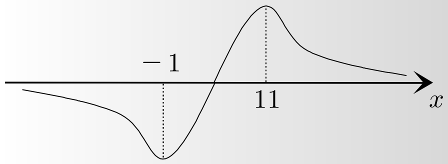
다항함수의 그래프의 개형은 미분과 개형을 활용하라.

Critical Point 10	easy	difficult
문제	사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다. (나) 함수 $f(x)$는 극솟값 -10을 갖는다.	함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \leq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은? [2010.9]
풀이의 공통성 **미분과 개형을 활용해서 주어진 상황을 분석하라.**	$f(x)=f(-x)$을 만족하므로 $f(x)=x^4+bx^2+6$이다. $f'(x)=4x^3+2bx$에서 $x=\sqrt{-\dfrac{b}{2}}$일 때 극솟값을 갖는다. 따라서 $f\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2}}\right)=\dfrac{b^2}{4}-\dfrac{b^2}{2}+6=-\dfrac{1}{4}b^2+6=-10$에서 $b^2=64$, $b=-8$이다. $f(3)=(3)^4-8(3)^2+6=15$	함수를 미분하면 $f'(x)=-12x(x+1)(x-a)$이고 $a>0$이다. 따라서 $f(x)$의 개형은 아래와 같이 세 가지가 가능하다.  즉 $g(t)$의 그래프를 그리면 아래의 파란 그래프와 같다.  그림과 같이 가운데의 개형은 주어진 조건을 만족하지 않는다. $f'(x)=-12x(x+1)(x-a)$의 그래프를 그려보면 아래와 같다.  그림에서 보듯이 $x=-1$이후 x가 증가하면서 넓이 S만큼 함수 $f(x)$가 감소했다가 넓이 T만큼 증가한다. 그런데 a의 최댓값을 물으므로 $a=1$이 된다. (만약 a가 1보다 커지면 가운데 개형이 된다.)
차이점과 관련 심화특강	1. 그래프의 대칭성이 연계되어 있다. **[심화특강23: 함수의 대칭성]** 2. 도함수를 활용한 간단한 문제이다.	1. 도함수와 개형 두 가지를 모두 활용해야 하는 문제이다. 2. 삼차함수의 점대칭성의 활용되었다. **[심화특강25: 다항함수의 성질과 증명]**
풀이의 공통성을 확인해야하는 문제 (동일 CP 문항)	06~08, 10~17, 19~20, 22~25, 34	

초월함수의 그래프의 개형은 기본연산과 미분을 활용하라.

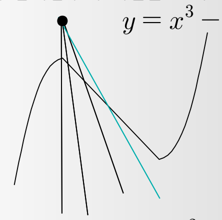
Critical Point 11	easy	difficult
문제	함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$가 최댓값을 가질 때의 x의 값은? [1998]	양수 a에 대하여 폐구간 $[-a, a]$에서 함수 $$f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m=0$이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하시오. [2006]
풀이의 공통성 / 미분과 사칙연산을 활용해서 주어진 상황을 분석하라.	$x>0$에서 $\dfrac{1}{x}$의 그래프와 $\ln x$의 그래프를 곱하면 된다. $x\to\infty$일 때 $\ln x$가 힘이 약하므로 $\dfrac{1}{x}$의 $+0$이 이긴다. $x\to+0$일 때 $\infty\times(-\infty)=-\infty$가 된다. 또한 미분하면 $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$에서 $x=e$	x좌표를 -5만큼 평행이동해서 생각하자. $g(x)=\dfrac{x}{x^2+36}\cdots$①에 대하여 $g'(x)=\dfrac{36-x^2}{(x^2+36)^2}=0$이므로 평행이동한 $f(x)$의 그래프를 그려보면 아래와 같다. 구간 $[-a, a]$에 $x=-1$과 $x=11$이 포함되면 $M+m=0$이 되므로 $a=11$이 되어야 한다.
차이점과 관련 심화특강	1. 그래프를 그릴 때, 미분해서 그려도 되지만 사칙연산을 활용하여 $(\ln x)\times\left\{\dfrac{1}{x}\right\}$을 그리는 것이 더 빠르다. **[심화특강21: 사칙연산 그래프의 논리]**	1. 그래프를 그릴 때, 미분해서 그려도 되지만 사칙연산을 활용하여 $(x-5)\times\left\{\dfrac{1}{(x-5)^2+36}\right\}$을 그리는 것이 더 빠르다. **[심화특강21: 사칙연산 그래프의 논리]**
풀이의 공통성을 확인해야하는 문제 (동일 CP 문항)	24, 26~33	

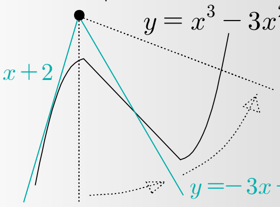


저자의 조언

1. 어려운 문제든 쉬운 문제든 항상 CP의 공통 알고리즘이 적용됨을 알 수 있고,
이를 깨우치면 모든 수능 문제를 어렵지 않게 같은 원리로 해결할 수 있다.

접선 문제는 모든 점에서의 접선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$을 도입하라.

<table>
<tr><th colspan="2">Critical Point 12</th><th>easy</th><th>difficult</th></tr>
<tr><td colspan="2">문제</td><td>양수 a에 대하여 점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선과 점 $(0, a)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구하시오. [2007.6]</td><td>실수 m에 대하여 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? [2012]</td></tr>
<tr><td>풀이의 공통성</td><td>모든 점에서의 접선
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$
을 도입해서 접선 문제를 해결하라.</td><td>$y=9t^2(x-t)+3t^3$에 $(a, 0)$을 대입하면
$0=9t^2(a-t)+3t^3$에서 $t=\frac{3}{2}a$
이므로 기울기는 $9t^2=9\left(\frac{3}{2}a\right)^2=\frac{81}{4}a^2$ ⋯ ①, 또한 $y=9t^2(x-t)+3t^3$에 $(0, a)$를 대입하면 $t^3=-\frac{1}{6}a$이므로 기울기 $9t^2=9\left(\frac{1}{6}a\right)^{\frac{2}{3}}$인데 두 기울기가 같아야 하므로 $9\left(\frac{1}{6}a\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{81}{4}a^2$을 풀면 된다.
$9\left(\frac{1}{6}a\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{81}{4}a^2$, $\left(\frac{1}{6}a\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}a$,
$\frac{1}{6}a=\frac{27}{8}a^3$이고 $a^2=\frac{4}{81}$이므로 $a=\frac{2}{9}$
$90a=20$</td><td>$(0, 2)$에서 삼차함수에 직선을 그어보면




왼쪽 그림처럼 일단 기울기가 커지면서 $f(m)=1$인데 삼차함수의 변곡점 부근을 지날 때 교점이 2개, 3개인 순간이 생길지 아니면 계속 1개인지 알 수 없다. 따라서 $(0, 2)$에서 삼차함수에 그은 접선의 방정식이 무엇인지 구해보자.
$y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2+1$에 $(0, 2)$을 대입하면 $2t^3-3t^2+1=0$, $(t-1)^2(2t+1)=0$이므로 $t=1$, $t=-\frac{1}{2}$인데, $t=1$일 때 $(1, -1)$은 변곡점이므로 $y=-3x+2$은 변곡점에서의 접선이 되고 나머지 접선은 $y=\frac{15}{4}x+2$이 된다. 따라서 오른쪽 그림처럼 기울기가 커지면서 교점이 계속 1개인데 기울기가 $\frac{15}{4}$가 되는 순간 교점이 2개가 된다.
따라서 최댓값은 $\frac{15}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">차이점과 관련 심화특강</td><td>1. 곡선의 닮음을 활용하면 세 가지 접선 유형 중 기울기가 주어진 접선 유형으로 더 쉽게 해결할 수 있다.
[심화특강25: 다항함수의 성질과 증명]
[심화특강27: 곡선의 닮음]
2. 복잡해 보이지만 결국 밖의 점에서 그은 접선 유형으로 귀결된다.</td><td>1. easy의 문제보다 훨씬 어려워 보이지만 결국 밖의 점에서 그은 접선 유형으로 귀결된다.
2. 그 과정에서 다항함수의 지식이 필요하다.
[심화특강25: 다항함수의 성질과 증명]
3. 초월함수의 그래프로도 해결할 수 있다.
[심화특강21: 사칙연산 그래프의 논리]</td></tr>
<tr><td colspan="2">풀이의 공통성을 확인해야하는 문제
(동일 CP 문항)</td><td colspan="2">09, 21</td></tr>
</table>

미분가능의 정의에 따라 미분가능성을 확인하라.

<table>
<tr><th colspan="2">Critical Point 13</th><th>easy</th><th>difficult</th></tr>
<tr><td colspan="2">문제</td><td>자연수 a, b에 대하여
함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+b}+2x-1}{x^n+1}$ $(x>0)$이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+10b$의 값을 구하시오. [2008.6]</td><td>원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0\leq t\leq 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.
$$v(t)=\begin{cases}4t & (0\leq t<1)\\ -2t+6 & (1\leq t<3)\\ t-3 & (3\leq t\leq 5)\end{cases}$$
$0<x<3$인 실수 x에 대하여 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리, 시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리, 시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리 중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
ㄱ. $f(1)=2$
ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)dt$
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.</td></tr>
<tr><td>풀이의 공통성</td><td>미분과 사칙연산을 활용해서 주어진 상황을 분석하라.</td><td>$x=1$에서 미분가능하므로 정의에 따라
$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$이 존재해야 한다.
따라서 좌극한과 우극한이 같아야 한다.
$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{(2h+1)-\left(\frac{a+1}{2}\right)}{h}$
$=\lim_{h\to-0}\frac{(2h+1)-(1)}{h}$ (분모가 0으로 가므로 분자도 0으로 가야한다. $a=1$) $=2$
$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{(1+h)^b-(1)}{h}\cdots$ ㉠
$=$
$\lim_{h\to+0}\frac{h\{(1+h)^{b-1}+(1+h)^{b-2}+\cdots+(1+h)+1\}}{h}$
$=b$
이므로 $b=2$가 된다.
따라서 $a+10b=1+10\times2=21$</td><td>ㄷ. $x=1$에서의 미분가능을 물으므로
$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$과 $\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$을 비교해야 한다.
시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리 $=A$
시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리 $=B$
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리$=C$ 이다.
ㄱ에서 $x=1$일 때를 구했는데 $x=1+h(h>0)$일 때 $x=1$일 때보다 A는 더 커지고, C는 더 작아지므로 $f(1+h)=C$가 된다. 또한 $x=1-h$일 때 $x=1$일 때보다 A는 더 작아지고, C는 더 커지므로 $f(1-h)=A$가 된다.
$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{C-f(1)}{h}=$
$\lim_{h\to+0}\frac{\int_{3+h}^{5}v(t)dt-f(1)}{h}=-v(3)=0$ 이고
$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{A-f(1)}{h}=$
$\lim_{h\to-0}\frac{\int_0^{1+h}v(t)dt-f(1)}{h}=v(1)=4$
이므로 $x=1$에서 미분불가능하다. (거짓)</td></tr>
<tr><td colspan="2">차이점과 관련 심화특강</td><td>1. 또 다른 풀이는 [분석 및 해제]에서 확인
2. 미분가능의 정의대로 푸는 것이 가장 수능적인 해법이다.</td><td>1. 자세한 풀이는 [기출예제 04]에서 확인
2. ㄷ의 오답률이 매우 높았는데, 미분가능의 정의를 그대로 적용하면 쉬운 보기이다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">풀이의 공통성을 확인해야하는 문제 (동일 CP 문항)</td><td colspan="2">01~06, 09, 18, 25</td></tr>
</table>

기출문제의 분석이란..

수능 시험장에서 치는 시험과 기출문제의 가장 큰 차이점은,
"풀어봤던 문제인가 안 풀어 봤던 문제인가?"
입니다.
대부분 당해년도 수능은 고2 학생들이 겨울방학 이내로 한 번 씩은 풀어봅니다.
그런데, 여기서 고2 학생들이 수능시험을 풀어놓고, 풀 때의 힘겨움은 생각하지 않습니다.
(대부분 시간을 재고 푸는 것이 아닌, 배운 부분까지 적당히 풀 수 있는 문제대로 풀기 때문이죠)
그리고 인터넷 강의를 통하여 해설 강의를 듣습니다.
그리고 2~3개월쯤 시간이 흐릅니다.
문제 풀이의 핵심 아이디어, 혹은 풀이 알고리즘 중 일부가 희미하게 기억이 납니다.
처음 문제 풀었을 때에는

$$A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H \to I \to J \to K$$

와 같은 과정으로 풀었다면, 3개월쯤 지나면

$$B \to G \to K$$

정도만 기억에 남습니다.
그리고 그 이후에 기출문제를 풀 때에는 $B \to G \to K$ 의 과정으로 문제를 풀게 됩니다.
사람들은 B를 생각 못해서, G를 생각 못해서 시험장에서는 못 풀었다고 합니다.
$A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H \to I \to J \to K$ 가 복잡 했던 것은 생각하지 않고,
머릿속에 남은 풀이과정이 $B \to G \to K$로 푸는 것이라서 쉽다고 느껴지는 것뿐입니다.
이걸 뒷북수학이라 합니다.
수험생들은 어떻게 하면 $B \to G \to K$처럼 풀어볼까 고민만 할 뿐입니다.
그렇게 되면, 한번 풀어봤던 킬러문제는 쉽게 느껴집니다.
알고리즘이 짧게 느껴집니다.
결국 가장 중요한건 $B \to G \to K$가 아니고, $B \to G$ 사이의 C~F까지의 풀이과정이고,
결국 다음번에 시험에 낼 때에는 $B \to G \to K$로 절대 내지 않습니다.

$$A \to B \to C \to D \to E \to X \to Y \to Z$$

와 같이 변형하거나,

$$X \to Y \to Z \to G \to H \to I \to J \to K$$

와 같은 방식으로 변형하게 됩니다.

따라서 기출문제의 잔상이 수능시험에서는 하등의 도움이 되지 않는 것입니다.
기출문제의 분석이란, 기출문제 풀이과정 속에서

$$A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H$$

$$A \to B \to C \to D \to E \to X \to Y \to Z$$

의 **공통성을 찾고 그 공통성을 체화하여 다음번 시험 때에 $A \to B \to C \to D \to E$ 를 추론하는 것**에
시간을 최소화하는 것이지, $B \to G \to K$를 기억하는 것이 아닙니다.
반드시 기억하시기 바랍니다.
2011수능으로 예를 들어본다면,
사차함수의 $|f(x)-t|$가 $y=t$에서 접어 올린다는 것을 기억하고,
사차함수의 개형이 UU임을 기억하고, 식을 $y=(x-a)^2(x-b)^2$ 꼴로 세우는 것이
$B \to G \to K$에 해당하는 풀이입니다. 사실 그 사이에는 엄청나게 많은 미분 이야기들이 숨어 있는데 말입니다.
즉, $|f(x)-t|$가 $y=t$에서 접어 올린다는 말을 무심코 넘기지 마시고, 어떻게 그렇게 되었는지에 대해 추론하는 연습을 해봐야 합니다. 그 추론과정을 이해하는 데에는 문제를 처음 만났을 때의 사고과정을 통해 얻어가야 합니다.
그리고 그 반복성을 타 평가원 기출문제를 통해 찾아내는 것. 그것이 기출분석입니다.

(pnmath.com의 포카칩's source를 인용했습니다.)

이 글은 기출문제의 핵심 분석방법을 담고 있는 매우 좋은 글 입니다.
이 글의 $A \to B \to C \to D \to$ E이 한완수의 Critical Point에 해당합니다. 이제까지 기출문제를 잘 못 공부하고 있던 분들은 지금이라도 방법을 바꾸시길 바랍니다.