

05 등차수열과 등비수열

1. 수열의 뜻과 일반항

- (1) 자연수 중 짝수를 차례로 나열하면

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

이다. 이와 같이 차례로 나열한 수의 열을 수열이라 하고, 나열된 각각의 수를 그 수열의 항이라고 한다.

- (2) 수열을 나열할 때는 각 항에 번호를 붙여

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

과 같이 나타내며, 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, ..., n 째항, ... 또는 제 1 항, 제 2 항, 제 3 항, ..., 제 n 항, ...이라고 한다. 이때 수열의 제 n 항을 수열의 일반항이라 하고, 일반항이 a_n 인 수열을 간단히 $\{a_n\}$ 으로 나타낸다.

2. 등차수열의 뜻과 일반항

- (1) 등차수열의 뜻 : 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더해 만들어지는 수열을 등차수열이라 하고, 더하는 일정한 수를 공차라고 한다.

- (2) 등차수열의 일반항 : 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

설명 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 각 항은 다음과 같다.

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 + d = a + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d$$

⋮

이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

예 첫째항이 1, 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 1 + (n-1) \times 5 = 5n - 4$

3. 등차중항

세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등차중항이라고 한다.

이때 b 가 a 와 c 의 등차중항이면 $b - a = c - b$ 이므로

$$2b = a + c, \text{ 즉 } b = \frac{a+c}{2}$$

가 성립한다. 역으로 $b = \frac{a+c}{2}$ 이면 $b - a = c - b$ 이므로 b 는 a 와 c 의 등차중항이다.

예 세 수 4, x , 10이 이 순서대로 등차수열을 이루면 x 는 4와 10의 등차중항이므로 $x = \frac{4+10}{2} = 7$



예제 1 등차수열의 일반항

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2=6, a_6-a_3=12$$

일 때, a_7 의 값은?

- ① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

풀이 전략 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = a + (n-1)d$$

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a_1 + d = 6 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a_6 - a_3 = (a_1 + 5d) - (a_1 + 2d) = 3d = 12 \text{에서}$$

$$d = 4$$

$d = 4$ 를 ㉠에 대입하면

$$a_1 + 4 = 6, a_1 = 2$$

따라서

$$a_7 = a_1 + 6d = 2 + 6 \times 4 = 26$$

답 ④

정답과 풀이 36쪽

[20007-0122]

유제 1 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 = 5, a_3 + a_4 + a_5 = 30$$

일 때, a_6 의 값은?

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

[20007-0123]

유제 2 세 수

$$1, \log_4 a, 3 \log_2 3$$

은 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 양수 a 의 값을 구하시오.

4. 등차수열의 합

(1) 첫째항이 a , 제 n 항이 l 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

설명 (1) 첫째항이 a , 공차가 d , 제 n 항이 l 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-2d) + (l-d) + l \quad \text{..... ㉠}$$

㉠의 우변의 합을 순서를 거꾸로 나타내면

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

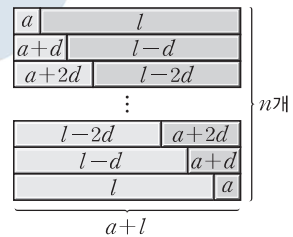
$$\begin{aligned} S_n &= a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-2d) + (l-d) + l \\ +) S_n &= l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a \\ \hline 2S_n &= (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots + (a+l) + (a+l) + (a+l) \end{aligned}$$

$$= n(a+l)$$

따라서 $S_n = \frac{n(a+l)}{2}$ ㉢

(2) (1)에서 $l = a + (n-1)d$ 이므로 이 식을 ㉢에 대입하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n\{a + a + (n-1)d\}}{2} \\ &= \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} \end{aligned}$$



예 (1) 첫째항이 2이고 제 10 항이 38인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합 S_{10} 은

$$S_{10} = \frac{10(2+38)}{2} = 200$$

(2) 첫째항이 5이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 12 항까지의 합 S_{12} 는

$$S_{12} = \frac{12\{2 \times 5 + (12-1) \times 3\}}{2} = 258$$

참고 (1) 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a-d}{2}n$$

이다. 이때 $\frac{d}{2} = A$, $\frac{2a-d}{2} = B$ 라 하면

$$S_n = An^2 + Bn$$

즉, 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 n 에 대한 이차식이고, 이때 상수항은 0이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

2 이상인 자연수 n 에 대하여

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \text{ 이므로}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

한편 $S_1 = a_1$ 이다.



예제 2 등차수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_1=3, a_4=a_2+10$$

일 때, S_{10} 의 값은?

- ① 240 ② 245 ③ 250 ④ 255 ⑤ 260

풀이 전략 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$$

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_4 = a_2 + 10 \text{에서 } a_4 - a_2 = 10 \text{이므로}$$

$$2d = 10, d = 5$$

이때 $a_1 = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{10(2 \times 3 + 9 \times 5)}{2} \\ &= 255 \end{aligned}$$

답 ④

정답과 풀이 37쪽

[20007-0124]

유제 3 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_9 = 23, S_9 = 351$$

일 때, S_5 의 값은?

- ① 230 ② 235 ③ 240 ④ 245 ⑤ 250

[20007-0125]

유제 4 2와 12 사이에 k 개의 수를 넣어 만든 수열

$$2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, 12$$

가 이 순서대로 등차수열을 이루고 모든 수의 합이 112일 때, a_3 의 값을 구하시오.

5. 등비수열의 뜻과 일반항

(1) 등비수열의 뜻

첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라고 한다.

(2) 등비수열의 일반항

첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

설명 첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 각 항은 다음과 같다.

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 r = ar$$

$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2$$

$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3$$

⋮

이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

예 ① 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

② 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$$

일 때, 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

6. 등비중항

0이 아닌 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등비중항이라고 한다.

이때 b 가 a 와 c 의 등비중항이면 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ 이므로

$$b^2 = ac$$

가 성립한다.

역으로 $b^2 = ac$ 이면 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ 이므로 b 는 a 와 c 의 등비중항이다.

예 세 양수 2, x , 8이 이 순서대로 등비수열을 이루면 x 는 2와 8의 등비중항이므로

$$x^2 = 2 \times 8 = 16$$

이때 x 는 양수이므로 $x = 4$



예제 3 등비수열의 일반항

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2=4, \frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{9}$$

일 때, a_1 의 값은?

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

풀이 전략 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $\frac{a_5}{a_3}=\frac{ar^4}{ar^2}=r^2$ 이다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r>0$)이라 하자.

$$\frac{a_5}{a_3}=\frac{a_1r^4}{a_1r^2}=r^2=\frac{1}{9}$$

이때 $r>0$ 이므로

$$r=\frac{1}{3}$$

또 $a_2=a_1 \times \frac{1}{3}=4$ 에서

$$a_1=12$$

답 ④

정답과 풀이 37쪽

[20007-0126]

유제 5 첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3+12=4a_2$$

일 때, a_5-a_1 의 값은?

- ① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

[20007-0127]

유제 6 세 수

$$\cos \frac{\pi}{3}, 2 \sin \frac{3}{2} \pi, k$$

가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, k 의 값을 구하시오.

7. 등비수열의 합

첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

(1) $r \neq 1$ 일 때, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r = 1$ 일 때, $S_n = na$

설명 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad \text{..... ㉠}$$

㉠의 양변에 공비 r 를 곱하면

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad \text{..... ㉡}$$

㉠에서 ㉡을 뺀다 하면

$$\begin{array}{r} S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \\ -) rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = a \qquad \qquad \qquad -ar^n \\ (1-r)S_n = a(1-r^n) \end{array}$$

따라서

$$r \neq 1 \text{일 때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$r = 1 \text{일 때, } S_n = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n\text{개}} = na$$

예 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 8항까지의 합 S_8 은

$$S_8 = \frac{1 \times (2^8 - 1)}{2 - 1} = 255$$

참고 첫째항이 a , 공비가 r ($r \neq 1$)인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \\ &= \frac{a}{r-1} r^n - \frac{a}{r-1} \end{aligned}$$

이다. 이때 $\frac{a}{r-1} = A$ 라 하면

$$S_n = Ar^n - A$$

이다. 예를 들어 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = 3 \times 2^n - 3$$

이다. 또 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이

$$S_n = 3 \times 4^n - 3$$

이면 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 9, 공비가 4인 등비수열이다.



예제 4

등비수열의 합

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_2=12, S_4-S_2=72$$

일 때, S_5 의 값은?

- ① 178 ② 186 ③ 194 ④ 202 ⑤ 210

풀이 전략 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r (r \neq 1)$ 이라 하면 $a_2 = a_1 r$ 이고 $S_5 = \frac{a_1(r^5-1)}{r-1} = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r}$

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r (r > 0)$ 이라 하자.

$$a_2 = a_1 r = 12 \quad \dots \textcircled{1}$$

또 $S_4 - S_2 = 72$ 에서

$$a_3 + a_4 = 72, a_1 r^2 + a_1 r^3 = 72$$

$$a_1 r(r + r^2) = 72$$

①에서 $a_1 r = 12$ 이므로

$$r + r^2 = 6, r^2 + r - 6 = 0$$

$$(r+3)(r-2) = 0$$

$r > 0$ 이므로 $r = 2$

$r = 2$ 를 ①에 대입하면

$$a_1 \times 2 = 12, a_1 = 6$$

$$\text{따라서 } S_5 = \frac{6(2^5-1)}{2-1} = 186$$

답 ②

정답과 풀이 37쪽

[20007-0128]

유제

7 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 4, a_2 a_3 a_4 = 1$$

일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[20007-0129]

유제

8 공비가 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$S_5 = 8, S_{10} = 80$ 일 때, S_{15} 의 값은?

- ① 680 ② 692 ③ 704 ④ 716 ⑤ 728

Level 1

기초 연습

[20007-0130]

1 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1=2$, $a_3=14$ 일 때, a_6 의 값은?

- ① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

[20007-0131]

2 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_3-a_5=6$, $a_{10}=17$ 일 때, $a_k < 0$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은?

- ① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

[20007-0132]

3 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2=8$, $a_{10}-a_6=12$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은?

- ① 165 ② 170 ③ 175 ④ 180 ⑤ 185

[20007-0133]

4 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = 91$$

일 때, a_k 의 값은?

- ① 21 ② 25 ③ 29 ④ 33 ⑤ 37

[20007-0134]

5 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_2=6$, $S_4=28$ 일 때, S_8 의 값을 구하시오.

[20007-0135]

6 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n=4n^2-2n$ 일 때, a_1+a_5 의 값은?

- ① 28 ② 32 ③ 36 ④ 40 ⑤ 44

[20007-0136]

7 공비가 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1=3$, $a_2a_3=72$ 일 때, a_6 의 값은?

- ① 96 ② 99 ③ 102 ④ 105 ⑤ 108

[20007-0137]

8 세 수 $x, y, 14$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $1, 2x, y+8$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $x+y$ 의 값은? (단, $x>0$)

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

[20007-0138]

9 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1=16, a_3=4$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 6 항까지의 합은?

- ① $\frac{51}{2}$ ② $\frac{55}{2}$ ③ $\frac{59}{2}$ ④ $\frac{63}{2}$ ⑤ $\frac{67}{2}$

[20007-0139]

10 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_4=6S_2$ 일 때, $\frac{S_{12}}{S_6}$ 의 값을 구하시오.

[20007-0140]

1 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = a_1 - 6$, $|a_{10}| = |a_8|$ 일 때, a_2 의 값은?

- ① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

[20007-0141]

2 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $a_1 = b_1$, $a_5 = b_5 + 16$ 일 때, $a_{10} - b_{10}$ 의 값은?

- ① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

[20007-0142]

3 이차방정식 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 의 서로 다른 두 실근 α , β 에 대하여 세 수 α^3 , k , β^3 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, k 의 값은?

- ① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

[20007-0143]

4 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 + a_3 = -3$, $a_4 + a_5 + a_6 = 24$ 일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{20}$ 의 값은?

- ① 375 ② 380 ③ 385 ④ 390 ⑤ 395

[20007-0144]

5 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_5 = 46$, $a_{10} = 21$ 일 때, S_n 의 최댓값은?

- ① 454 ② 459 ③ 464 ④ 469 ⑤ 474

[20007-0145]

6 두 수 $\log_2 2$, $\log_2 256$ 사이에 서로 다른 n 개의 실수를 넣어 만든 등차수열

$$\log_2 2, \log_2 a_1, \log_2 a_2, \log_2 a_3, \dots, \log_2 a_n, \log_2 256$$

의 모든 항의 합은 63이다. $\frac{a_3}{a_1} = 4^{\frac{q}{p}}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[20007-0146]

7 두 집합 $A = \{4n-3 \mid n \text{은 자연수}\}$, $B = \{3n+2 \mid n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여
집합 $C = \{x \mid x \in (A \cap B), 1 \leq x \leq 100\}$ 의 모든 원소의 합은?

- ① 372 ② 376 ③ 380 ④ 384 ⑤ 388

[20007-0147]

8 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 $S_{n+2} - S_n = 8n$ 일 때,
 a_{10} 의 값은?

- ① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

[20007-0148]

9 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\log_2 a_1 = 1, \log_2 a_5 - \log_2 a_3 = -2$$

일 때, $a_1 a_3$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[20007-0149]

10 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항은 모두 1이고

$$a_3 = 4a_2, b_2 = 2b_3$$

일 때, $a_{10} b_{10} = 2^k$ 이다. 실수 k 의 값은? (단, $a_2 b_2 \neq 0$)

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[20007-0150]

11 세 수 $1, 2^{a-1}, 26$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $2, 3^b, 8$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 실수이다.)

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[20007-0151]

12 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_4 - S_2 = 6, S_6 - S_4 = 24$ 일 때, $S_7 - S_1$ 의 값은?

- ① 57 ② 59 ③ 61 ④ 63 ⑤ 65

[20007-0152]

13 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_1 = 1, S_8 = 4S_1$ 일 때, a_k 의 값이 정수가 되도록 하는 50 이하인 모든 k 의 값의 합을 구하시오.

[20007-0153]

14 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 일치한다. 첫째항이 1이고 $a_6 = 4a_2$ 를 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \dots + f(a_{10})$ 의 값은?

- ① $\frac{2^{27}-1}{7}$ ② $\frac{2^{28}-1}{7}$ ③ $\frac{2^{29}-1}{7}$ ④ $\frac{2^{30}-1}{7}$ ⑤ $\frac{2^{31}-1}{7}$

[20007-0154]

15 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_3 의 값은 a_2 의 값보다 20% 증가한 것이다. 이때 $a_k \geq 4a_1$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은? (단, $\log 1.2 = 0.08, \log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

[2007-0155]

1 첫째항이 모두 2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

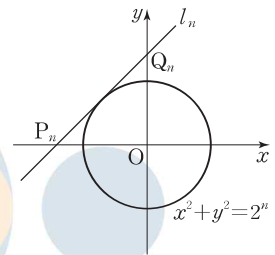
- (가) 어떤 상수 k 에 대하여 이차방정식 $x^2 - 8x + k = 0$ 의 두 근은 a_1, a_2 이다.
- (나) $b_4 = a_2 + b_2$

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 할 때, $S_m - T_m \leq \frac{km}{4}$ 을 만족시키는 자연수 m 의 개수는?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[2007-0156]

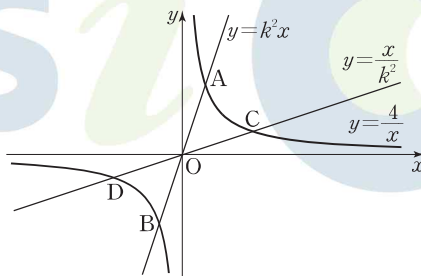
2 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 기울기가 1이고 원 $x^2 + y^2 = 2^n$ 과 제2사분면에서 접하는 직선을 l_n , 직선 l_n 과 x 축 및 y 축의 교점을 각각 P_n, Q_n 이라 하자. 삼각형 $P_n O Q_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_8$ 의 값은?
(단, O 는 원점이다.)



- ① 510 ② 512 ③ 514
- ④ 516 ⑤ 518

[2007-0157]

3 $k > 1$ 인 상수 k 에 대하여 그림과 같이 좌표평면에서 함수 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = k^2 x$ 의 교점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{k^2}$ 의 교점을 각각 C, D라 하자. 네 점 A, B, C, D의 x 좌표를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 네 수 d, b, a, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. k^2 의 값을 구하시오.
(단, $a > 0, c > 0$)



대표 기출 문제

출제 경향 등차수열의 정의를 이용하거나 두 항 사이의 관계를 이용하여 공차를 구한 후 특정한 항의 값을 구하는 문제, 등차수열의 합을 이용하여 등차수열의 특정한 항의 값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2 의 값은? [4점]

- (가) $a_6 + a_8 = 0$
 (나) $|a_6| = |a_7| + 3$

- ① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

2017학년도 대수능

출제 의도 ▶ 등차수열의 일반항을 이용하여 등차수열의 공차와 첫째항을 구한 후 등차수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d > 0$)이라 하자.

조건 (가)에서 $a_6 + a_8 = 0$ 이므로
 $(a + 5d) + (a + 7d) = 0$
 $2a + 12d = 0$
 $a = -6d$ ㉠

조건 (나)에서 $|a_6| = |a_7| + 3$ 이므로
 $|a + 5d| = |a + 6d| + 3$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면
 $|-6d + 5d| = |-6d + 6d| + 3$
 $|-d| = 3$

이때 $d > 0$ 이므로 $d = 3$

$d = 3$ 을 ㉠에 대입하면

$a = -6 \times 3 = -18$

따라서 $a_2 = -18 + 3 = -15$

답 ①



대표 기출 문제

출제 경향 등비수열에서 두 항 사이의 관계를 이용하여 공비를 구한 후 특정한 항의 값을 구하는 문제, 등비수열의 합을 이용하여 등비수열의 특정한 항의 값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$\frac{S_9 - S_5}{S_6 - S_2} = 3$$

일 때, a_7 의 값을 구하시오. [3점]

2019학년도 대수능

출제 의도 ▶ 등비수열의 합을 이용하여 등비수열의 공비를 구한 후 등비수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하자.

$$\begin{aligned} S_9 - S_5 &= a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \\ &= 7r^5 + 7r^6 + 7r^7 + 7r^8 \\ &= 7r^5(1 + r + r^2 + r^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6 - S_2 &= a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= 7r^2 + 7r^3 + 7r^4 + 7r^5 \\ &= 7r^2(1 + r + r^2 + r^3) \end{aligned}$$

이때

$$\frac{S_9 - S_5}{S_6 - S_2} = \frac{7r^5(1 + r + r^2 + r^3)}{7r^2(1 + r + r^2 + r^3)} = r^3$$

이므로

$$r^3 = 3$$

따라서

$$\begin{aligned} a_7 &= 7r^6 = 7 \times (r^3)^2 \\ &= 7 \times 3^2 = 63 \end{aligned}$$

답 63