

24. 어떤 범죄 사건에서 3명의 용의자가 포착되었다. 이들이 각각 진범일 확률은 $\frac{1}{3}$ 로 모두 같고, 이들 중에 진범이 있는 것은 의심의 여지가 없다고 가정하자.

수사반장은 다음과 같은 수사 계획을 세웠다. “우선 3명 중에 한 명을 임의로 뽑아 집중 수사를 한다. 다른 두 명은 과학 수사 팀에 의뢰하여 결백한지, 즉 용의선 상에서 제외할 수 있는지를 조사한다.”

그런데 수사반장은 다음과 같은 고민이 생겼다. “계획대로 수사가 시작된 지 얼마 지나지 않았을 때 만약 과학 수사 팀에 의뢰한 두 명 중에 한 명이 결백함이 밝혀진다면 처음 집중 수사 대상이었던 사람을 계속 수사할 것인지 아니면 과학 수사 팀에서 결백함이 밝혀지지 않은 다른 한 사람으로 수사 초점을 바꿀 것인지”가 문제가 된 것이다.

지금까지의 경험으로 볼 때, 과학 수사 결과 결백함이 밝혀진 자가 후일 범인임이 밝혀진 예는 전혀 없었으므로 과학 수사 결과 결백함이 밝혀지면 전혀 의심의 여지가 없는 것으로 가정하고, 또 처음 수사 대상자에 대한 수사 비용과 시간을 무시하기로 할 때, 즉 확률적으로만 판단할 때, 이 경우 수사반장의 합리적인 판단은 어느 것인가?

- ① 바꾸는 것이 확률적으로 유리하다.
- ② 바꾸지 않는 것이 확률적으로 유리하다.
- ③ 바꾸거나 바꾸지 않거나 진범을 알아낼 확률은 같다.
- ④ 주어진 정보와 가정만으로는 아무것도 알 수 없다.
- ⑤ 과학 수사 결과 결백함이 밝혀지지 않은 남은 한 사람이 진범이다.

※ 유명한 몬티 홀 (Monty Hall) 문제의 변형인데, 출제자가 몬티 홀 문제를 정확히 변형하지 못하여 오류가 발생했다.

다른 곳의 풀이에서는 이 오류를 집어내지 못했다.

다음과 같이 문제의 조건을 바꾸어보자.

과학수사팀이 수사 결과 누가 범인인지를 밝혀냈고, (두 명 모두 범인이 아니면 수사반장이 조사하는 용의자가 범인이다) 그 결과를 팩스로 전송하는데, 관례상 무혐의인 사람의 알리바이를 증명하는 내용부터 보낸다. 그런데, 그 중 한 명이 범인이 아님을 밝히는 내용까지만 전송되고 나머지 결과는 천재지변에 따른 통신장애가 생겨 알 수 없게 되었고 통신의 복구도 많은 시간이 소모된다.

이 때, 체포팀을 급파하는데 원래 용의자로 보고 집중수사하던 용의자를 체포하는 것과 체포대상을 바꾸는 것 중 어느 것이 확률적으로 유리한가?

이것이 조금 이해가 어렵다면, 다음과 같이 바꾸어보자. (원래의 문제이고, 이름만 바꾸었다)

아벨은 이경규가 진행하는 퀴즈쇼에 출연하여 우승을 하였다. 우승자에게는 자동차가 한 대 주어지는데, 마지막 관문이 A, B, C 세 개의 문 중 자동차가 있는 문을 알아 맞추는 것이다.

퀴즈왕씨는 세 문 중 하나를 택했고, 이 때 짓궂은 이경규는 남은 두 개의 문 중 자동차가 있지 않은 곳의 문을 하나 열어주었다. (이경규는 어디에 자동차가 있는 지 알고 있다) 그리고 퀴즈왕씨에게 물어보았다.

“자~ 선택을 바꾸겠습니까, 아니면 그대로 가지겠습니까?” 이 때, 아벨은 바꾸는 것이 유리한가, 아니면 원래의 선택을 유지하는 것이 유리한가?

몬티홀 문제의 관건은, 사회자는 어느 곳에 자동차가 있는지 미리 알고 있고, 그 중 자동차가 없는 곳을 골라 가르쳐 준다는 데 있다. 만약, 사회자가 실수로 아무 곳이나 열어주었는데 우연히 자동차가 없었다고 하면, 몬티홀 문제의 정답은 ‘바꾸거나 바꾸지 않거나 확률은 같다’ 라는 것이다.

24. ①

원래의 문제로 풀어보자.

아벨이 A를 선택했다고 가정해도 일반성을 잃지 않는다.

아벨이 A를 선택했을 때, 실제 자동차가 A, B, C에 있을 확률은 $\frac{1}{3}$ 으로 각각 같다.

각각의 경우를 표로 나타내면 아래와 같다.

실제 자동차가 있는 곳	이경규가 열어준 문	확률	바꾸었을 때의 확률
A	B 또는 C	각각 $\frac{1}{6}$	0
B	C	$\frac{1}{3}$	1
C	B	$\frac{1}{3}$	1

이 때, 아벨이 선택을 바꾸지 않으면 자동차를 받을 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, 선택을 바꾸면 자동차를 받을 확률은 $\frac{2}{3}$ 이므로, 선택을 바꾸는 것이 유리하다.

※ 이경규가 실수로 발로 문을 건드려서 열렸는데, 우연히 거기가 자동차가 없는 곳이었다 라고 하면 (즉, 경찰대에서 출제한 문제) 답이 달라진다.

역시 아벨은 A를 선택했다고 하자.

이경규 자동차	A	B	C
A	조건에 위배	바꾸면 손해	바꾸면 손해
B	조건에 위배	조건에 위배	바꾸면 유리
C	조건에 위배	바꾸면 유리	조건에 위배

위 9가지 경우는 확률이 모두 $\frac{1}{9}$ 로 같다.

이경규는 A를 열어주지도 않았고, 자동차를 열어주지도 않았으므로 바꾸면 유리할 확률은 $\frac{2}{9} \div \frac{4}{9} = \frac{1}{2}$ 이다.

원 문제와 다른 점은, 이경규가 열어준 문에 자동차가 있는 확률은 원 문제에서는 일어날 수 없는 일이지만 실수로 연 경우는 있을 수도 있는 일이므로 조건부 확률의 분모가 달라진다.

(B에 자동차가 있고 C를 열어줄 확률은 원 문제에서는 $\frac{1}{3}$

이고, 실수로 열어준 경우는 $\frac{1}{9} \div \frac{4}{9} = \frac{1}{4}$ 이다)