EBS 수능특강 수학영역

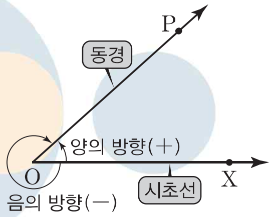
03 삼각함수의 뜻과 그래프

1. 일반각과 호도법

(1) 일반각

① 각과 각의 크기

평면에서 반직선 OP가 반직선 OX의 위치에서 점 O를 중심으로 회전할 때, 두 반직선 OX, OP로 이루어진 도형을 기호 ∠XOP로 나타내고, 회전한 양을 ∠XOP의 크기라고 한다. 이때 반직선 OX를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 한다. 또 동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시곗바늘이 도는 방향의 반대방향을 양의 방향, 시곗바늘이 도는 방향을 음의 방향이라고 한다.



이때 각의 크기는 양의 방향일 때는 양의 부호 +, 음의 방향일 때는 음의 부호 −를 붙여서 나타낸다.

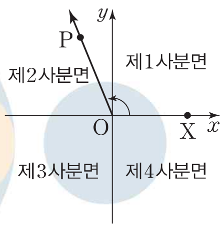
② 일반각

시초선 OX와 동경 OP에 의하여 ∠XOP가 주어질 때, 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 $\alpha°$라 하면 ∠XOP의 크기는 다음과 같이 나타내고, 이것을 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

$360° \times n + \alpha°$ (단, n은 정수)

③ 사분면의 각

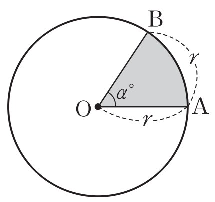
좌표평면에서 원점 O에 대하여 시초선 OX를 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 OP가 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다.



(2) 호도법

① 호도법

중심이 O이고 반지름의 길이가 r인 원에서 호 AB의 길이가 r인 부채꼴 OAB의 중심각의 크기 $\alpha°$를 1라디안(radian)이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.



참고 호도법으로 각을 나타낼 때는 단위인 라디안은 보통 생략한다.

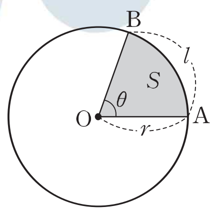
② 육십분법과 호도법의 관계

1(라디안)$=\dfrac{180°}{\pi}$, $1°=\dfrac{\pi}{180}$(라디안)

설명 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 $2\pi r : r = 360° : \alpha°$, $\alpha° = \dfrac{180°}{\pi}$, 즉 1(라디안)$=\dfrac{180°}{\pi}$

③ 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면



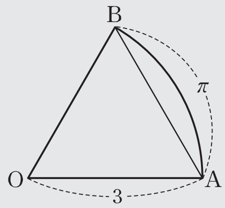
(i) $l = r\theta$　　(ii) $S = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}rl$

설명 호의 길이 l과 부채꼴의 넓이 S는 중심각의 크기 θ(라디안)에 비례하므로

(i) $l : 2\pi r = \theta : 2\pi$에서 $l = r\theta$　　(ii) $S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$에서 $S = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}rl$

예제 1 호도법

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이는 π이다. $\angle\mathrm{AOB}=a\pi$이고 삼각형 OAB의 넓이는 b일 때, ab의 값은?

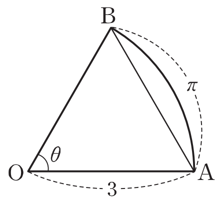


① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　② $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　③ $\sqrt{3}$　④ $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

풀이 전략 부채꼴의 반지름의 길이와 호의 길이를 이용하여 부채꼴의 중심각의 크기를 구한 후 삼각형의 넓이를 구한다.

풀이 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하면 부채꼴 OAB의 호 AB의 길이가 π이므로

$$\overline{\mathrm{OA}}\times\theta=\pi,\ 3\times\theta=\pi,\ \theta=\frac{\pi}{3}$$



$a\pi=\dfrac{\pi}{3}$에서 $a=\dfrac{1}{3}$

삼각형 OAB의 넓이가 b이고, 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로

$$b=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

따라서 $ab=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

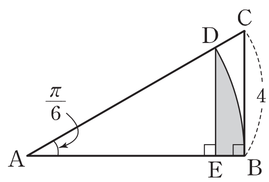
답 ②

참고 (삼각형 ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin A$

정답과 풀이 19쪽

[20007-0060]

유제 1 그림과 같이 $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{\pi}{6}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=4$인 직각삼각형 ABC에서 점 A를 중심으로 하고 선분 AB를 반지름으로 하는 원이 변 CA와 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라 하자. 호 BD와 두 선분 DE, EB로 둘러싸인 도형의 넓이가 $a\pi+b\sqrt{3}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 정수이다.)

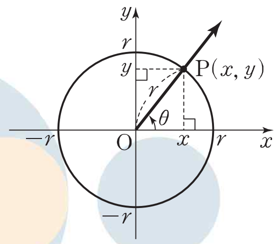


① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[20007-0061]

유제 2 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 원 위에 점 A가 있다. 반직선 OA를 시초선으로 했을 때, 두 각 $\dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{10}{3}\pi$가 나타내는 동경이 이 원과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ를 포함하는 부채꼴 OPQ의 넓이가 $a\pi$일 때, $3a$의 값을 구하시오.

2. 삼각함수의 정의



좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 한 점을 P(x, y), x축의 양의 방향을 시초선으로 하였을 때 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, θ에 대한 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

이때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$를 각각 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라고 한다.

설명〉 동경 OP가 나타내는 각 θ에 대하여 다음 값은 각각 하나로 결정된다.

$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

즉, 다음의 대응관계는 각각 θ에 대한 함수가 된다.

$$\theta \longrightarrow \frac{y}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{x}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

이때 각 함수를 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

참고〉 각 사분면에서의 삼각함수의 부호는 다음 표와 같다.

사분면 / 삼각함수	제1사분면	제2사분면	제3사분면	제4사분면
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

참고〉 $\tan\theta$는 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서 정의되지 않는다.

3. 삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

설명〉 각 θ가 나타내는 동경과 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 P(x, y)라 하면 다음이 성립한다.

(1) $\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$이므로

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

(2) 점 P(x, y)가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=y^2+x^2=1$$

예제 2 삼각함수의 정의

좌표평면에 원 $x^2+y^2=1$과 점 $A(1, 0)$이 있다. 이 원 위의 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각을 θ라 할 때, 점 P와 각 θ가 다음 조건을 만족시킨다. (단, O는 원점이다.)

(가) 두 점 A, P에 의하여 나누어진 두 호 중 하나는 길이가 $\frac{2}{3}\pi$이다.

(나) $\sin\theta<0$

$\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$의 값은?

① $-2\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ 0 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

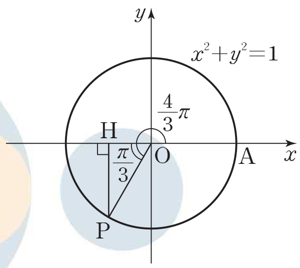
풀이 전략 두 조건을 만족시키는 θ의 값을 구한 후 삼각함수의 정의를 이용하여 $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 두 호 중 하나는 길이가 $\frac{2}{3}\pi$이므로 이 호의 길이를 갖는

부채꼴의 중심각의 크기를 α라 하면 $1\times\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\alpha=\frac{2}{3}\pi$

조건 (나)에서 $\sin\theta<0$이므로 동경 OP가 나타내는 각은 제3사분면의 각이다.

그러므로 $0\le\theta<2\pi$라 하면 $\theta=\frac{4}{3}\pi$



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{OH}=\frac{1}{2}$이므로

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

따라서 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$이므로 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{3}$

답 ①

정답과 풀이 20쪽

[20007-0062]

유제 3 $\sin\theta=\frac{3}{5}$이고 $\cos\theta+\sin\theta\times\tan\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은?

① $-\frac{5}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[20007-0063]

유제 4 $\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)<0$이고 $\tan\theta=2\sqrt{2}$일 때, $\cos\theta$의 값은?

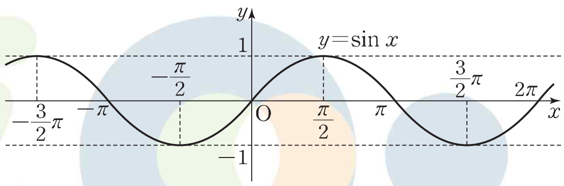
① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

4. 삼각함수의 그래프

(1) 함수 $y=\sin x$의 그래프

① 정의역은 실수 전체의 집합이고,
치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

② 모든 실수 x에 대하여
$\sin(-x)=-\sin x$이다.
즉, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



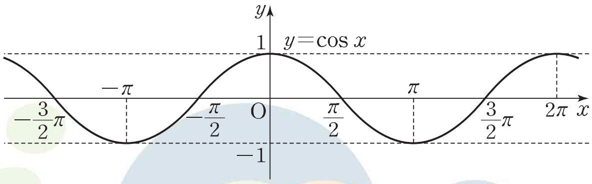
③ 모든 실수 x에 대하여 $\sin(2n\pi+x)=\sin x$ (n은 정수)이고, 주기가 2π인 주기함수이다.

참고 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고, 상수 p 중 최소인 양수를 함수 $f(x)$의 주기라고 한다.

(2) 함수 $y=\cos x$의 그래프

① 정의역은 실수 전체의 집합이고,
치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

② 모든 실수 x에 대하여
$\cos(-x)=\cos x$이다.
즉, 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

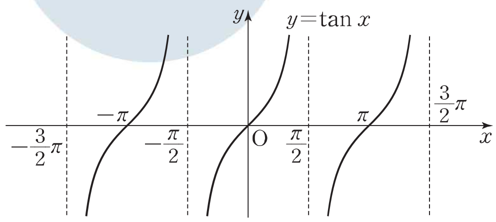


③ 모든 실수 x에 대하여 $\cos(2n\pi+x)=\cos x$ (n은 정수)이고, 주기가 2π인 주기함수이다.

(3) 함수 $y=\tan x$의 그래프

① 정의역은 $x \ne n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여
$\tan(-x)=-\tan x$이다.
즉, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



③ 모든 실수 x에 대하여 $\tan(n\pi+x)=\tan x$ (n은 정수)이고, 주기가 π인 주기함수이다.

④ 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

참고 여러 가지 삼각함수의 그래프

① 함수 $y=a\sin x$, $y=a\cos x$, $y=a\tan x$ (a는 0이 아닌 상수)의 그래프

(i) 함수 $y=a\sin x$, $y=a\cos x$의 최솟값과 최댓값은 각각 $-|a|$, $|a|$이다.

(ii) 함수 $y=a\tan x$의 최솟값과 최댓값은 없다.

② 함수 $y=\sin ax$, $y=\cos ax$, $y=\tan ax$ (a는 0이 아닌 상수)의 그래프

(i) 함수 $y=\sin ax$, $y=\cos ax$의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{|a|}$이다.

(ii) 함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$이다.

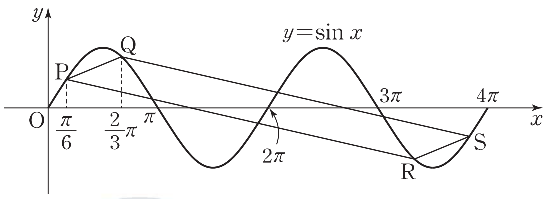
예제 3 삼각함수의 그래프

$0 \le x \le 4\pi$에서 곡선 $y=\sin x$ 위에 x좌표가 각각 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2}{3}\pi$인 두 점 P, Q가 있다. 이 곡선 위에 있으며 x좌표가 3π 이상이고 4π 이하인 두 점 R, S를 사각형 PRSQ가 평행사변형이 되도록 잡을 때, 삼각형 QRS의 무게중심의 좌표는 (a, b)이다. $\frac{a}{b}$의 값은?

① $-\frac{47}{3}\pi$ ② -15π ③ $-\frac{43}{3}\pi$ ④ $-\frac{41}{3}\pi$ ⑤ -13π

풀이 전략 함수 $y=\sin x$의 그래프를 이용하여 두 점 R, S의 좌표를 구한다.

풀이 $0 \le x \le 4\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 평행사변형 PRSQ를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



두 점 P, Q의 좌표는 각각

$\left(\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{2}{3}\pi, \sin\frac{2}{3}\pi\right)$

즉, $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

두 점 R, S의 x좌표를 각각 α, β라 하면 함수 $y=\sin x$의 그래프가 점 $(2\pi, 0)$에 대하여 대칭이고 주기가 2π이므로

$\alpha=3\pi+\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{10}{3}\pi$, $\beta=4\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{23}{6}\pi$

그러므로 두 점 R, S의 좌표는 각각 $\left(\frac{10}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{23}{6}\pi, -\frac{1}{2}\right)$

따라서 삼각형 QRS의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{2}{3}\pi+\frac{10}{3}\pi+\frac{23}{6}\pi}{3}, \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)}{3}\right),\text{ 즉 }\left(\frac{47}{18}\pi, -\frac{1}{6}\right)$$

이므로 $\frac{a}{b}=-\frac{47}{3}\pi$

답 ①

정답과 풀이 20쪽

[20007-0064]

유제 5 양수 a에 대하여 함수 $y=2\cos(ax)+a$는 주기가 4π이고 최댓값 M을 갖는다. $a+M$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[20007-0065]

유제 6 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$에서 함수 $y=\tan 2x$의 그래프와 직선 $y=m\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $(m>0)$이 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, $\beta-\alpha=\frac{3}{4}\pi$이다. $3\pi m$의 값을 구하시오.

5. 삼각함수의 성질

(1) $2n\pi+\theta$의 삼각함수 (단, n은 정수)

① $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$ ② $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$ ③ $\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$

(2) $-\theta$의 삼각함수

① $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ② $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ③ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

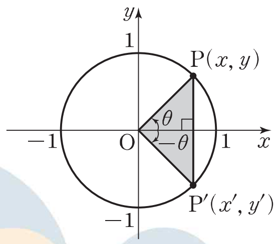
(3) $\pi+\theta$의 삼각함수

① $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ ② $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ ③ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

(4) $\frac{\pi}{2}+\theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ ② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

설명 (2) 각 θ와 각 $-\theta$가 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 P(x, y), P$'(x', y')$이라 하면 점 P와 점 P$'$은 x축에 대하여 서로 대칭이므로 $x'=x$, $y'=-y$이다. 따라서 다음이 성립한다.

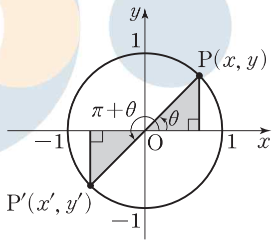


$\sin(-\theta)=y'=-y=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=x'=x=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\tan\theta\ (x\neq0)$

(3) 각 θ와 각 $\pi+\theta$가 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 P(x, y), P$'(x', y')$이라 하면 점 P와 점 P$'$은 원점에 대하여 서로 대칭이므로 $x'=-x$, $y'=-y$이다. 따라서 다음이 성립한다.

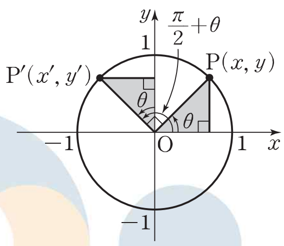


$\sin(\pi+\theta)=y'=-y=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=x'=-x=-\cos\theta$

$\tan(\pi+\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\tan\theta\ (x\neq0)$

(4) 각 θ와 각 $\frac{\pi}{2}+\theta$가 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 P(x, y), P$'(x', y')$이라 하면 점 P$'$의 x좌표는 점 P의 y좌표와 절댓값이 서로 같고 부호가 반대이므로 $x'=-y$이고, 점 P$'$의 y좌표는 점 P의 x좌표와 같으므로 $y'=x$이다. 따라서 다음이 성립한다.



$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=y'=x=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=x'=-y=-\sin\theta$

참고 위의 (3), (4)의 식에 θ 대신 $-\theta$를 대입하면 다음이 성립한다.

(1) $\sin(\pi-\theta)=-\sin(-\theta)=\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sin(-\theta)=\sin\theta$

예제 4 삼각함수의 성질

$\cos\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}$이고 $\tan\theta<0$일 때, $\sin(-\theta)\times\cos(\pi+\theta)$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{9}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{9}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

풀이 전략 삼각함수의 성질을 이용하여 θ에 대한 삼각함수로 나타낸 후 삼각함수의 값을 구한다.

풀이 $\cos\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}$에서

$$\cos\theta+\cos\theta=\frac{2}{3},\ \cos\theta=\frac{1}{3}$$

한편 $\tan\theta<0$이고, $\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta<0$이어야 한다.

그러므로

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sin(-\theta)\times\cos(\pi+\theta)&=-\sin\theta\times(-\cos\theta)\\&=\sin\theta\times\cos\theta\\&=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{3}\\&=-\frac{2\sqrt{2}}{9}\end{aligned}$$

답 ①

정답과 풀이 21쪽

[20007-0066]

유제 7 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\frac{1}{3}$이고 $\tan\theta>0$일 때, $\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

[20007-0067]

유제 8 $\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)>0$이고 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$일 때, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

6. 삼각함수의 활용

(1) 방정식에의 활용

방정식 $2\sin x=1$, $\tan x=-1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 방정식을 $\sin x=k$ ($\cos x=k$, $\tan x=k$)의 꼴로 변형한다.

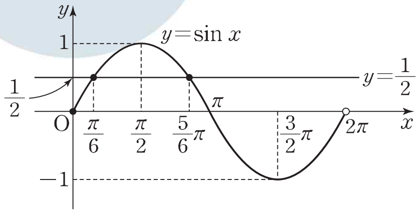
② 주어진 범위에서 삼각함수 $y=\sin x$ ($y=\cos x$, $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$를 그린 후 두 그래프의 교점의 x좌표를 구하여 해를 구한다.

예 $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해를 구해 보자.

이 방정식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표이다.

그러므로 오른쪽 그림에서 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

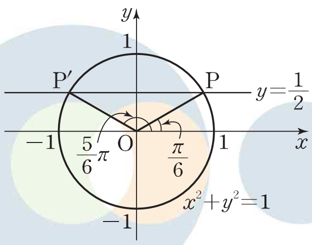


참고 단위원을 이용하는 방법

단위원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=\frac{1}{2}$이 만나는 두 점을 P, P′이라 할 때, 방정식의 해는 두 동경 OP, OP′이 나타내는 각의 크기이다.

그러므로 오른쪽 그림에서 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$



(2) 부등식에의 활용

부등식 $2\sin x<1$, $2\sin x>-1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 부등식을 $\sin x>k$ ($\sin x\ge k$, $\sin x<k$, $\sin x\le k$)의 꼴로 변형한다.

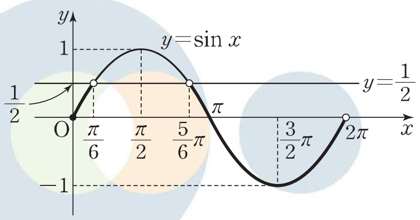
② 주어진 범위에서 삼각함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하여 해를 구한다. 이때 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구하여 해를 구한다.

예 $0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $\sin x<\frac{1}{2}$의 해를 구해 보자.

주어진 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

이때 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로 구하는 해는

$0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<2\pi$



참고 (1) 삼각함수를 포함한 부등식도 방정식과 마찬가지로 단위원을 이용하여 풀 수 있다.

(2) 두 개 이상의 삼각함수가 포함된 방정식 또는 부등식은 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 등을 이용하여 하나의 삼각함수로 변형하여 풀면 편리하다.

예제 5 삼각함수의 활용

$0 \le x < 2\pi$이고 $\cos x \ne 0$일 때, 방정식 $\sin x \times \tan x - \cos x = 1$의 서로 다른 모든 실근의 합은?

① 2π　② $\frac{5}{2}\pi$　③ 3π　④ $\frac{7}{2}\pi$　⑤ 4π

풀이 전략 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 나타낸 후 방정식을 푼다.

풀이 $\sin x \times \tan x - \cos x = 1$에서

$$\sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} - \cos x = 1$$

$\cos x \ne 0$이므로 양변에 $\cos x$를 곱하면

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x,\ (1-\cos^2 x) - \cos^2 x = \cos x$$

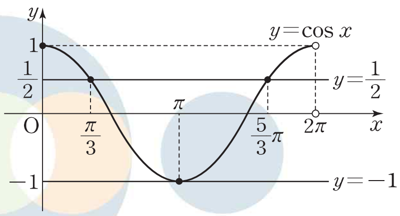
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0,\ (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = -1$$

함수 $y = \cos x$의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이고, 함수 $y = \cos x$의 그래프와 직선 $y = -1$이 만나는 점의 x좌표는 π이다.

따라서 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi + \pi = 3\pi$$



답 ③

정답과 풀이 21쪽

[20007-0068]

유제 9 $0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $2\sin^2 x + 5\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2 < 0$을 만족시키는 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\beta - \alpha$의 값은?

① $\frac{\pi}{3}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ π　④ $\frac{4}{3}\pi$　⑤ $\frac{5}{3}\pi$

[20007-0069]

유제 10 $0 \le x < 2\pi$에서 방정식 $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \times \cos x - 1 = 0$과 부등식 $\cos x < 0$을 동시에 만족시키는 서로 다른 모든 x의 값의 합은?

① $\frac{5}{3}\pi$　② 2π　③ $\frac{7}{3}\pi$　④ 3π　⑤ $\frac{10}{3}\pi$

Level 1 기초 연습

[20007-0070]

1 $\sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[20007-0071]

2 호의 길이는 8π이고, 중심각의 크기는 $\frac{4}{5}\pi$인 부채꼴의 넓이는?

① 20π ② 25π ③ 30π ④ 35π ⑤ 40π

[20007-0072]

3 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(4, -3)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

[20007-0073]

4 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$일 때, $\cos\theta\times\tan^2\theta$의 값은?

① $-\frac{4}{15}$ ② $-\frac{3}{10}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{11}{30}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

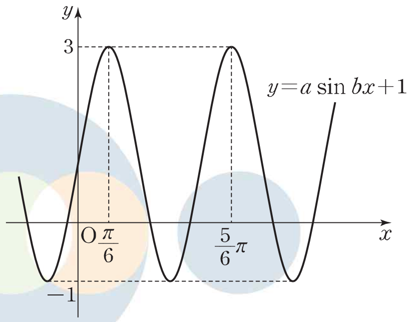
[20007-0074]

5 이차방정식 $3x^2-\sqrt{3}x+a=0$의 두 실근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

[20007-0075]

6 두 양수 a, b에 대하여 함수 $y=a\sin bx+1$의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b$의 값은?



① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

[20007-0076]

7 $\left\{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right\}^2+\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\right\}^2$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

[20007-0077]

8 $0\le x<2\pi$에서 방정식 $2\sin^2 x+\sin x-1=0$의 모든 실근의 합은?

① $\frac{3}{2}\pi$　② 2π　③ $\frac{5}{2}\pi$　④ 3π　⑤ $\frac{7}{2}\pi$

[20007-0078]

9 $0\le x<2\pi$에서 부등식 $\cos^2 x-\sin^2 x-3\cos x-1>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ $\frac{3}{4}\pi$　④ $\frac{5}{6}\pi$　⑤ π

Level 2 기본 연습

[20007-0079]

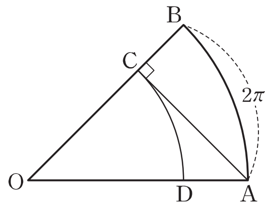
1 $0 \le \theta < 2\pi$일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 θ의 값의 합은?

(가) $\sin\theta \times \cos\theta < 0$
(나) 좌표평면에서 각 θ가 나타내는 동경과 각 6θ가 나타내는 동경이 서로 일치한다.

① $\frac{8}{5}\pi$ ② 2π ③ $\frac{12}{5}\pi$ ④ $\frac{14}{5}\pi$ ⑤ $\frac{16}{5}\pi$

[20007-0080]

2 그림과 같이 중심이 O이고 호 AB의 길이가 2π, 넓이가 8π인 부채꼴 OAB가 있다. 점 A에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 C, 점 O를 중심으로 하고 반지름이 선분 OC인 원이 선분 OA와 만나는 점을 D라 할 때, 호 CD의 길이는?



① $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$
④ $\sqrt{2}\pi$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}\pi$

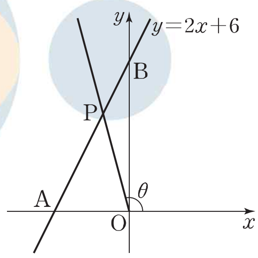
[20007-0081]

3 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$에서 $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{5}{2}$일 때, $\tan\theta$의 값은?

① $-\frac{7}{6}$ ② $-\frac{6}{5}$ ③ $-\frac{5}{4}$ ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

[20007-0082]

4 좌표평면에서 직선 $y=2x+6$과 x축 및 y축이 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 P라 하자. 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta \times \cos\theta$의 값은? (단, $0 \le \theta < 2\pi$이고, O는 원점이다.)



① $-\frac{2}{17}$ ② $-\frac{4}{17}$ ③ $-\frac{6}{17}$
④ $-\frac{8}{17}$ ⑤ $-\frac{10}{17}$

[20007-0083]

5 어떤 실수 θ에 대하여 두 등식 $2\sin\theta+a\cos\theta=\frac{4\sqrt{5}}{3}$, $a\sin\theta-2\cos\theta=\frac{1}{3}$을 동시에 만족시키는 상수 a가 존재할 때, a^2의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[20007-0084]

6 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=4$를 만족시키는 θ에 대하여 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 $2\sin^2\theta$, $2\cos^2\theta$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[20007-0085]

7 함수 $f(x)=a\sin 2x+1$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{12}, 3\right)$을 지날 때, 함수 $y=f(x)$의 최댓값은?

(단, a는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[20007-0086]

8 $0\le x<2\pi$에서 함수 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+2\cos(\pi+x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

[20007-0087]

9 좌표평면에서 직선 $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\cos(\pi+\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\times\sin(\pi-\theta)$의 값은?

① $-\frac{3}{5}$　② $-\frac{2}{5}$　③ $-\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{3}{5}$

[20007-0088]

10 $0\le x<2\pi$에서 방정식

$$\log_3(\tan x)=\log_2\sqrt{2}$$

의 모든 해의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[20007-0089]

11 $0\le x<2\pi$에서 방정식 $\tan^2 x-2\sin^2 x=0$의 모든 해의 합은?

① 3π　② $\frac{7}{2}\pi$　③ 4π　④ $\frac{9}{2}\pi$　⑤ 5π

[20007-0090]

12 $0\le\theta<2\pi$일 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-(2\cos\theta)x-\sin^2\theta-2\cos\theta+2\ge0$이 항상 성립하도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha\le\theta\le\beta$이다. $4\alpha+\beta$의 값은?

① π　② $\frac{3}{2}\pi$　③ 2π　④ $\frac{5}{2}\pi$　⑤ 3π

Level 3 실력 완성

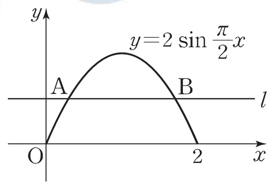
[20007-0091]

1 함수 $y=2^{x-2}+4$의 역함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 함수 $y=\tan\frac{\pi}{a}x$의 그래프의 점근선이 되도록 하는 양의 실수 a의 최댓값을 구하시오.

[20007-0092]

2 $0\le x\le 2$일 때, 그림과 같이 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 x축에 평행한 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{4}{3}$일 때, $\left(\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}\right)^2$의 값은?

(단, $\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}$이고, O는 원점이다.)



① 2 ② $\frac{13}{5}$ ③ 3 ④ $\frac{17}{5}$ ⑤ 4

[20007-0093]

3 $0\le x<2\pi$에서 방정식 $|\sin 2x|=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 서로 다른 해의 개수는 a이고, 모든 해의 합은 $b\pi$이다. $a+b$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

[20007-0094]

4 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$ (단, $-1\le x\le 1$)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 $0\le x\le 2n-1$에서 방정식 $(2n-1)f(x)=2x$의 서로 다른 실근의 개수가 51일 때, n의 값을 구하시오.

대표 기출 문제

출제 경향 삼각함수가 포함된 방정식 또는 부등식에 관련된 문제가 자주 출제되고 있다.

$0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$6x^2 + (4\cos\theta)x + \sin\theta = 0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha < \theta < \beta$이다. $3\alpha + \beta$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

2019학년도 대수능

출제 의도 ▸ 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

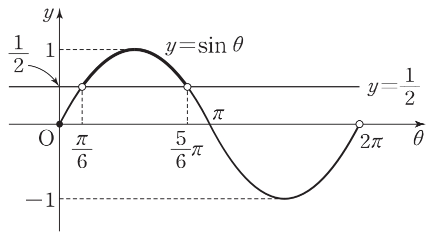
풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 갖지 않아야 하므로 $D < 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = 4\cos^2\theta - 6\sin\theta < 0$이므로 이 식에 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$를 대입하면

$$4(1 - \sin^2\theta) - 6\sin\theta < 0$$
$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 > 0$$
$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) > 0$$

$\sin\theta + 2 > 0$이므로

$$2\sin\theta - 1 > 0,\ \sin\theta > \frac{1}{2}$$
$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$



따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$이므로

$$3\alpha + \beta = 3 \times \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

답 ④

대표 기출 문제

출제 경향 삼각함수의 성질에 관한 문제나 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제되고 있다.

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

2019학년도 9월 대수능 모의평가

출제 의도 ▸ 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\\&=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\\&=\cos^2\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\\&=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\\&=1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\end{aligned}$$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t\ (-1\le t\le 1)$로 놓으면

$$\begin{aligned}f(x)&=-t^2-t+k+1\\&=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

이므로 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{5}{4}$를 갖고, $t=1$일 때 최솟값 $k-1$을 갖는다.

따라서 $k+\frac{5}{4}=3$에서 $k=\frac{7}{4}$이고, $m=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$이므로

$$k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$$

답 ③