02 지수함수와 로그함수

1. 지수함수의 뜻

$a>0$, $a\neq1$일 때, 실수 x에 a^x을 대응시키는 함수

$y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$

을 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

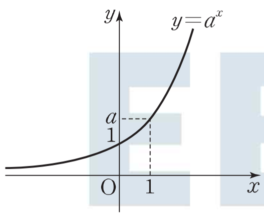
예 함수 $y=2^x$은 2를 밑으로 하는 지수함수이고, 함수 $y=x^2$은 지수함수가 아니다.

참고 모든 실수 x에 대하여 $1^x=1$이므로 함수 $y=1^x$은 상수함수가 된다.
따라서 지수함수에서는 밑이 1이 아닌 양수인 경우만 생각한다.

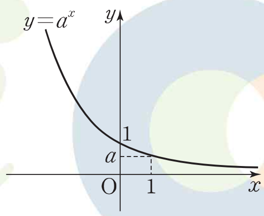
2. 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프

지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 밑 a의 값의 범위에 따라 그림과 같다.

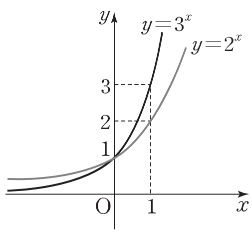
(1) $a>1$일 때

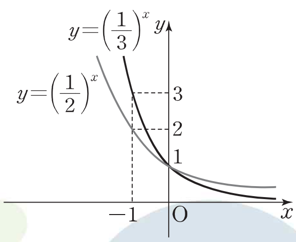


(2) $0<a<1$일 때



예 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$의 그래프와 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 그림과 같다.





3. 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ a)$를 지나고, x축(직선 $y=0$)을 점근선으로 한다.

예제 1 지수함수의 성질

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=a^{-x}$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 1이 아닌 양수이다.)

보기

ㄱ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 점근선은 서로 같다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)<g(x+1)$이면 $a>1$이다.

ㄷ. $g(-2)<3f(2)$를 만족시키는 자연수 a의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 전략 지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 두 점 $(0, 1)$, $(1, a)$를 지나고, x축(직선 $y=0$)을 점근선으로 한다.

풀이 ㄱ. 두 곡선 $y=2^x$, $y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 점근선은 모두 직선 $y=0$으로 서로 같다. (참)

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)<g(x+1)$이면 함수 $y=g(x)$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $\frac{1}{a}>1$, 즉 $0<a<1$ (거짓)

ㄷ. $g(-2)=a^{-(-2)}=a^2$, $f(2)=2^2=4$

$g(-2)<3f(2)$에서 $a^2<3\times4=12$, 즉 $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

이때 $a>0$, $a\neq1$이고, $3<2\sqrt{3}<4$이므로 조건을 만족시키는 자연수 a는 2, 3으로 그 개수는 2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

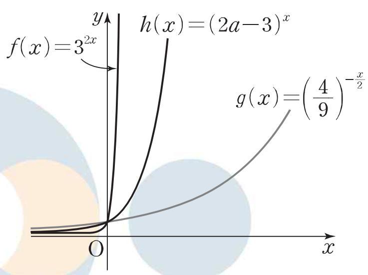
정답과 풀이 11쪽

[20007-0035]

유제 1 3 이상의 자연수 a에 대하여 세 함수

$$f(x)=3^{2x},\ g(x)=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{x}{2}},\ h(x)=(2a-3)^x$$

의 그래프가 오른쪽 그림과 같도록 하는 모든 자연수 a의 개수는?



① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[20007-0036]

유제 2 곡선 $y=a^{2x-1}$과 y축이 만나는 점을 A라 하고, 곡선 $y=a^{2x-1}$과 x축이 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 사각형 AOCB의 넓이가 3일 때, $a^2+\frac{1}{a^2}$의 값을 구하시오.

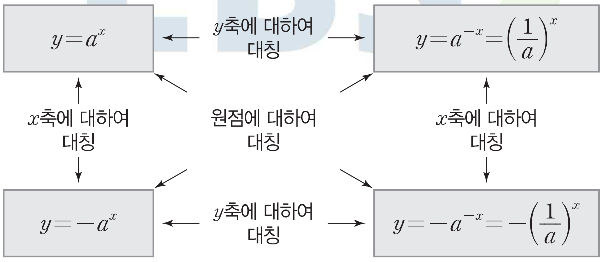
(단, O는 원점이고, a는 1이 아닌 양수이다.)

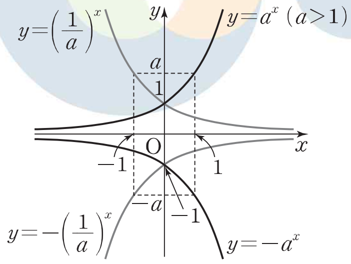
4. 지수함수의 그래프의 평행이동 및 대칭이동

(1) 평행이동

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y=a^{x-m}+n$이다. 이때 함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 점 $(m,\ 1+n)$을 지나고, 점근선은 직선 $y=n$이다.

(2) 대칭이동





5. 지수함수의 최댓값과 최솟값

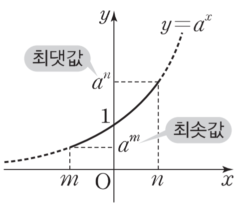
정의역이 $\{x\mid m\leq x\leq n\}$ $(m\leq n)$일 때, 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값

(1) $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 a^m, $x=n$에서 최댓값 a^n을 갖는다.

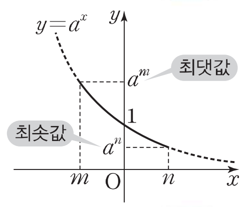
(2) $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 a^m, $x=n$에서 최솟값 a^n을 갖는다.

설명 정의역이 $\{x\mid m\leq x\leq n\}$ $(m\leq n)$일 때, 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값은 함수의 그래프를 그려서 다음과 같이 판단할 수 있다.

(1) $a>1$일 때



(2) $0<a<1$일 때

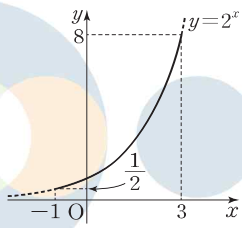


예 (1) 정의역이 $\{x\mid -1\leq x\leq 3\}$일 때, 함수 $y=2^x$의 최댓값과 최솟값

함수 $y=2^x$의 밑이 2이고 $2>1$이므로 함수 $y=2^x$은

$x=-1$에서 최솟값 $2^{-1}=\frac{1}{2}$을 갖고,

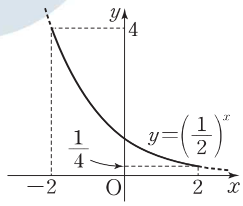
$x=3$에서 최댓값 $2^3=8$을 갖는다.



(2) 정의역이 $\{x\mid -2\leq x\leq 2\}$일 때, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 최댓값과 최솟값

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은

$x=-2$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$를 갖고, $x=2$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$을 갖는다.



예제 2 지수함수의 최댓값과 최솟값

정의역이 $\{x\mid -2\le x\le 1\}$인 함수 $f(x)=2^{x+a}+b$의 최댓값이 3이고 최솟값이 1일 때, $f(0)$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{12}{7}$ ② $\frac{13}{7}$ ③ 2 ④ $\frac{15}{7}$ ⑤ $\frac{16}{7}$

풀이 전략 정의역이 $\{x\mid m\le x\le n\}$일 때, 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\ne 1)$의 최댓값과 최솟값
① $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 a^m, $x=n$에서 최댓값 a^n을 갖는다.
② $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 a^m, $x=n$에서 최솟값 a^n을 갖는다.

풀이 함수 $f(x)=2^{x+a}+b$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 함수 $f(x)=2^{x+a}+b$는 $x=1$에서 최댓값을 갖고, $x=-2$에서 최솟값을 갖는다.

$f(1)=3$에서 $2^{1+a}+b=2\times 2^a+b=3$, 즉 $2^a=\frac{3-b}{2}$ …… ㉠

$f(-2)=1$에서 $2^{-2+a}+b=\frac{2^a}{4}+b=1$, 즉 $2^a=4(1-b)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{3-b}{2}=4(1-b)$, $b=\frac{5}{7}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $2^a=4\left(1-\frac{5}{7}\right)=\frac{8}{7}$

따라서 $f(0)=2^a+b=\frac{8}{7}+\frac{5}{7}=\frac{13}{7}$

답 ②

정답과 풀이 11쪽

[20007-0037]

유제 3 정의역이 $\{x\mid 0\le x\le 2\}$인 함수 $f(x)=a\times 3^{2-x}+b$의 최댓값이 4이고 최솟값이 0일 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a>0$)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[20007-0038]

유제 4 정의역이 $\{x\mid 0\le x\le 2\}$인 함수 $f(x)=2^x+1$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자.
정의역이 $\{x\mid 0\le x\le 2\}$인 함수 $g(x)=a-\left(\frac{1}{b}\right)^x$의 최댓값과 최솟값이 각각 $-m$, $-M$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $b>0$, $b\ne 1$)

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

6. 로그함수의 뜻

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 로그의 정의로부터

$$y=a^x \iff x=\log_a y$$

이므로 $x=\log_a y$에서 x와 y를 서로 바꾸면 지수함수 $y=a^x$의 역함수

$$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$$

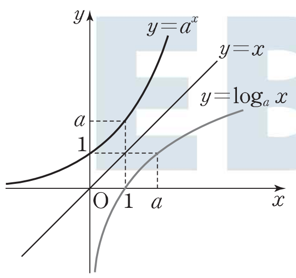
을 얻는다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

참고 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

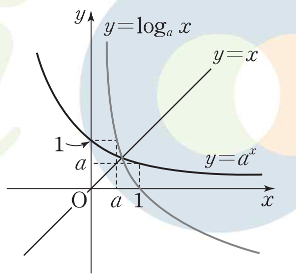
7. 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프

로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이므로 두 함수 $y=\log_a x$, $y=a^x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

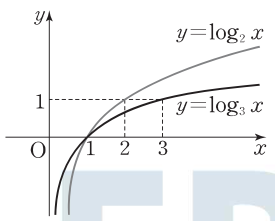
(1) $a>1$일 때

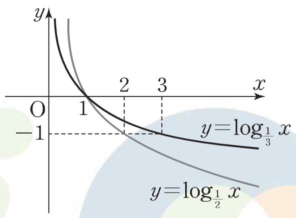


(2) $0<a<1$일 때



예 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 그림과 같다.





8. 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $(a,\ 1)$을 지나고, y축(직선 $x=0$)을 점근선으로 한다.

예제 3 로그함수의 성질

함수 $f(x)=3^{x+a}+b$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$가 점 $(b+1,\ 1)$을 지나고, 점근선이 직선 $x=-2$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

풀이 전략 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $(a,\ 1)$을 지나고, y축(직선 $x=0$)을 점근선으로 한다.

풀이 $y=3^{x+a}+b$에서 x와 y를 서로 바꾸면 $x=3^{y+a}+b$, $3^{y+a}=x-b$

$y+a=\log_3(x-b)$, $y=\log_3(x-b)-a$

따라서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(x)=\log_3(x-b)-a$

곡선 $y=g(x)$가 점 $(b+1,\ 1)$을 지나므로 $g(b+1)=1$에서

$\log_3 1-a=1$, $a=-1$

또 곡선 $y=g(x)$의 점근선은 직선 $x=b$이므로 $b=-2$

따라서 $a+b=-1+(-2)=-3$

답 ①

다른 풀이 함수 $g(x)$의 역함수가 $f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(b+1,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $(1,\ b+1)$을 지난다. 따라서 $f(1)=3^{1+a}+b=b+1$, $3^{1+a}=1$

$1+a=\log_3 1=0$에서 $a=-1$

또 곡선 $y=g(x)$의 점근선인 직선 $x=-2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $y=-2$는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다. 이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 직선 $y=b$이므로 $b=-2$

따라서 $a+b=-1+(-2)=-3$

정답과 풀이 12쪽

[20007-0039]

유제 5 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-1}+b\ (a>0,\ a\neq1)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$가 점 $(3,\ 0)$을 지나고 점근선이 직선 $x=-2$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

[20007-0040]

유제 6 곡선 $y=\log_a x\ (a>1)$이 x축, 직선 $y=2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACBD의 넓이가 7일 때, 상수 a의 값은?

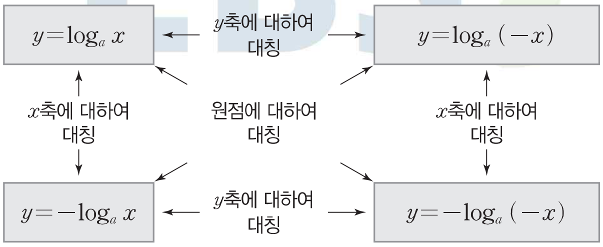
① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

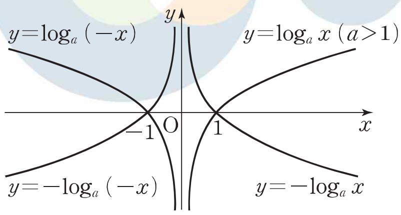
9. 로그함수의 그래프의 평행이동 및 대칭이동

(1) 평행이동

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y=\log_a(x-m)+n$이다. 이때 함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프는 점 $(1+m,\ n)$을 지나고, 점근선은 직선 $x=m$이다.

(2) 대칭이동





참고 $\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

10. 로그함수의 최댓값과 최솟값

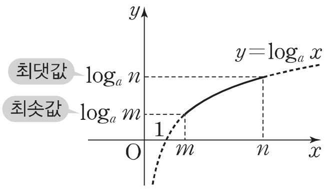
정의역이 $\{x\,|\,m\leq x\leq n\}$ $(0<m\leq n)$일 때, 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값

(1) $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 $\log_a m$, $x=n$에서 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.

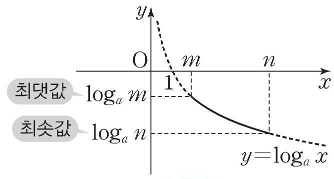
(2) $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 $\log_a m$, $x=n$에서 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

설명 정의역이 $\{x\,|\,m\leq x\leq n\}$ $(0<m\leq n)$일 때, 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값은 함수의 그래프를 그려서 다음과 같이 판단할 수 있다.

(1) $a>1$일 때



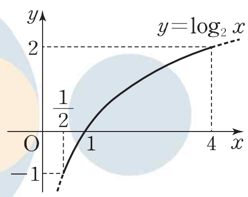
(2) $0<a<1$일 때



예 (1) 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leq x\leq4\right\}$일 때, 함수 $y=\log_2 x$의 최댓값과 최솟값

함수 $y=\log_2 x$의 밑이 2이고 $2>1$이므로 함수 $y=\log_2 x$는

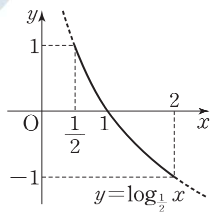
$x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\log_2\frac{1}{2}=-1$을 갖고, $x=4$에서 최댓값 $\log_2 4=2$를 갖는다.



(2) 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leq x\leq2\right\}$일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 최댓값과 최솟값

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는

$x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$을 갖고, $x=2$에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 2=-1$을 갖는다.



예제 4 로그함수의 최댓값과 최솟값

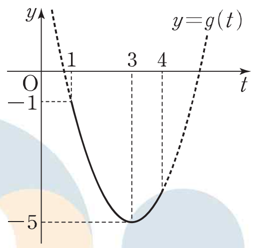
두 함수 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=x^2-6x+4$에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,2\le x\le 16\}$인 함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

풀이 전략 정의역이 $\{x\,|\,m\le x\le n,\ m>0\}$일 때, 함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\ne 1)$의 최댓값과 최솟값
① $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 $\log_a m$, $x=n$에서 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.
② $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 $\log_a m$, $x=n$에서 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

풀이 함수 $f(x)=\log_2 x$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로
x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하고, x의 값이 감소하면 $f(x)$의 값도 감소한다.
이때 $f(x)=t$로 놓으면
$2\le x\le 16$일 때 $\log_2 2\le t\le \log_2 16$, 즉 $1\le t\le 4$이고

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))=g(t)\\&=t^2-6t+4\\&=(t-3)^2-5\end{aligned}$$



이므로 $1\le t\le 4$일 때 $g(3)\le g(t)\le g(1)$
즉, $-5\le g(t)\le -1$
따라서 함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$$-1+(-5)=-6$$

답 ④

정답과 풀이 13쪽

[20007-0041]
유제 7 두 함수 $f(x)=6-x^2$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$에 대하여 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\le x\le 4\right\}$인 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

[20007-0042]
유제 8 정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le 3\}$일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-4x+6)$의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

11. 지수함수의 활용

(1) 지수에 미지수를 포함한 방정식

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 다음이 성립한다.

$a^{x_1}=a^{x_2} \iff x_1=x_2$

이 성질을 이용하여 지수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있다.

① $a^{f(x)}=b \iff f(x)=\log_a b$ (단, $b>0$)

② $a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

(2) 지수에 미지수를 포함한 부등식

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

① $a>1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1<x_2$

② $0<a<1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1>x_2$

참고 부등식 $a^{f(x)}<a^{g(x)}$의 해는 밑 a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 구한다.

(i) $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)<g(x)$ (부등호의 방향이 일치)

(ii) $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$ (부등호의 방향이 반대)

12. 로그함수의 활용

(1) 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 양의 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 다음이 성립한다.

$\log_a x_1=\log_a x_2 \iff x_1=x_2$

이 성질을 이용하여 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있다.

① $\log_a f(x)=b \iff f(x)=ab,\ f(x)>0$

② $\log_a f(x)=\log_a g(x) \iff f(x)=g(x),\ f(x)>0,\ g(x)>0$

(2) 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

① $a>1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff 0<x_1<x_2$

② $0<a<1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1>x_2>0$

참고 부등식 $\log_a f(x)<\log_a g(x)$의 해는 밑 a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 구한다.

(i) $a>1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff 0<f(x)<g(x)$ (부등호의 방향이 일치)

(ii) $0<a<1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff f(x)>g(x)>0$ (부등호의 방향이 반대)

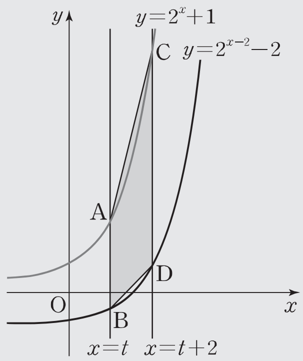
주의 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식의 해를 구할 때에는 로그의 정의에 의하여

(로그의 진수)>0

을 만족시켜야 함에 유의한다.

예제 5 지수에 미지수를 포함한 방정식

그림과 같이 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=2^x+1$, $y=2^{x-2}-2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또 직선 $x=t+2$가 두 곡선 $y=2^x+1$, $y=2^{x-2}-2$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABDC의 넓이가 21일 때, 실수 t의 값은?



① $\log_2 3$　② 2　③ $\log_2 5$
④ $\log_2 6$　⑤ $\log_2 7$

풀이 전략 지수에 미지수를 포함한 방정식의 해는 다음을 이용하여 구한다. (단, $a>0$, $a\neq1$)
① $a^{f(x)}=b \iff f(x)=\log_a b$ (단, $b>0$)
② $a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

풀이 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 사각형 ABDC는 사다리꼴이고, 네 점 A, B, C, D의 좌표는 차례로

$(t,\ 2^t+1)$, $(t,\ 2^{t-2}-2)$, $(t+2,\ 2^{t+2}+1)$, $(t+2,\ 2^t-2)$

이다. 따라서

$$\overline{AB}=(2^t+1)-(2^{t-2}-2)=2^t-\frac{2^t}{4}+3=\frac{3}{4}\times2^t+3,$$
$$\overline{CD}=(2^{t+2}+1)-(2^t-2)=4\times2^t-2^t+3=3\times2^t+3$$

이므로 사다리꼴 ABDC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{3}{4}\times2^t+3\right)+(3\times2^t+3)\right\}\times2=\frac{15}{4}\times2^t+6$$

$\frac{15}{4}\times2^t+6=21$에서 $\frac{15}{4}\times2^t=15$, $2^t=4$

따라서 $2^t=2^2$이므로 $t=2$

답 ②

정답과 풀이 13쪽

[20007-0043]
유제 9 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2}>3^{20-19x}$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?

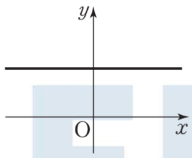
① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

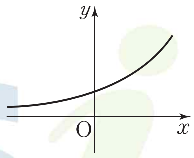
[20007-0044]
유제 10 방정식 $\log_2(2x+1)+\log_2(x-4)=\log_2 11$의 실근을 구하시오.

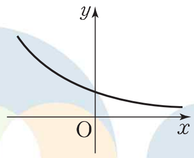
Level 1 기초 연습

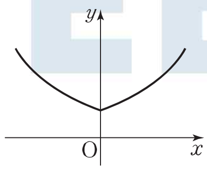
[20007-0045]

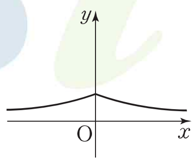
1 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$에 대하여 함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프의 개형은?

①


②


③


④


⑤


[20007-0046]

2 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 함수 $y=2-\left(\frac{2}{3}\right)^x$의 그래프와 일치한다. $f(2)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{2}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

[20007-0047]

3 $a>1$인 실수 a에 대하여 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 2\}$인 함수 $f(x)=a^x+2$의 최댓값과 최솟값의 차가 8일 때, $f(1)$의 값은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

[20007-0048]

4 두 함수 $y=2^{-x+3}+\frac{1}{2}$, $y=\log_a(2x-1)+b$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a>0$, $a\neq1$)

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

[20007-0049]

5 함수 $y=\log_2(2x-a)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 직선 $y=2$일 때, $f(a-2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

[20007-0050]

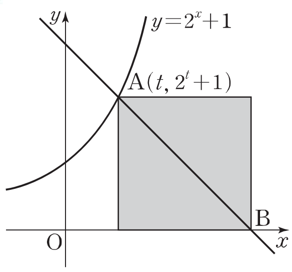
6 정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le 5\}$인 함수 $y=2\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -10　② -8　③ -6　④ -4　⑤ -2

[20007-0051]

7 함수 $y=2^x+1$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ 2^t+1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 선분 AB를 대각선으로 하는 정사각형의 넓이가 16일 때, 점 B의 x좌표는 $\log_2 a$이다. 양수 a의 값을 구하시오.

(단, t는 실수이다.)

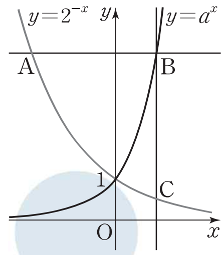


[20007-0052]

8 부등식 $\log_2 x+\log_2(10-x)\le 4$를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

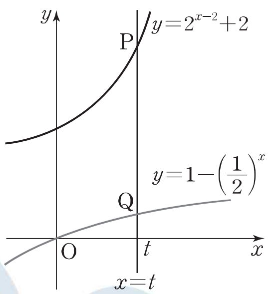
[20007-0053]

1 그림과 같이 곡선 $y=2^{-x}$ 위의 점 A는 제2사분면의 점이다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^{x}$ $(a>1)$과 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{-x}$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{31}{2}$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.



[20007-0054]

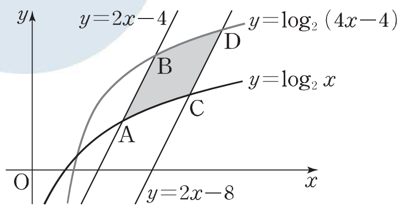
2 그림과 같이 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=2^{x-2}+2$, $y=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 PQ의 길이를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$는 $t=a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. $a+b$의 값은?



① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

[20007-0055]

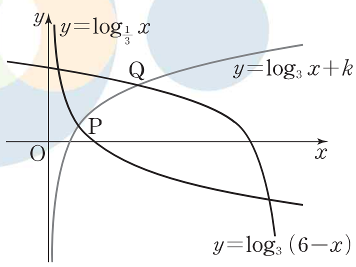
3 그림과 같이 제1사분면에서 직선 $y=2x-4$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=2x-8$이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 두 선분 AB, CD와 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는?



① $2\sqrt{2}$　　② $\sqrt{10}$　　③ $2\sqrt{3}$　　④ 4　　⑤ $3\sqrt{2}$

[20007-0056]

4 그림과 같이 함수 $y=\log_3 x+k$의 그래프가 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$, $y=\log_3(6-x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P와 점 Q의 x좌표의 값의 비가 $1:3$일 때, 실수 k의 값은? (단, $-3<k<3$)



① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ 0　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 1

정답과 풀이 17쪽

[20007-0057]

1 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=(a^2+a+1)^x$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $a\neq0$, $a\neq-1$)

보기

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 직선 $y=0$이다.

ㄴ. $-1<a<0$이면 $f(1)<1$이다.

ㄷ. $f(-1)<1$이면 $a>0$이다.

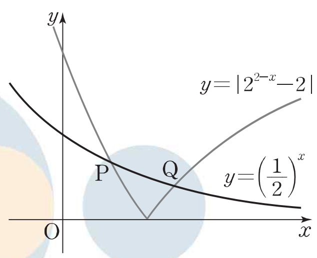
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[20007-0058]

2 그림과 같이 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=|2^{2-x}-2|$가 만나는 두 점을 각각

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$

라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $x_1<1<x_2$

ㄴ. $y_2>\frac{1}{2}$

ㄷ. $x_1>\frac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

[20007-0059]

3 자연수 n에 대하여 직선 $y=t$ (t는 실수)와 두 곡선 $y=\log_3 x$, $y=\log_3(x-n)$이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_3 x$와 만나는 점을 R라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오.

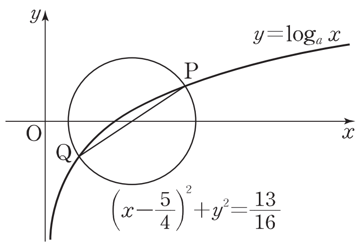
(가) $1\leq n\leq50$

(나) 어떤 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{RQ}}\geq20$이다.

대표 기출 문제

출제 경향 로그함수의 그래프와 그 성질을 이용하여 로그의 진수에 미지수가 포함된 방정식의 해를 구하는 문제가 출제된다.

$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C : \left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]



① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

2018학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 ▸ 로그함수의 그래프와 원의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(p, \log_a p)$, $(q, \log_a q)$ $(p>q)$로 놓으면

선분 PQ의 중점이 원의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이므로 $\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$, $\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서

$$p+q=\frac{5}{2},\ pq=1$$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식은

$$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$$
$$2t^2-5t+2=0$$
$$(2t-1)(t-2)=0$$
$$t=\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=2$$

즉, $p=2$, $q=\frac{1}{2}$

이때 $\mathrm{P}(2, \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}, \log_a \frac{1}{2}\right)$이고, 선분 PQ의 길이가 원의 지름 $\frac{\sqrt{13}}{2}$이므로

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

정리하면 $(\log_a 4)^2=1$

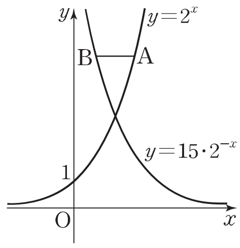
$a>1$이므로 $\log_a 4=1$에서 $a=4$

답 ③

대표 기출 문제

출제 경향 지수함수와 로그함수의 관계를 이용하여 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식의 해를 구하는 문제가 출제된다.

그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $1<\overline{\mathrm{AB}}<100$을 만족시키는 2 이상의 자연수 a의 개수는? [4점]



① 40 ② 43 ③ 46

④ 49 ⑤ 52

2014학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 ▸ 로그에 미지수가 포함된 부등식을 지수와 로그의 성질을 이용하여 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 곡선 $y=2^x$, $y=15\times 2^{-x}$의 교점의 x좌표를 t라 하면

$$2^t=15\times 2^{-t}$$

$$(2^t)^2=15,\ 2^t=\sqrt{15}<4$$

이므로 $t<2$ …… ㉠

점 $\mathrm{A}(a,\ 2^a)$과 점 B의 y좌표가 서로 같으므로

$$15\times 2^{-x}=2^a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2(15\times 2^{-x})=\log_2 2^a,\ \log_2 15-x=a$$

$$x=\log_2 15-a$$

이므로 점 B의 x좌표는 $\log_2 15-a$이다.

이때 ㉠에서 $t<2$이고, $a\ge 2$이므로 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 크다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=a-(\log_2 15-a)=2a-\log_2 15$

$1<\overline{\mathrm{AB}}<100$에서

$$1<2a-\log_2 15<100$$

$$\frac{1+\log_2 15}{2}<a<\frac{100+\log_2 15}{2}$$

이때 $\log_2 2^3<\log_2 15<\log_2 2^4$, 즉 $3<\log_2 15<4$이고 a는 자연수이므로

$$3\le a\le 51$$

따라서 자연수 a의 개수는

$$51-3+1=49$$

답 ④