지수·로그함수의 비밀

안녕하세요~! (ㅇ_ㅇ).. (_ _)..

예전에 학습 게시판에 “삼차함수의 비밀”을 올렸었던 오르비 닉네임 ictteru_입니다.

몇몇 분들께서 다른 버전도 요청해주셨는데,

학과 생활에 신경 쓰느라 이리저리 시간 뺐기다 보니 못 올렸었거든요..

암튼 지금은 잉여생활 하고 있으니 시간 내어 한 번 올려봅니다.

역시나 이번에 소개하려는 것도 “비밀”이라고 해서 대단한 것이 결코 아니라

알고 있을 사람들은 이미 알고 있을 그런 내용입니다.

뒤집어 말하자면 누군가에겐 이 부분이 되게 부담될 텐데요,

그런 분들에게 조금이라도 도움이 되었으면 좋겠네요.

약간의(?!) 시간을 투자해서 이 글을 읽음으로 인하여

그간 못 풀었던 문제들을 더 풀 수 있게 되시거든,

그래서 스쳐갔던 문제들이 새롭게 보이시거든 이 글을 생각해주세요.

04~10년도 7차 교육과정의

평가원(가/나), 교육청(가/나), 경찰대, 사관학교(문/이과) + 오르비에 올라온 것들 중에서

빛과 소금(?!) 같은 **지수·로그함수** 위주로 소개하겠습니다.

그저 머리와 손으로 수학적인 그 무엇을 느끼시면 됩니다.

‘요건 요렇게 풀면 되는 거구나…!’ 하구요.

written by ictteru_

먼저 흔히 가질만한 착각부터 상콤하게 깨어드리겠습니다.

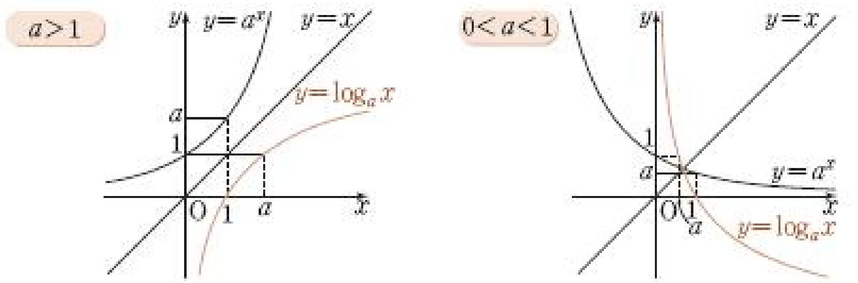
지수함수와 로그함수의 관계

$a>0,\ a\neq 1$일 때

(1) $y=\log_a x \iff x=a^y$

(2) 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이다.

일반적으로 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이것을 이용하여 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



위의 그래프로부터 다음과 같은 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 0)$의 성질을 알 수 있다.

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(1,\ 0)$과 점 $(a,\ 1)$을 지난다.

(4) 그래프의 점근선은 y축이다.

2. 로그와 로그함수 **91**

어디서 많이 본 그림이죠?

지학사, 개정 수학 교과서 고등학교 수학Ⅰ 입니다.

지수·로그함수의 기본 그래프를 저렇게 그려놓고 역함수 관계이니 하며 주르륵 설명을 해놨네요.

비단 이 교과서뿐만 아니라 정석이나 온갖 문제집에서도 이 그림을 ctrl + c → ctrl + v 해놨고,

이 그림을 가지고 설명하는 분들이 언급하는 내용도 비슷비슷 합니다.

학생들은 대부분 밑의 범위에 따른 함수의 증가/감소 여부나, 대소 관계의 반전에 신경을 쓰겠죠.

여기서 제가 말하고 싶은 건 $a>1$일 때, $y=a^x, y=x, y=\log_a x$를 같이 그려 놓은 부분입니다.

'이게 뭐가 잘못 됐다는 거지?'

하시는 분들을 위해 대표적인 기출문제 두 개만 소개하겠습니다.

2005년 09월 07일 Kice 2006 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 15번

15. $a>1$일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=a^{x-1}$의 그래프와 함수 $y=1+\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 함수 $y=-a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 만난다.

$\boxed{\text{ㄷ. 함수 } y=ka^x \text{의 그래프와 함수 } y=\log_a x \text{의 그래프가 만나도록 하는 양의 실수 } k \text{가 존재한다.}}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2010학년도 공군사관학교 1차 선발시험 문제지 (수리 영역 - 인문) 20번

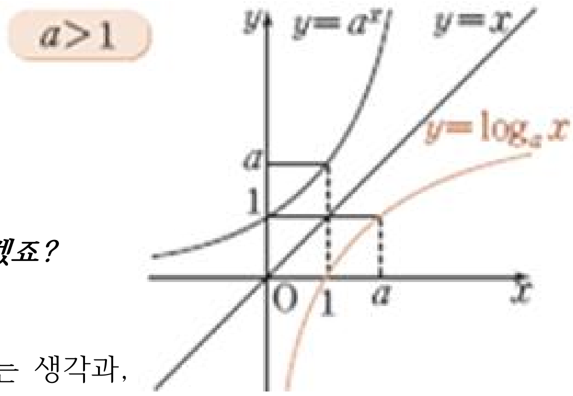
20. 방정식 $2^{\frac{x}{2}}=\log_{\sqrt{2}}|x|$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 0

('아~ 이거?!'하시는 분들이야 이미 눈치 채셨겠지만,
저는 이 두 문제가 2~3점짜리처럼 쉽게 풀리지 않는 분들을 예상독자로 하여 글을 쓰고 있습니다.)

이 정도면 제법 난이도 있는 문항에 속합니다.
6월 평가원 이전에는 지수·로그함수라고 해봐야 잘 나오지도 않고,
꼬꼬마 시절에 충분히 많이 풀어 봤기에 만만하게 생각할만한 부분이죠.
하지만 여름방학 무렵이 되면 온갖 모의고사나 넘기는 문제집들에서 Level-up 해서 나오기 시작합니다.
그간 열공했으니 분명 성적이 올라야 할텐데, 문제 수준도 덩달아 어려워지기에 뜻대로 안 되죠.
풀 때 약간 찝찝하긴 했어도, 당연히 맞춘 줄 알고 답을 매겨보면 뒤통수를 잘 치는 것들 입니다.
그래서 풀이를 봐도 여전히 납득이 가지 않는 (반례) 몇 줄로 사람을 농락할거구요;
암튼 7차 때는 이 부분을 정확하게 받아들이기 위해 심화 미적 깊숙한 곳까지 증명해야 했기에
어지간한 이과생들도 잘 모르는 내용인데, 아이러니하게 나형 시험에도 버젓이 나옵니다.
그 때 나형 유저들은 '그냥 직관적으로 알아서' 증명 없이 감으로 푸는 수 밖에 없었습니다.
(물론 이번에 교육과정이 바뀌어도 대부분의 문과생들은 힘겨워할 부분입니다;;)

분위기 전환 겸 질문 하나 해보겠습니다.



아까 교과서에 나왔던 이 그림에서

어떤 $a>1$ 값을 취하든 상관없이

그래프들이 만나게(= 교점을 갖게) 할 수 없겠죠?

제가 대놓고 이렇게 물어보니까 왠지 반례가 존재할 것 같다는 생각과,

'지수함수는 기하급수적으로 빠르게 증가하고, 로그함수는 더럽게 느리게 증가 하더라..'는

언젠가 머릿속에 새겨 두었던 배경 지식이 충돌하고 있나요?

거기다 그간 접해왔던 텍스트들에 의하면, 저 상태에선 절대로 교점을 갖지 않을 것 같죠.

아까 보여드린 교과서 그 페이지의 어디에도 '만나지 않는다'는 말은 언급하고 있지 않았었지만,

그렇다고 저 상태에서 '만난다'는 말 또한 없었습니다.

바로 여기서 학생들의 착각을 유발한다는 겁니다.

아무도 그런 얘길 안 했는데, 왠지 그럴 것 같다고 무의식적으로 받아들이는 부분 말이죠.

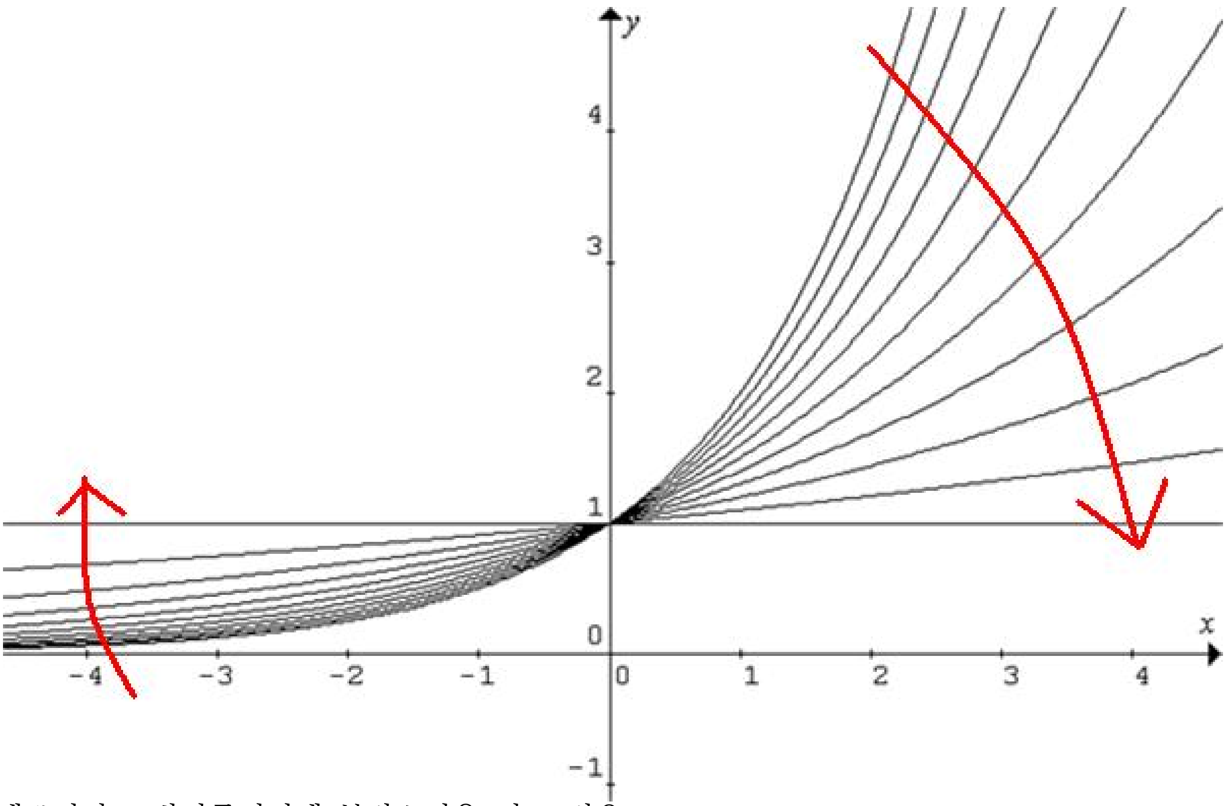
그래서 답은 '아뇨, 특정 범위의 $a>1$값에 대해선 만나거든요..'입니다.

마음 급하신 분들은 $y=(\sqrt{2})^x$가 점 $(2,2)$를 지난다는 것으로부터 지적 욕구를 달래주세요.

이제 그림 그려가며 찬찬히 설명하겠습니다.

먼저 지수함수의 기본 형태인 $y=a^x$**에서** $\boxed{a>1\text{인 경우}}$를 봅시다.

밑이 점점 1에 가까워지면 어떻게 될까요?

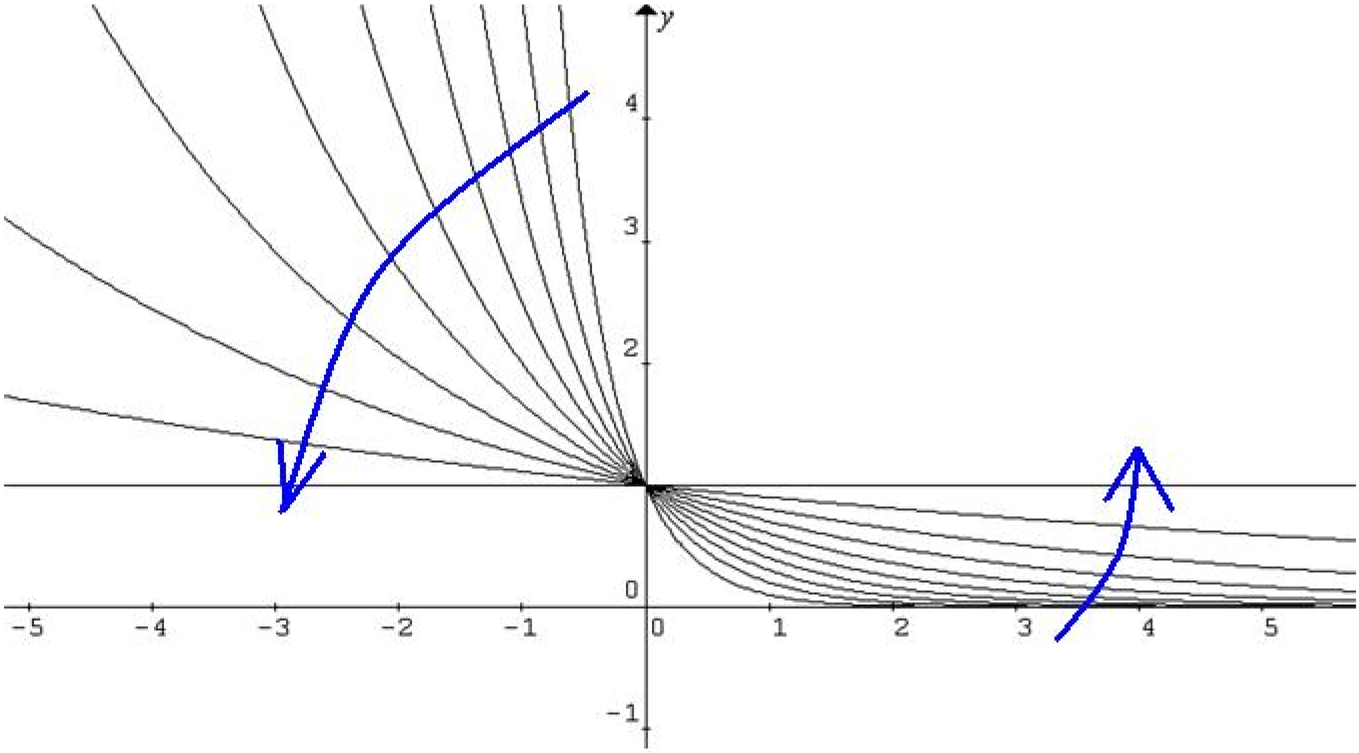


뭔가 예쁘면서도 받아들이기엔 부담스러운 이 그림은

written by ictteru_

$y=2^x$, $y=1.9^x$, $y=1.8^x$, $\cdots$, $y=1.2^x$, $y=1.1^x$, $y=1^x\,(=1)$의 그래프를 동일 평면에 나타낸 겁니다.
밑이 1보다 큰 상태에서 1에 가까워질수록(= 밑이 감소할수록)
전체적으로 $y=1$에 가까워지고 있네요.
역으로, 밑이 1보다 큰 상태에서 1에 멀어질수록(= 밑이 증가할수록)
전체적으로 $y=1$에서 멀어지고 있구요.
('가까워/멀어진다'를 대신할 더 좋은 수학적 표현이 잘 안 떠오르지만
받아들이기에는 무리가 없을 거에요.)

이번엔 지수함수의 기본 형태인 $y=a^x$**에서** $0<a<1$ **인 경우**를 봅시다.
밑이 점점 1에 가까워지면 어떻게 될까요?



아까와 비슷하게 생긴 이 그림은
$y=0.1^x$, $y=0.2^x$, $y=0.3^x$, $\cdots$, $y=0.8^x$, $y=0.9^x$, $y=1^x\,(=1)$의 그래프를 동일 평면에 나타낸 겁니다.
밑이 1보다 작은 상태에서 1에 가까워질수록(= 밑이 증가할수록)
전체적으로 $y=1$에 가까워지고 있네요.
역으로, 밑이 1보다 작은 상태에서 1에 멀어질수록(= 밑이 감소할수록)
전체적으로 $y=1$에서 멀어지고 있구요.

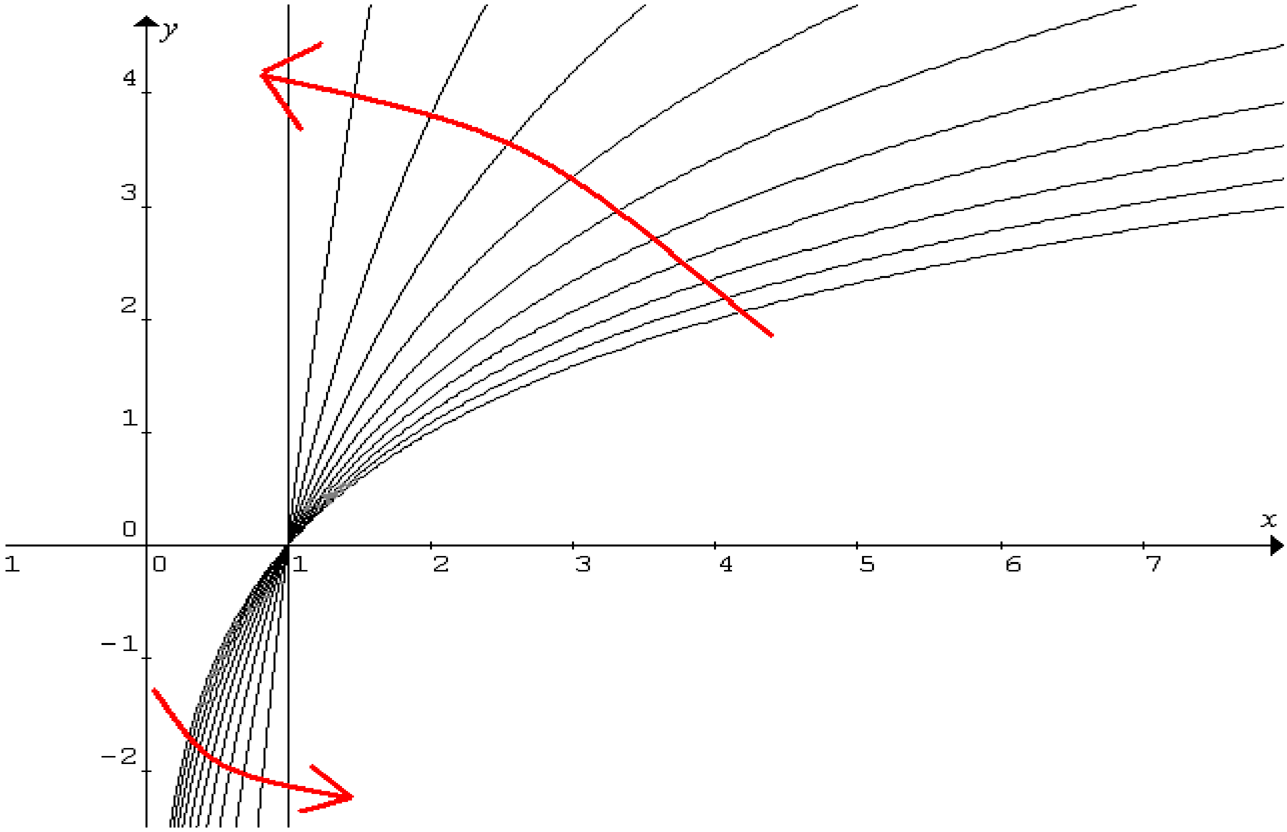
뭔가 말이 되게 복잡한 것 같은데, 한 큐에 받아들이려면
"지수함수 기본 형태인 $y=a^x$에서 밑인 a가 1에 가까워지면, 지수함수는 $y=1$에 가까워진다."
요것만 기억하면 됩니다.

written by ictteru_

그리고 로그함수의 경우도 위와 거의 비슷한 성질을 지닙니다.

로그함수의 기본 형태인 $y = \log_a x$**에서** $\boxed{a > 1 \text{ **인 경우**}}$를 봅시다.

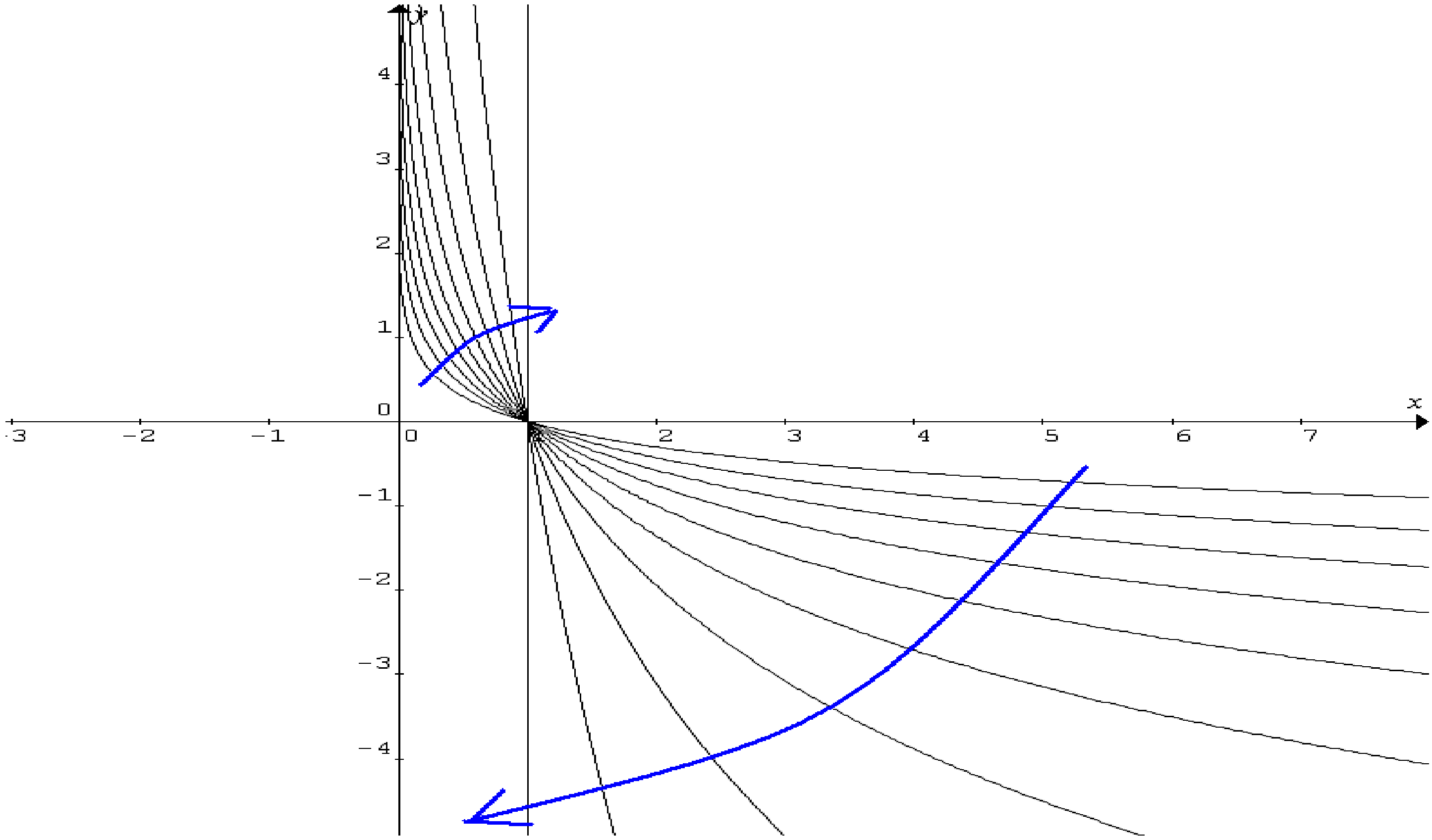
밑이 점점 1에 가까워지면 어떻게 될까요?



위 그림은 $y = \log_a x$에서 $a = 2,\ 1.9,\ 1.8,\ \cdots,\ 1.1$인 경우와 $x = 1$을 동일 평면에 그린 겁니다.

역시나 기대를 저버리지 않고(?!), 밑이 1에 가까워질수록 로그함수는 $x = 1$에 가까워지고 있네요.

$y = \log_a x$, $0 < a < 1$ 에서도 밑이 1에 가까워질수록 보나마나 $x = 1$에 가까워질 거구요.



written by ictteru_

이것도 $y = \log_a x$에서 $a = 0.1, 0.2, 0.3, \cdots, 0.9$인 경우와 $x = 1$을 동일 평면에 그린 겁니다.

한 번에 머릿속에 넣으려면

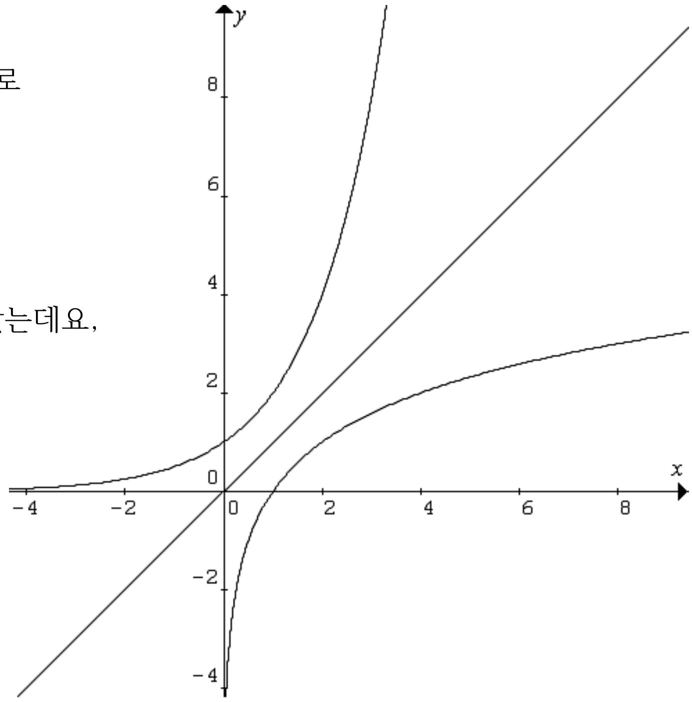
"로그함수 기본 형태인 $y = \log_a x$에서 밑인 a가 1에 가까워지면, 로그함수는 $x = 1$에 가까워진다."

는 걸 기억하면 됩니다.

그리고..

너무나 당연해서 이렇게까지 알아야 하나 싶은 내용으로

수많은 문항들을 깔끔하게 풀어낼 수 있습니다.



이제 응용해봅시다.

오른쪽에 $y = 2^x$, $y = x$, $y = \log_2 x$를 한 평면에 그려 놨는데요,

만약 밑을 동시에 1에 가까워지도록 감소시켜 보면

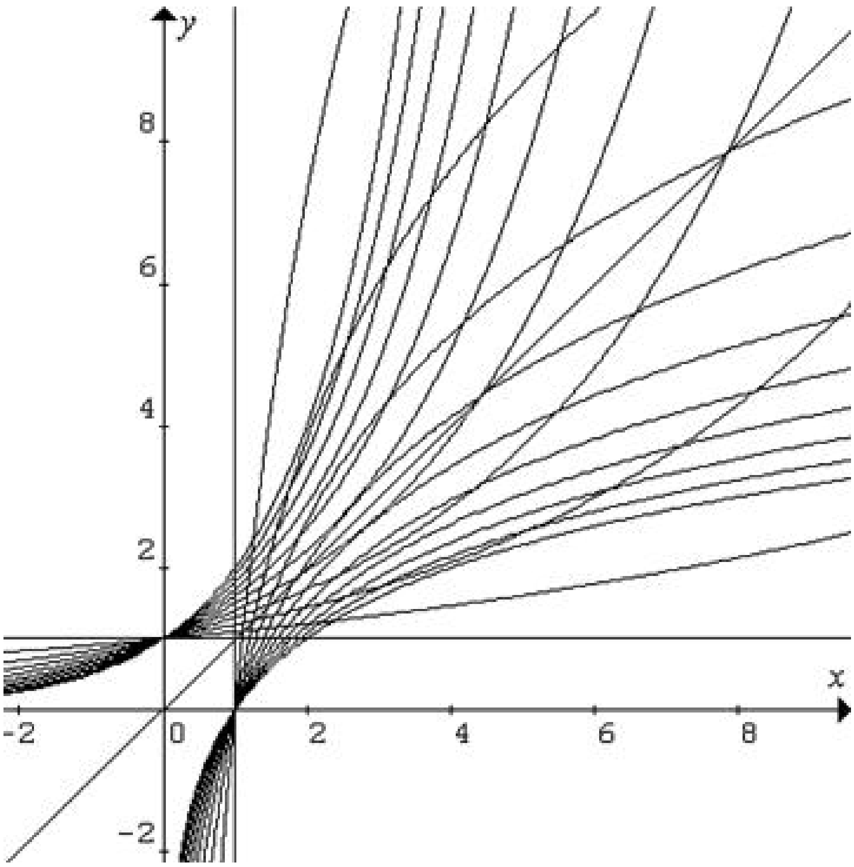
그래프가 어떻게 변할지 상상되나요?

여태 언급한 내용에 따르면

지수함수는 점점 $y = 1$에 가까워지고,

로그함수는 점점 $x = 1$에 가까워지겠죠.

그러면 언젠가 교점이 생기긴 하겠네요..?!



그래서 한 번

$y = 2^x$, $y = \log_2 x$

$y = 1.9^x$, $y = \log_{1.9} x$

$y = 1.8^x$, $y = \log_{1.8} x$

$\cdots$

$y = 1.1^x$, $y = \log_{1.1} x$

밑을 0.1씩 감소시켜 봤더니

요런 현기증 나는 그림이 나오네요.

하지만 너무 부담 갖지는 마시고

마치 숨은 그림 찾기 하는 것처럼

정말 역함수 간에 교점이 있는지

몇 개만 찾아보시고서

'만나긴 만나네~'

하고 넘어가주세요.

수식으로 증명해보면 다음과 같습니다만, 문과분이라면 과감히 스킵하셔도 됩니다 ^^;

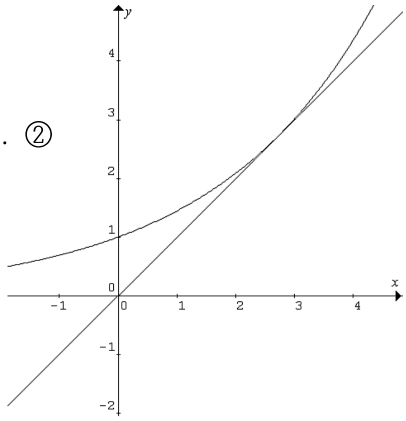
FACT. $y = a^x$ $(a > 1)$**와 그 역함수** $y = \log_a x$ $(a > 1)$**가 서로 교점을 가질 수 있다.**

PROOF.

만약에 교점을 갖는다면 $y = x$상에서 세 그래프가 동시에 교점을 가지는 것이 자명하므로,
지수함수 $y = a^x$ $(a > 1)$와 $y = x$간의 교점 관계로 파악하는 것으로 충분하다.
그리고 a가 1에 충분히 가까우면 $y = a^x$ $(a > 1)$와 $y = x$는 두 개의 교점을 가지므로,
교점 개수의 경계가 되는 접하는 순간의 a를 찾아야 한다.
이 때 접점의 좌표를 (t, t)라고 두면
접점에서 함숫값이 같아야 하므로 $a^x = x$에서 $a^t = t$ ..... ①
접점에서 미분계수가 같아야 하므로 $a^x \ln a = 1$에서 $a^t \ln a = 1$ ..... ②

② ÷ ① ; $\ln a = \dfrac{1}{t}$ $\rightarrow$ $e^{\frac{1}{t}} = a,$ $a^t = e$

$\therefore$ $t = e,$ $a = e^{\frac{1}{e}}$



고로 지수함수 $y = a^x$ $(a > 1)$와 $y = x$가 접할 때의 밑은 $a = e^{\frac{1}{e}}$ $(= 1.44466786\cdots)$이다. ■

(전 밑이 1보다 큰 경우에 대하여만 다뤘는데, 밑이 0과 1사이인 경우엔 어떻게 되는지도 궁금한 분들은 sos440느님의 블로그인 http://blog.naver.com/sosintegral/40018846968 여기를 참고해주세요.
아쉽게도 계산 과정은 없고 결과만 있네요..;;)

자연 상수 $e\,(= 2.71828183\cdots)$나 초월함수의 미분법은 개정 교육 과정에서 문과생들이 배우지 않지만,
여차저차 해서 나온 $e^{\frac{1}{e}}\,(= 1.44466786\cdots)$의 값이 문제입니다.

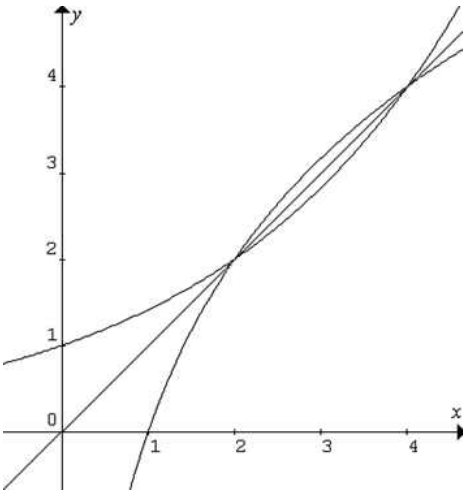
우선 위의 결과로부터 지수함수 $y = a^x$ $(a > 1)$와, $y = x$ 내지는 $y = \log_a x$ $(a > 1)$가

$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$의 범위에선 교점을 두 개 가지고,

$a = e^{\frac{1}{e}}$일 땐 접하고(혹은 한 점에서 만나고),

$a > e^{\frac{1}{e}}$의 범위에선 교점을 갖지 않는다고 정리할 수 있겠죠.

그런데 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ $(\fallingdotseq 1.44)$에 친근한 무리수인 $\sqrt{2}$ $(\fallingdotseq 1.41)$가 속해 있습니다.
밑이 $\sqrt{2}$ $(\fallingdotseq 1.41)$이면 역함수 관계의 지수함수와 로그함수의 기본 형태가 교점을 두 개 갖는다는 말이죠.



이렇게 교점을 두 개 갖긴 하네요.

그나마 다행인 건 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ ($\fallingdotseq 1.44$) 구간에 속한 수를

거의 $\sqrt{2}$ 위주로 물어봤습니다, 기출문제들에선요.

그러니까 지수·로그함수 밑이 $\sqrt{2}$ 라면

출제자가 이걸 묻는지 한번쯤 의심해 볼 만하죠.

그럼 이제 아까 제시했던 문제로 돌아갑시다.

2005년 09월 07일 Kice 2006 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 15번

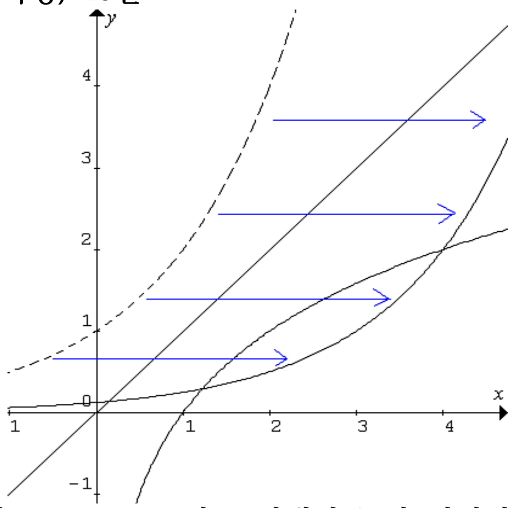
15. $a>1$일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=a^{x-1}$의 그래프와 함수 $y=1+\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 함수 $y=-a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 만난다.

ㄷ. 함수 $y=ka^x$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 만나도록 하는 양의 실수 k가 존재한다.



$y=ka^x=a^{x+\log_a k}$는 지수함수 $y=a^x$를 x축 양의 방향으로 $-\log_a k$만큼 평행이동 한 것입니다.

역함수 관계에서 설령 교점을 갖지 않더라도, 지수함수만 오른쪽으로 적절히 평행이동 한다면

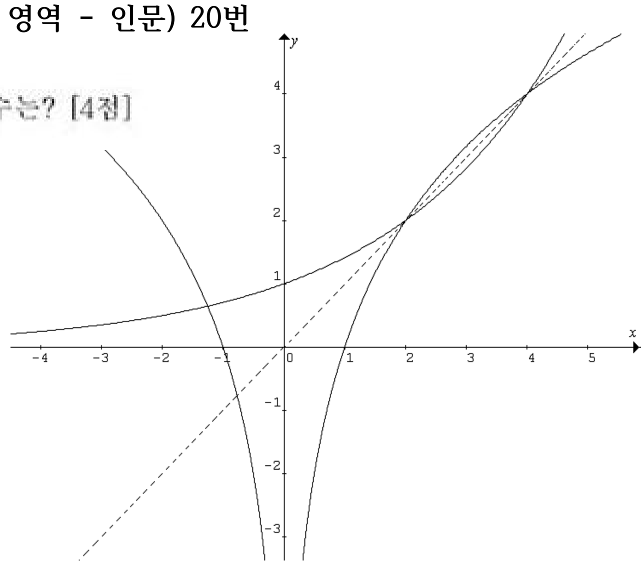
당연히 교점을 갖게(= 그래프가 만나게) 할 수 있겠죠?

첨부터 밑이 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 였다면, $k=1$로 잡아서 굳이 평행이동 않고도 교점을 갖게 할 수 있구요.

암튼 이걸로 이 문제가 좀 더 기하학적으로 와 닿으셨으면 좋겠네요.

2010학년도 공군사관학교 1차 선발시험 문제지 (수리 영역 - 인문) 20번

20. 방정식 $2^{\frac{x}{2}}=\log_{\sqrt{2}}|x|$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]



밑이 $\sqrt{2}$ 라는 것과

$y=\log|x|$가 어떻게 생겼는지에 착안하여 그려보면

교점이 3개 존재한다는 걸 알 수 있죠.

하지만 1개라고 답을 택할 사람들도 많았겠죠?

이 개념을 물어보는 문제들이 요게 전부가 아닙니다.

7월 교육청 모의고사 마다 꼭 이런 문제가 나왔었는데, (개인적으로) 최고난이도 문제를 풀어봅시다.

제가 굳이 말 안 해도 재미들린 분이라면 벌써 노트를 펴고 문제를 먼저 풀어본 다음 해설을 보겠죠..^^?

2007년 07월 12일 교육청 수리 (가형) 10번

10. 함수 $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_b x$가 $0 < x < 1$에서 $f(x) > g(x)$이 성립하기 위한 조건으로 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $1 < b < a$

ㄴ. $0 < a < b < 1$

ㄷ. $0 < a < 1 < b$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

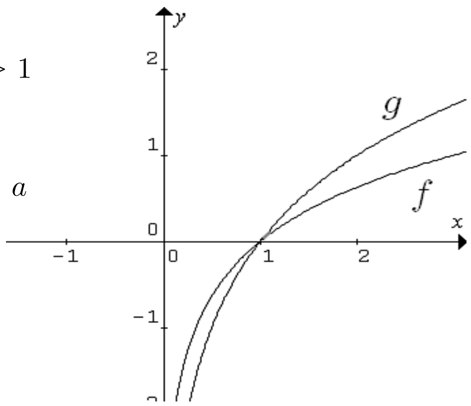
저도 꼬꼬마 시절에는 요런 문제를 만나면 수치를 2나 10의 거듭제곱으로 다 잡아서 대입으로 풀곤 했었는데, 어느 순간 그런 접근법의 한계가 보이더라구요.

하지만 **'지수·로그함수 기본 형태에서 밑이 1에 가까워지면 $y=1$이나 $x=1$에 가까워진다'**는 사실 하나로 다 풀립니다.

$0 < x < 1$에서 함숫값이 큰 걸 $f(x)$로 잡은 뒤 a, b의 구체적인 대소를 비교하는 겁니다.

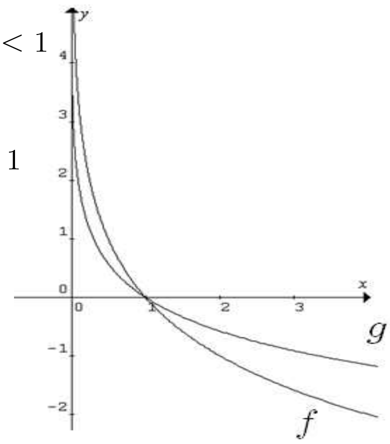
(i) $a > 1,\ b > 1$

$\therefore\ 1 < b < a$



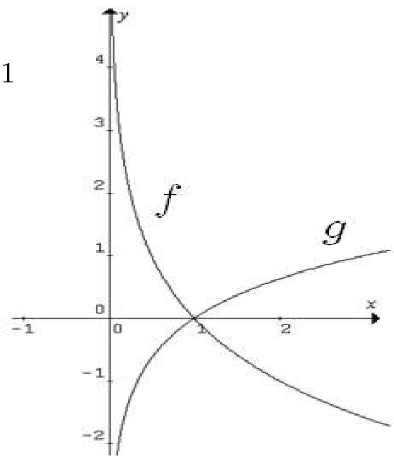
(iii) $0 < a < 1,\ 0 < b < 1$

$\therefore\ 0 < b < a < 1$



(ii) $0 < a < 1,\ b > 1$

$\therefore\ 0 < a < 1 < b$



(iv) $a > 1,\ 0 < b < 1$

해당 범위에서 모두 만족하지 않음.

따라서 답은 ③ ㄱ, ㄷ입니다.

분량의 압박으로 인해서 모든 예제들을 다 풀어 드릴 수는 없으니,

가능하면 풀이를 스케치만 하고 넘어가겠습니다.

물론 여지껏 언급했던 사실들을 이용해서 거의 다 풀 수 있습니다.

그러니까.. 많은 시간을 들여서 無로부터 有를 창조해내라는 것이 아니라,

당연한 사실들을 가지고 문제를 풀라는 것이니, 찬찬히 생각해보면 답이 항상 나오게끔 되어 있습니다.

2008학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지 (수리 영역 - 문과) 12번

12. 다음 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $1 < a < b$ 이고 $0 < \log_a c < 1$ 이면 $\log_b c > \log_b a$ 이다.

ㄴ. $0 < a < 1 < b$ 이고 $0 < \log_a c < 1$ 이면 $\log_b a < \log_b c$ 이다.

ㄷ. $0 < a < b < 1$ 이고 $\log_a c < 0$ 이면 $\log_a b < \log_c b$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

가정부분에서 a, b, c 의 대소 관계 파악 후,

$y = \log_b x$ 등의 로그함수에 대입하여 결론 부분을 판하면 됩니다.

그리고 밑이 ☆인 로그함수의 기본 형태는 항상 (☆, 1)을 지난다는 사실을 이용할 수 있구요.

2008년 07월 15일 교육청 수리 (가형) 13번

13. 1이 아닌 양수 a, b $(a > b)$에 대하여 두 함수 $f(x) = a^x$, $g(x) = b^x$라 하자. 양수 n에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(n) > g(n)$

ㄴ. $f(n) < g(-n)$이면 $a > 1$이다.

ㄷ. $f(n) = g(-n)$이면 $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(-\frac{1}{n}\right)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

a, b의 대소 관계에 따른 모든 경우를 나눈 후 각각 따져 보면 됩니다.

2008년 11월 13일 2009학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (나형) 11번

11. $0 < a < \frac{1}{2}$ 인 상수 a에 대하여

직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 (p, p),

직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 (q, q)

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $a=\frac{1}{4}$이다.

ㄴ. $p<q$

ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 수리 (나형)이라면 손에 꼽을 정도로 어려웠던 시험일진데, 그 중에서도 킬러 문제였으니 자세하게 짚고 넘어 가겠습니다.

대소 관계가 제법 복잡해서 헷갈리기 쉬운데,

'로그함수는 밑이 1에 가까워질수록

$x=1$**에 가까워지더라..**'는 사실을 이용하면 됩니다.

ㄱ, ㄷ이야 쉽게 풀 수 있으니 넘어가고,

ㄴ으로 바로 갑시다.

그래프를 그리지 않고서 절대로 풀 수 없을 것 같죠?

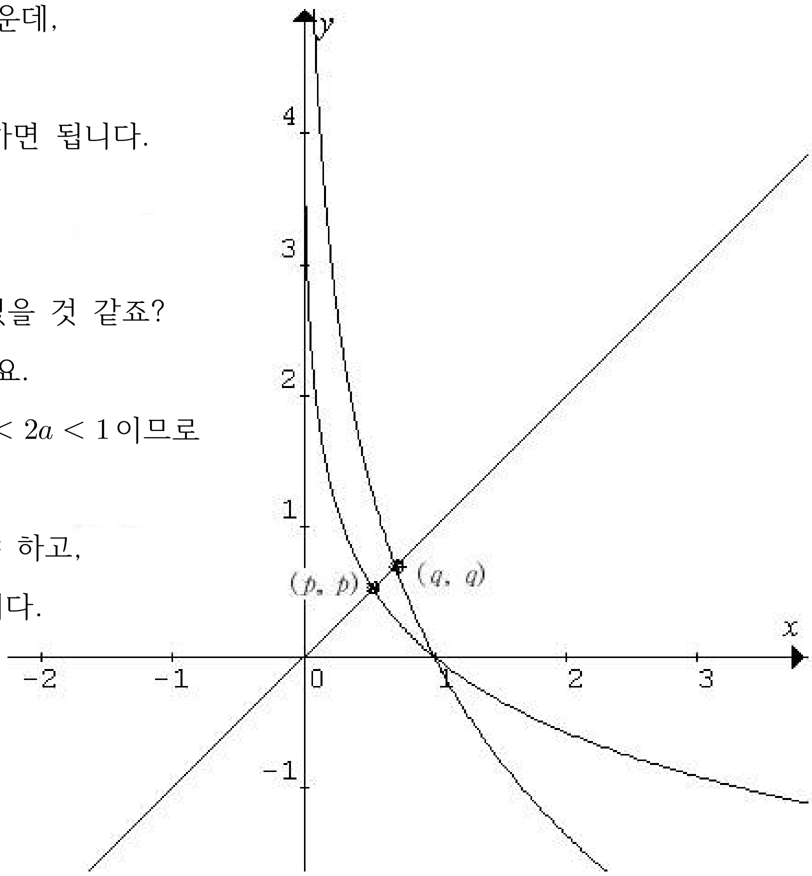
그것도 정확하게 그리지 않으면 안 되구요.

암튼 주어진 밑의 범위에 의하면 $0 < a < 2a < 1$이므로

둘 다 감소하는 로그함수의 개형이고,

밑이 1에 가까운 것이 $x=1$에 가까워야 하고,

그게 $y=\log_{2a} x$의 그래프가 되어야 합니다.



그러므로 ㄴ은 참!

written by ictteru_

2009년 03월 11일 교육청 수리 (가형) 26번

26. $0<a<b<1$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여

$$A=\log_a b,\ B=\log_b(a+1),\ C=\log_{a+1}(b+1)$$

이라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [3점]

① $A<B<C$　② $A<C<B$　③ $B<A<C$
④ $B<C<A$　⑤ $C<B<A$

범위 내의 적절한 값을 대입해서 풀기엔 상당히 까다로운 문제입니다.

하지만 우리는 아주 정교하게 지수함수와 로그함수 그래프의 대소 관계를 파악할 수 있으니까, 출제자가 원했을 그 방법대로 풀되, 추가로

$y=\log_{\bigstar}x$는 항상 점 $(1,\ 0)$이외에 점 $(\bigstar,\ 1)$도 지난다는 것을 이용하면 됩니다.

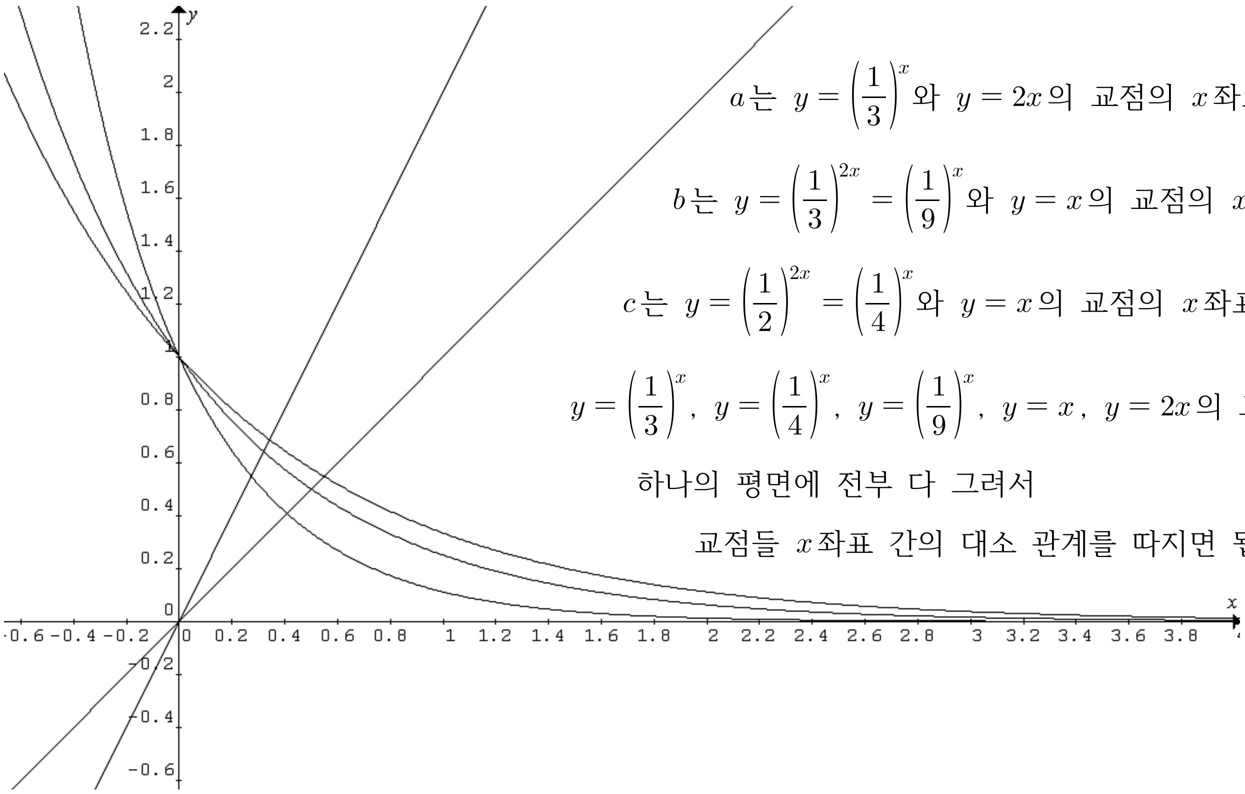
2010학년도 공군사관학교 1차 선발시험 문제지 (수리 영역 - 인문) 24번

24. 다음 등식을 만족시키는 세 실수 a, b, c가 있다.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^a=2a,\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{2b}=b,\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{2c}=c$$

이때, 세 실수 a, b, c의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

① $a<b<c$　② $a<c<b$　③ $b<a<c$
④ $b<c<a$　⑤ $c<a<b$



a는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$와 $y=2x$의 교점의 x좌표,

b는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{9}\right)^x$와 $y=x$의 교점의 x좌표,

c는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$와 $y=x$의 교점의 x좌표이므로

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$, $y=x$, $y=2x$의 그래프를

하나의 평면에 전부 다 그려서

교점들 x좌표 간의 대소 관계를 따지면 됩니다.

written by ictteru_

포카칩 모의고사 2010년 06월 평가원 대비 수리 가형 16번

16. 좌표평면 (x, y)위의 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_n(x+1)+1$의 교점의 개수는 2개이고, 두 교점의 x좌표를 $x=0$, $x=a_n$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, n은 $n>1$인 자연수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_2=1$

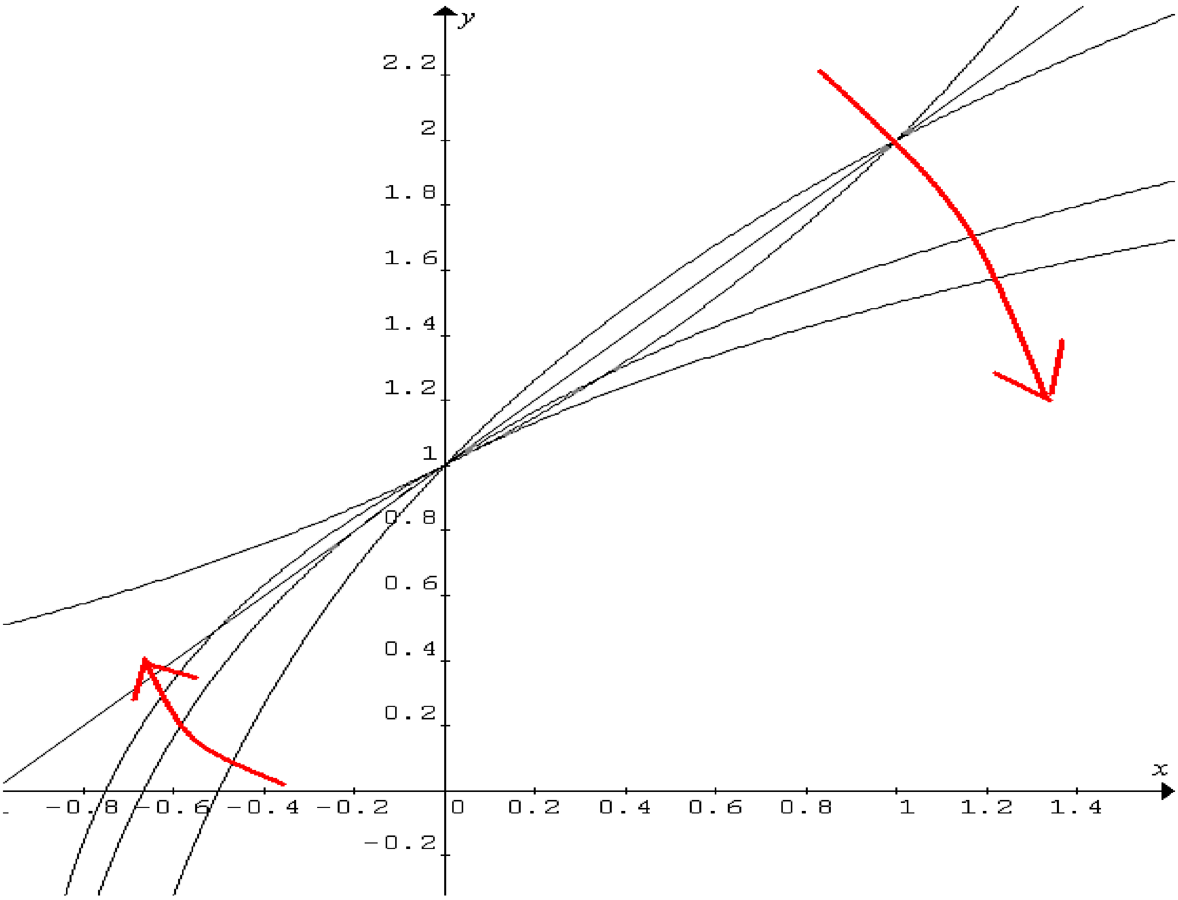
ㄴ. $2^{a_n} \le a_n+1$

ㄷ. $(n-1)2^{a_n-1} \ge a_n$

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

우선 $n=2, 3, 4, \cdots$ 이므로 이것들을 대충 그려보고 그 경향성을 파악해봅시다.



주어진 $y=\log_n(x+1)+1$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$은 기본 로그함수 형태인 $y=\log_n x$를 x축 양의 방향으로 -1만큼, y축 양의 방향으로 1만큼 평행이동 한 것이므로, 밑이 증가할수록($=n$이 커질수록) $x=1$이 아닌 $x=0$에서 멀어져야 합니다.

여기서 또 새로운(?) 개념을 정리하고 가야겠네요.

바로 **'밑이 1에서 멀어질수록 함수는 어떤 식으로 멀어지는지..'**입니다.

written by ictteru_

주어진 로그함수가 $x=0$ 에서 어떤 식으로 멀어지는지는 조금 더 생각해보면 알 수 있습니다.

일단, 밑이 증가할수록 $x>0$ 인 구간에서는 $y=1$ 에 가까워져야 합니다.

증가하기는 해야 하는데 더 천천히 증가해야 하니까

로그함수 그래프가 $y=1$ 에 가까워지게끔 눕는거죠.

그러면 마치 시계에서 12를 가리키고 있던 분침이 3까지 변화하듯이

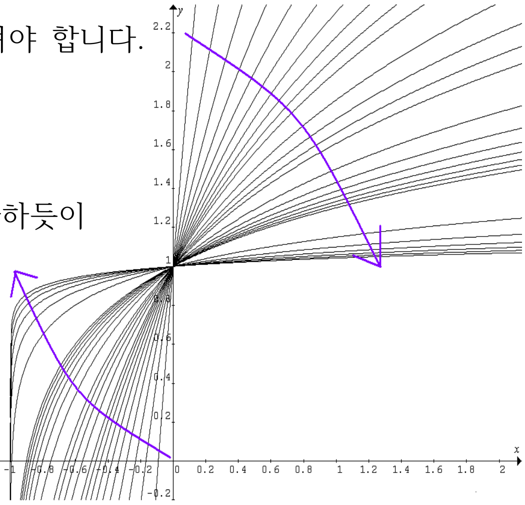
밑이 1에 가까웠을 땐 $x=0$ 에 가깝다가,

1에서 점점 멀어지며 증가할 때에는 $y=1$ 에 가까워집니다.

그 다음으로 밑이 증가할 때 $x<0$ 인 구간에서는

마찬가지로 $y=1$ 에 가까워지는 대신, 오른쪽 그림과 같이

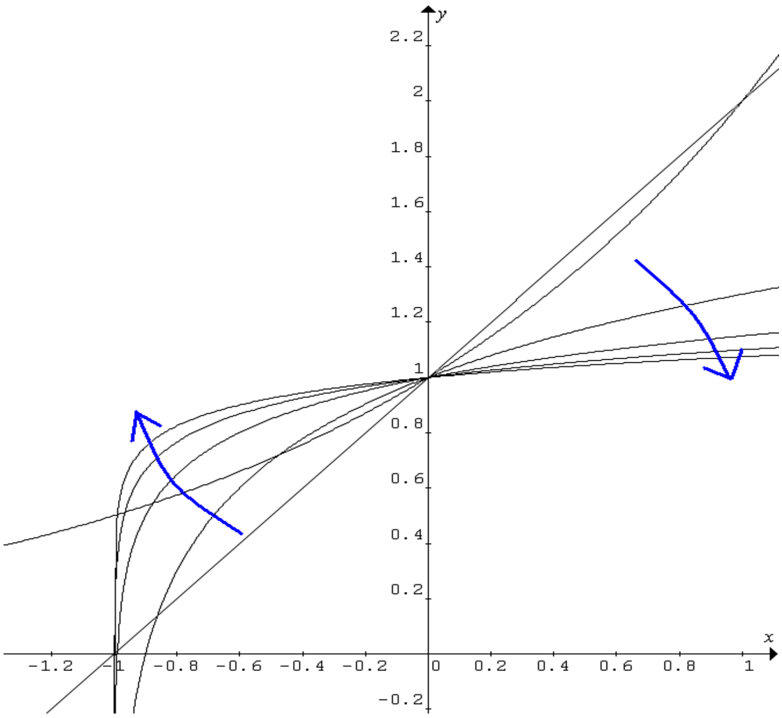
점근선인 $x=-1$ 부근에서는 급격하게 $x=-1$ 에 다가갑니다.



즉, 밑에 따라 로그함수가 이렇게 변하니까

지수함수와의 교점이 제 2사분면에서도 생길수도 있다는 거죠.

특히 밑을 10, 10^2, 10^3, 10^4 로 팍팍 증가시켜 보면 그래프는 아래와 같이 나옵니다.



$y=\log_n(x+1)+1$ 와 $y=2^x$ 의 교점 $(a_n,\ 2^{a_n})$ 는 제 1 or 2사분면에 존재할 수 있는데,

밑이 커지니까 교점 $(a_n,\ 2^{a_n})$ 이 전부 제 2사분면에만 존재하는 군요.

(이대로 n 이 한없이 커진다면 로그함수가 ┏ 모양에 가까워질테니

아마 교점의 좌표의 극한값은 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ 이 되겠구요.)

고로 ㄴ에서 묻고 있는 '$x=a_n$ 에서, ($y=2^x$ 의 함숫값) ≤ ($y=x+1$ 의 함숫값)?'은

부등호 방향이 n 값에 의해서 결정되므로 거짓~!

written by ictteru_

이걸로 일단락 하고 싶지만 행여나 이런 질문을 하시는 분이 계실까봐

하나만 더 언급하겠습니다.

2008년 09월 04일 Kice 2009 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 15번

15. 두 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$, $g(x)=\log_2(x-1)+2$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

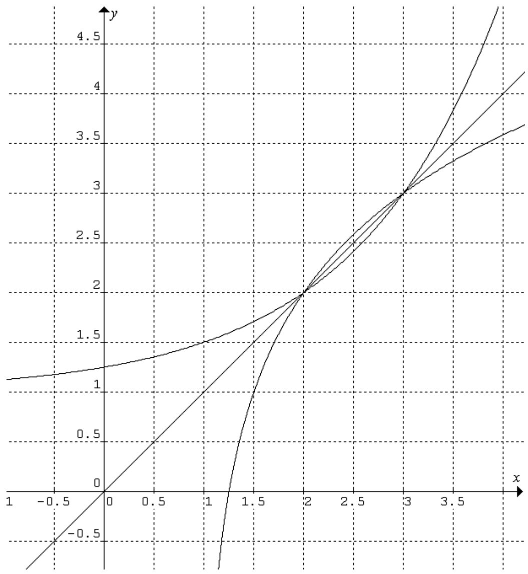
<보 기>

ㄱ. $f^{-1}(5)\cdot\{g(5)+1\}=20$이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



"이 문제에서 보다시피 밑이 2임에도 불구하고,

서로 역함수 관계인 지수함수와 로그함수가 두 군데에서 만나고 있잖아요..?!"

네, 당연하죠.

하지만 이걸로 여태 말해왔던 내용들이 한 순간에 무너지는 일은 절대 없습니다.

자세히 보면 제가 그냥 '밑이 1보다 큰 지수함수와 그 역함수 간에 교점은 ~' 이라 하긴 했는데,

어디까지나 '기본 형태'의 경우에 한정하여서 입니다.

$y=a^x$ 나 $y=\log_a x$ 같은 평행이동을 하지 않은 경우 말이죠.

위 문제만 하더라도 x, y축 방향으로 적절하게 평행이동 시켰으니

밑을 조절하지 않고도 역함수 간에 교점을 갖게 할 수 있습니다.

물론 조금 전의 포카칩 모의고사 문제에서처럼 유연하게 활용해서 풀 수도 있어야 겠지요.

암튼 이것으로 유형 하나를 마칩니다.

저도 유형이란 말이 사고의 방식을 고착화시키는 것 같아 썩 좋아하지는 않지만,

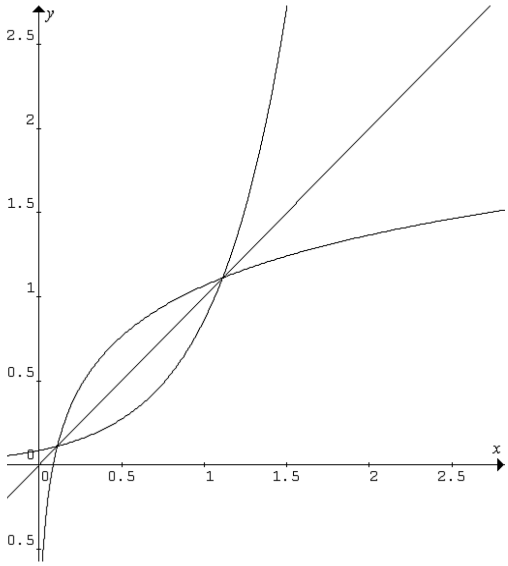
어쨌든 이 내용으로 풀리는 지수·로그함수 문제들이 있더라는 것 정도는 기억해주세요.

written by ictteru_

이번엔 자주 나오지는 않지만, 나왔다고 하면 많은 학생들이 싫어할 문제를 소개하겠습니다.

2005년 04월 26일 교육청 수리 (가형) 14번

14. $y=10^x$의 그래프를 x축 방향으로 k만큼, $y=\log_{10}x$의 그래프를 y축 방향으로 k만큼 평행이동하였더니 두 함수의 그래프가 두 점에서 만났다. 이 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]



① $\frac{1}{9}+2\log_{10}3$

② $\frac{1}{9}+3\log_{10}3$

③ $9-\log_{10}3$

④ $9-2\log_{10}3$

⑤ $9+\log_{10}3$

수능 수리영역에서 나오는 각도들은 대개가 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, \cdots$ 같은 특수각이거나 해당 각에 대한 사인, 코사인, 탄젠트 값이 간단하게 표현되는 경우가 대부분 입니다.

안 그러면 답이 깔끔하게 나오기가 힘들거든요.

거기다 그렇게 해야지 출제자 분들도 편하구요..ㅎ (특히 공간 도형에서 이걸 역이용하면 ㅎㄷㄷ하죠ㅋ)

암튼 위 문제에서 나온 친근한 무리수 $\sqrt{2}$가 내포하고 있는 특수각은 45° 입니다.

$y=10^{x-k}$와 $y=\log_{10}x+k$ 또한 서로 역함수 관계인데,

만약 교점을 갖는다면 $y=x$ 상에서 가져야 하죠.

직선 $y=x$의 기울기가 곧 45° 이고,

그 직선상에 두 점간의 거리가 $\sqrt{2}$가 되려면

교점의 좌표는 $(p,\ p)$와 $(p+1,\ p+1)$이 되겠네요.

여기가 중요합니다! 교점의 좌표를 이렇게 둔다는 것이요.

왠지 계산이 간단해 보이는 지수함수에다 저걸 대입해봅시다.

$p+1=10^{p+1-k}$ … ①

$p=10^{p-k}$ … ②

① ÷ ② ; $\frac{p+1}{p}=10 \rightarrow p=\frac{1}{9}$

따라서 로그함수도 점 $\left(\frac{1}{9},\ \frac{1}{9}\right)$를 지나므로

$\frac{1}{9}=\log_{10}\frac{1}{9}+k$에서 $k=\frac{1}{9}+\log_{10}9=\frac{1}{9}+2\log_{10}3$이 나오네요.

그러니까, 친근한 수치가 나오면 상황도 그만큼 예쁘니까 쉽게 푸는 방법이 분명 있습니다.

이제부턴 어지럽게 연관성 없는 식들을 늘어놓고, 거기서 답을 이끌어내려 할 필요는 없겠죠?

written by ictteru_

2009학년도 경찰대학 제1차 시험 (수리영역) 19번

19. 기울기가 -1인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 $\mathrm{A}(a,\,b)$,

직선 l이 곡선 $y=\log_4(x+2)$와 만나는 점을 $\mathrm{B}(c,\,d)$라고 하자.

(단, $1<a<c$) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$일 때, $a+c$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

이 문제에서 캐치할 수 있는 특수각이라든가 친근한 숫자는

기울기가 '-1'이란 것과, 그 직선 상의 두 점 사이 거리가 '$\sqrt{2}$'라는 겁니다.

그렇다고 이걸로 다 끝난건 아니구요;;

그래프 개형을 그려보고 교점의 좌표를 예측해야 합니다.

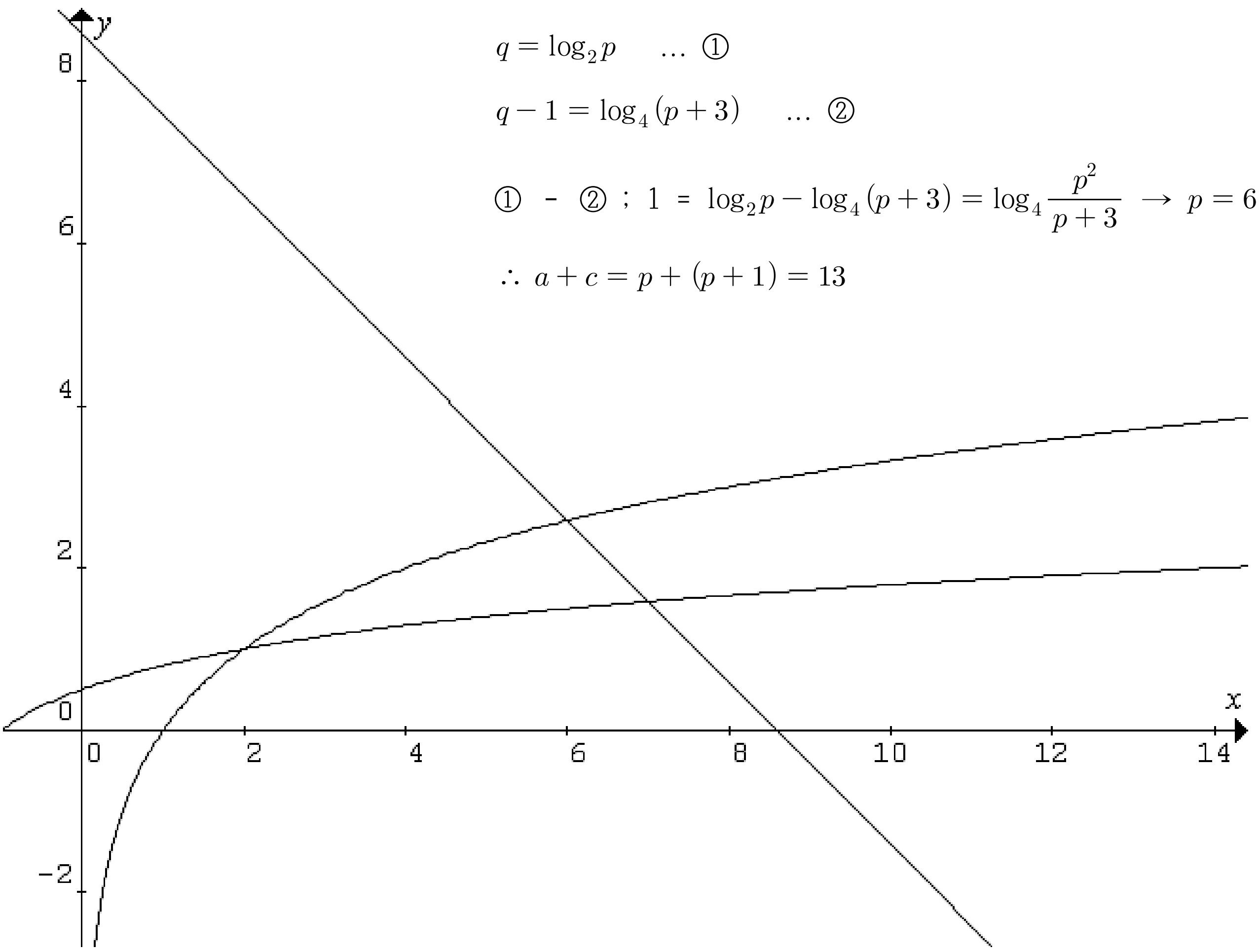
가령 $b=\log_2 a$, $d=\log_4(c+2)$라 두고 식을 요리조리 연립했다간

어느 순간 그 다음 단계로 넘어가지 못하고,

시간은 시간대로 점수는 점수대로 까먹을 확률이 높습니다;

하지만 기울기와 거리가 예쁘게 주어졌으니,

교점의 좌표를 $(p,\,q)$와 $(p+1,\,q-1)$로 둔다면 얘기가 달라지죠.



$q=\log_2 p$ ... ①

$q-1=\log_4(p+3)$ ... ②

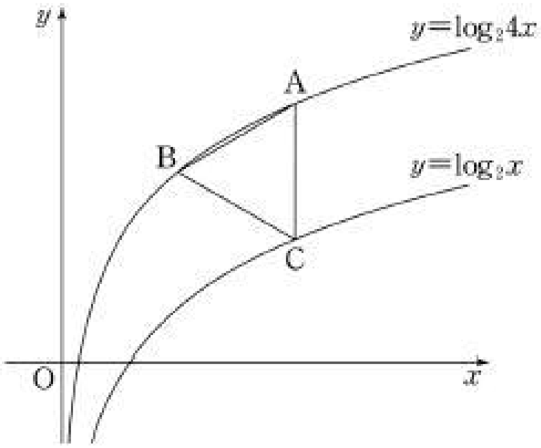
① - ② ; $1=\log_2 p-\log_4(p+3)=\log_4\dfrac{p^2}{p+3}$ $\rightarrow$ $p=6$

$\therefore\ a+c=p+(p+1)=13$

혹시나 시험장에서 직접 보신 분들에겐 이 풀이가 좀 더 레알 돋을 수도..;

2010년 09월 02일 Kice 2011 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 15번

15. **함수** $y=\log_2 4x$ **의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수** $y=\log_2 x$ **의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가** y **축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는** $(p,\ q)$ **이다.** $p^2 \times 2^q$ **의 값은? [4점]**



① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

여기서 파악해야 할 친근한 수치는 $\overline{AB}$의 기울기가 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이란 겁니다.

그리고 추가적으로 조금만 살펴보면 $\overline{AC}=2$임을 알 수 있네요.

즉, 정삼각형 한 변의 길이가 2란 말이죠.

이 때 $B(p,\ q)$라 하면 $A(p+\sqrt{3},\ q+1)$를 라고 둘 수 있습니다.

피타고라스 정리든, 특수각이든, 그냥 직관적으로든

$A(p+\sqrt{3},\ q+1)$라고 두어야 계산이 수월해집니다.

그리고 이 두 점이 해당 로그함수 위에 있으므로

$q+1=\log_2 4(p+\sqrt{3})$ … ①

$q=\log_2 4p$ … ②

① - ② ; $1=\log_2 \dfrac{p+\sqrt{3}}{p} \rightarrow p=\sqrt{3},\ q=\log_2 4\sqrt{3}$

$\therefore p^2 \times 2^q = 3\times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

이렇게 길어야 네 줄 만에 다 풀 수 있죠?

푸는 방식들이 다 거기서 거기입니다.

친근한 수치를 기준으로 교점의 좌표를 적절하게 설정한 다음에

함수식에 넣어서 연립해주면 됩니다.

이번엔 가뭄에 콩 나듯이 나오지만(그래도 그 해마다 모의고사에서 한 번씩은 본 거 같네요..) 아는 사람과 모르는 사람의 격차가 현저한 문제를 소개 합니다.

2007년 06월 07일 Kice 2008 대수능 6월 모의평가 수리 (나형) 09번

9. 두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

무작정 식을 세웠다간 계산이 안드로메다로 가버립니다.

07~08 EBS 파이널에서도 이 비슷한 문제가 있었는데,

혹자는 "이런 건 수능에 절대로 안 나오니까 넘어가자~"고 하더군요;

하지만 명색이 평가원 시험에 나온 문제이고, 그것도 3점짜리잖습니까?

이걸 정말 3점짜리답게 푸는 방법도 있습니다만, 그게 약간 충격적이죠ㅎ

예를 들어서 유리함수 $y=\frac{2}{x-1}+3$의 중심(?)을 $(1,\ 3)$이라 할 수 있습니다.

중심이라기보다는 대칭점이라고 하는 편이 더 적합할 수 있겠네요.

하지만 $y=2^x$에서의 중심 내지는 대칭점도 말할 수 있을까요?

바로 이 생각을 발전시켜서 위 문제를 풀 수 있습니다.

$y=2^x$와 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$는 서로 적절하게 평행&대칭이동해서 겹쳐질 수 있는 관계입니다.

두 함수 각각의 중심은 생각하기 어렵지만,

$y=2^x$가 항상 지나는 점인 $(0,\ 1)$과,

$y=2^x$를 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$로 이동시키면서 $(0,\ 1)$이 놓인 점의

중점이 바로 $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$라고 해서 식을 세울 수 있습니다.

그러니까 GPS 돋는 말로 설명하자면 기준점만 추적해서 그걸로 푼다는 말이지요..

$y=2^x$가 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$에 놓이기까지,

원점대칭 후 y축 양의 방향으로 k만큼 평행이동 하였으므로,

$(0,\ 1)$은 $(0,\ -1+k)$로 이동합니다.

따라서, $\frac{5}{4}=\frac{1+(-1+k)}{2}$에서 $k=\frac{5}{2}$임을 알 수 있죠.

written by ictteru_

EBS 해설에선 어떻게 나와 있는지 구경해봅시다.

9.

$2^x=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$에서

$(2^x)^2-k\cdot 2^x+1=0$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 위의 방정식의 근이므로

$2^\alpha+2^\beta=k$ ----㉠

한편, 두 점 A, B는 함수 $y=2^x$위의 점이므로 A$(\alpha, 2^\alpha)$, B$(\beta, 2^\beta)$로 놓으면 중점의 좌표가 $\left(0, \frac{5}{4}\right)$이므로

$\frac{2^\alpha+2^\beta}{2}=\frac{5}{4}$ ----㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$k=\frac{5}{2}$

답 ⑤

<다른풀이>

두 점 두 점 A, B는 함수 $y=2^x$위의 점이므로 A$(\alpha, 2^\alpha)$, B$(\beta, 2^\beta)$로 놓으면 중점의 좌표가 $\left(0, \frac{5}{4}\right)$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0$ ---㉠, $\frac{2^\alpha+2^\beta}{2}=\frac{5}{4}$---㉡

㉠에서 $\beta=-\alpha$이므로 ㉡에 대입하면

$\frac{2^\alpha+2^{-\alpha}}{2}=\frac{5}{4}$

$2(2^\alpha)^2-5\cdot 2^\alpha+2=0$

$(2\cdot 2^\alpha-1)(2^\alpha-2)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=1$

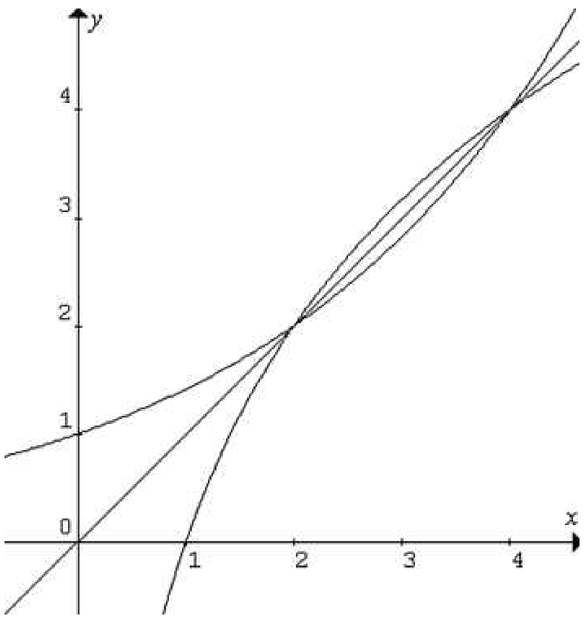
이 때, A$(1, 2)$, B$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$라 하면 이 두 점은 곡선 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$위의 점이므로

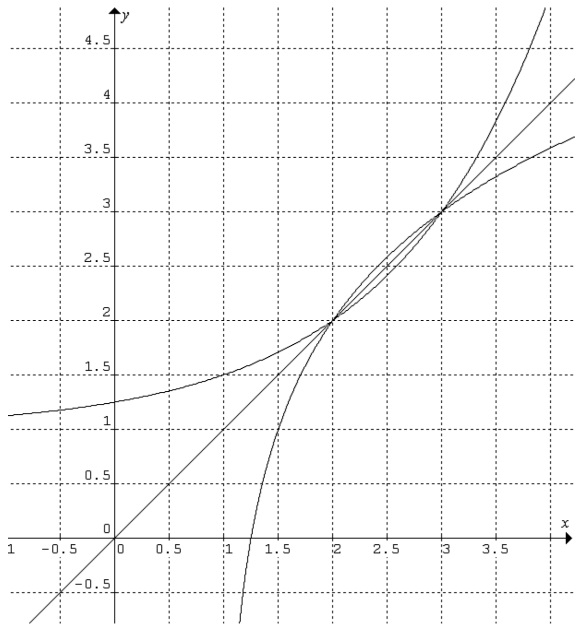
$2=-\left(\frac{1}{2}\right)^1+k$

$\therefore\ k=\frac{5}{2}$

만약에 평행&대칭이동으로 겹쳐질 수 있는 지수함수 두 개를 가지고 물어보는 경우가 아니라,
로그함수 두 개나, 지수함수와 로그함수를 가지고서 각각을 요리조리 이동시킨 다음,
그래프 간 교점의 내분점이 얼마라고 해서 물어본다면,
식을 연립하기가 참 난해하겠죠?
특히 지수, 로그가 섞여 있는 경우에 말이죠.
하지만 문제가 어떻게 나오든 상관없이 흔들리지 않고 정확하게 풀 수 있는 방법이 있다면
바로 '기준점' 위주로 생각하는 것이 아닐까요..

여기서 잠시, 아까 다뤘던 다음 그림들을 보고 이상한 점을 찾아봅시다.



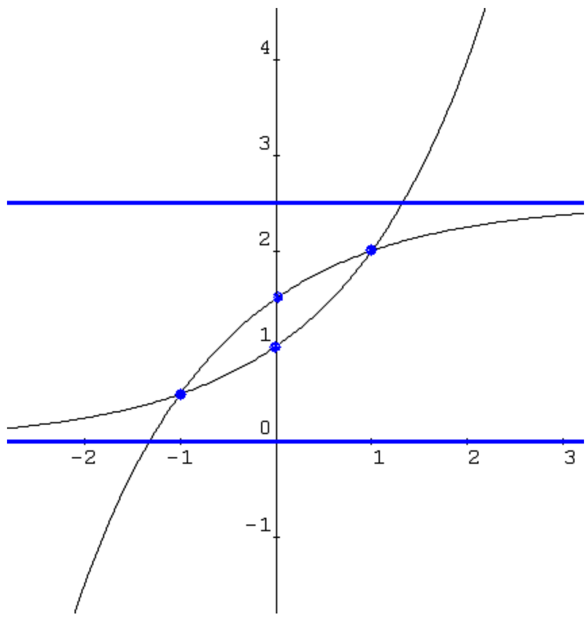


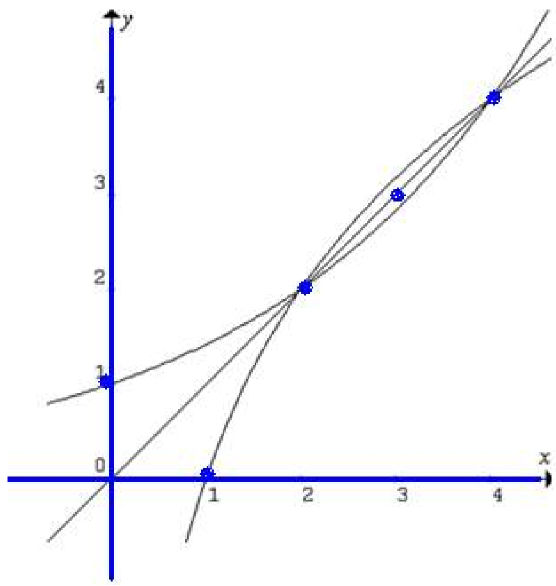
두 함수가 **평행&대칭이동으로 겹쳐질 수 있는 관계**임에도 불구하고,

(기준점간의 중점) ≠ (교점간의 중점)이군요!

따라서 단순히 **평행&대칭이동으로 겹쳐질 수 있는 관계**보다

좀 더 강력한 조건이 필요합니다.





이미 감 잡으신 분들도 있겠지만,

평행&대칭이동으로 겹쳐질 수 있는 관계와 더불어

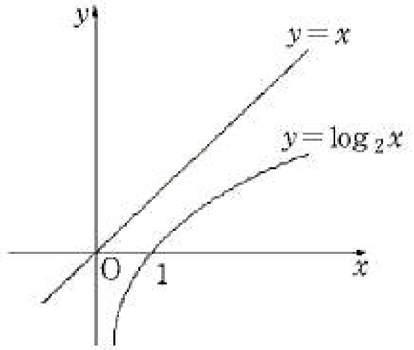
점근선이 서로 평행해야 한다는 조건을 추가할 수 있겠네요.

안 그러면 기준점 개념을 끌어들이지 않아도 걍 교점이 뻔하게 존재하는 경우가 반례로 작용하니까요.

이번엔 주로 10-나(or 고등수학(하)) 개념이 녹아든 문제들을 소개하겠습니다.

2005년 04월 26일 교육청 수리 (가형) 09번

9. 두 함수 $y=x$와 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



〈보 기〉

ㄱ. $\dfrac{\log_2 x}{x}<1$

ㄴ. $\dfrac{\log_2 x}{x-1}<1$ $(x\neq 1)$

ㄷ. $\dfrac{\log_2 (x+1)}{x}<1$ $(x\neq 0)$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

밑이 2니까 당연히 저렇게 나와야 하죠.

암튼 <보 기>를 보면 분수식과 상수 간에 대소 비교를 묻는 경우가 많은데,

이런 건 ‘기울기’를 물어보는 경우가 다반사입니다.

두 점 $(a,\ b)$와 $(c,\ d)$를 잇는 직선의 기울기는 $\dfrac{d-b}{c-a}$이죠.

그런데 종종 $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 몇몇은 0인 경우가 많습니다.

가령, $(a,\ b)=(0,\ 0)$이라면 $\dfrac{d-b}{c-a}$는 $\dfrac{d}{c}$ 형태가 될 것이고,

이는 ‘원점과 점 $(c,\ d)$를 잇는 직선의 기울기’로 해석할 수 있습니다.

이게 전부입니다.

그래프 상 기울기를 묻고 있음에 착안하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ을 차례대로 해석해보면

ㄱ은 (원점 $(0,\ 0)$과 $y=\log_2 x$ 위의 점 $(x,\ \log_2 x)$을 잇는 직선의 기울기) <1 ?

ㄴ은 (점 $(1,\ 0)$과 $y=\log_2 x$ 위의 점 $(x,\ \log_2 x)$을 잇는 직선의 기울기) <1 ?

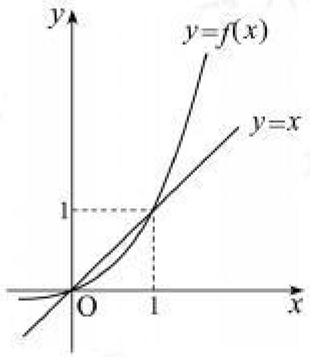
ㄷ은 ㄴ에서 $x-1=t$로 치환하면 $\dfrac{\log_2 (t+1)}{t}<1$ $(t\neq 0)$인데,

그냥 보기 좋게 하려고 t자리에 다시 x를 넣은 것이니 ㄴ과 동치입니다.

물론 ㄴ에서의 x와 ㄷ에서 x의 의미는 살짝 다르지요.

2007년 03월 14일 교육청 수리 (가형) 10번

10. 그림은 함수 $f(x)=2^x-1$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 이다. 곡선 $y=f(x)$ 위에 임의로 두 점을 잡아 그 두 점의 x좌표를 각각 a, $b\,(0<a<b)$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



< 보 기 >

ㄱ. $0<a<1$이면 $f(a)<a$이다.

ㄴ. $b-a<2^b-2^a$

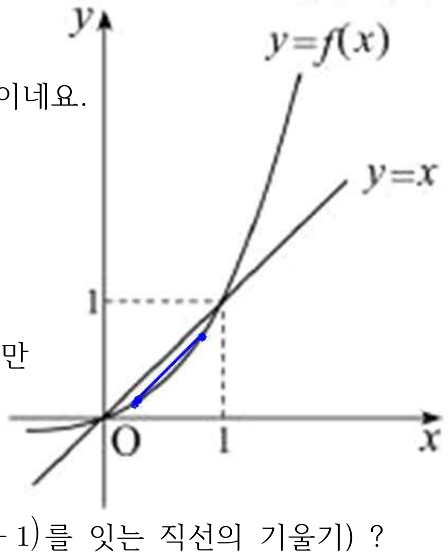
ㄷ. $b(2^a-1)<a(2^b-1)$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

밑이 2인 지수함수라 할지라도 이렇게 평행이동해서 억지로 $y=x$와 교점을 갖게 할 수 있습니다.

ㄱ은 그래프를 보면 당연하고,



ㄴ은 $b-a>0$이므로 항상 $1<\dfrac{(2^b-1)-(2^a-1)}{b-a}$인지를 묻는 셈이네요.

하지만 해당 구간 내에서 좌표를 잘 잡으면

두 점 $(a,\ 2^a-1)$와 $(b,\ 2^b-1)$을 잇는 직선의 기울기가

얼마든지 1보다 작거나, 심지어 같게 할 수 있습니다.

막상 시험지에다 그림을 그리려니 공간이 좁아서 짜증날 수도 있지만

암튼 오른쪽 그래프와 같이 반례를 잡으면 됩니다.

ㄷ은 요리조리 식을 변형시켜보면

(원점과 점 $(a,\ 2^a-1)$를 잇는 직선의 기울기) < (원점과 점 $(b,\ 2^b-1)$를 잇는 직선의 기울기) ?

를 묻는 셈이고, 그래프에 의하면 참임을 알 수 있습니다.

만약 이 문제에서 그래프 없이 수식만을 던져주고

각각의 명제를 대수적으로 증명하라고 했다면 아주 어려워졌겠지만,

이렇게 명제의 진위를 판단하기 위해 그래프를 통하여 '확인'하는 것으로도 충분합니다.

다음으로 지수·로그함수와 다항함수 간의 교점에 관해서 생각해봅시다.

2007년 11월 15일 2008학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 16번

16. 직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

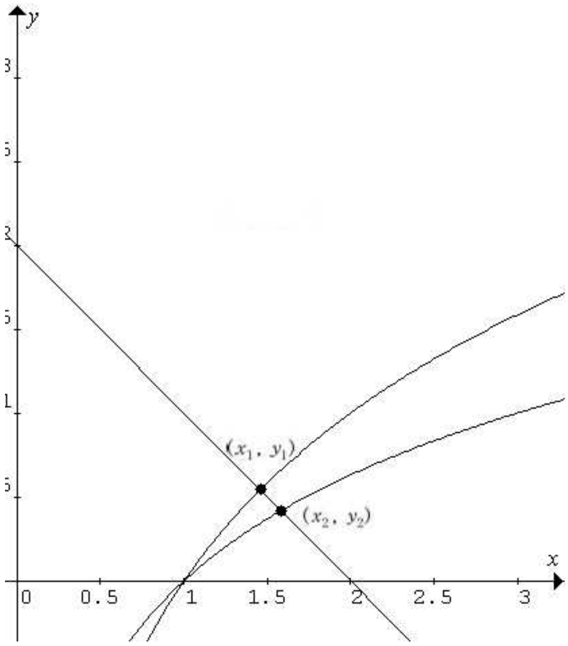
<보 기>

ㄱ. $x_1 > y_2$

ㄴ. $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$

ㄷ. $x_1 y_1 > x_2 y_2$

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



'밑은 2보다 3이 더 크니까 아마 $x>1$에서 $\log_3 x > \log_2 x$ 일거야..'

라고 생각하신 분은 없겠죠?

당연히 밑은 3보다 2가 더 1에 가까우니까 $x>1$에서 $\log_2 x > \log_3 x$이여야 합니다.

그래프를 제대로 그렸으면 <보 기>로 넘어갑시다.

ㄱ은 $x_1 > 1 > y_2$이므로 참이고,

ㄴ은 적절하게 이항하면 $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$?이고,

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 모두 기울기가 -1인 직선 $y=2-x$위에 있으므로 참입니다.

문제는 ㄷ인데요, 여러 방식이 있겠지만 지금 소개하려는 부분이 그나마 가장 보편적인 접근법입니다.

지수함수와 다항함수의 교점인 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$의 구체적 수치를 알 수는 없지만,

출제자는 출제자 나름대로 최대한 물어 볼 수 있는 것들을 물어봅니다.

일단 교점이니까 해당하는 지수함수 식에 넣든, 다항함수 식에 넣든 모두 만족하겠죠?

$y_1 = 2 - x_1,\ y_2 = 2 - x_2$　　… ①

$y_1 = \log_2 x_1,\ y_2 = \log_3 x_2$　　… ②

그리고 ㄷ에선 $x_1 y_1 > x_2 y_2$? 를 묻고 있네요.

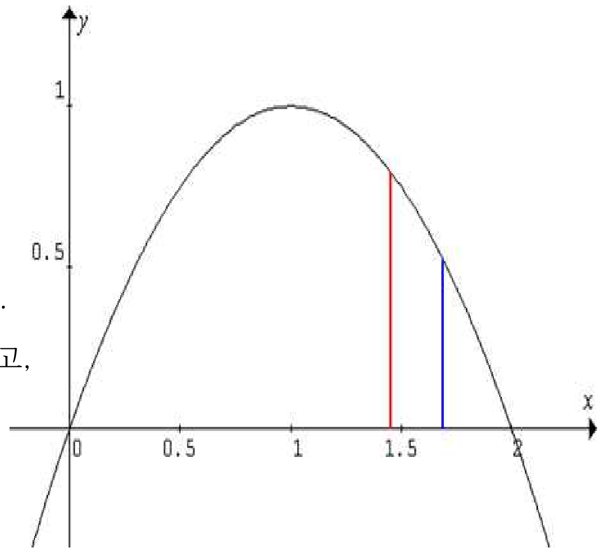
어차피 ①, ②를 써먹어야 한다면,

그나마 다루기 쉬운 다항함수 식을 이용하자는 것입니다.

그러면 $x_1 y_1 > x_2 y_2$? $\Leftrightarrow x_1(2-x_1) > x_2(2-x_2)$?가 되고,

$f(x) = x(2-x)$에서 $1 < x_1 < x_2$일 때,

$f(x_1) > f(x_2)$?를 묻는 문제로 환원되죠.



2009년 07월 14일 교육청 수리 (가형) 13번

13. 정의역이 $x<4$인 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$) [3점]

<보 기>

ㄱ. $x_1+x_2>0$

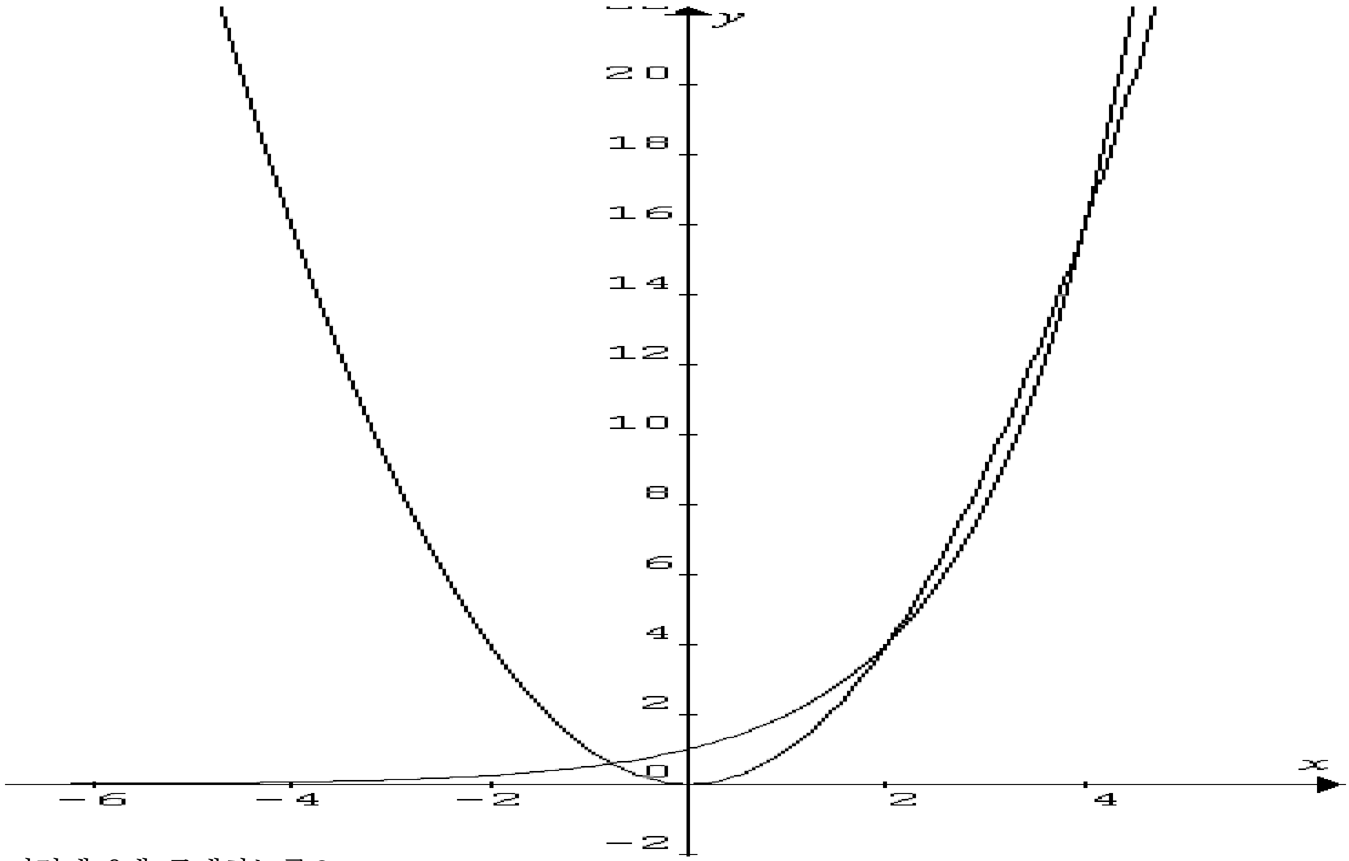
ㄴ. $x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2<0$

ㄷ. $|x_1\cdot y_2|-|x_2\cdot y_1|>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=2^x$와 $g(x)=x^2$의 교점이 몇 개 존재할까요?

비록 한 번에 그리기는 힘들지만 암튼 그래프를 (교점이 잘 보이게 옆으로 늘려서) 그려보면



이렇게 3개 존재하는군요.

하지만 문제에서는 $x<4$에 대하여라고 정의역을 한정했구요.

(x_1의 정체는 구체적으로 구할 수 없지만 $x_1=2$임은 끄집어 낼 수 있겠네요.)

그 다음 ㄱ, ㄴ, ㄷ을 판별하기 위해

지수함수 $f(x)=2^x$와 다항함수 $g(x)=x^2$ 중에서 다항함수에 의한 관계식을 이용하여 풀면 되겠군요.

2010년 07월 08일 교육청 수리 (나형) 08번

8. 부등식 $y \geqq x^2$의 영역에 속하는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\log_2(y+1)-\log_2|x|$의 최솟값은? [4 점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

껍데기는 지수함수인데 사실은 10-나(or 고등수학(하))입니다.

$\log_2(y+1) - \log_2|x| = \log_2 \frac{y+1}{|x|}$ 의 최솟값을 구하려면

진수 부분인 $\frac{y+1}{|x|}$ 가 최솟값을 가질 때가 되겠네요.

물론 로그의 진수니까 양수 조건을 만족해야 겠고, 그래서 분모에 절댓값을 씌워준 거네요.

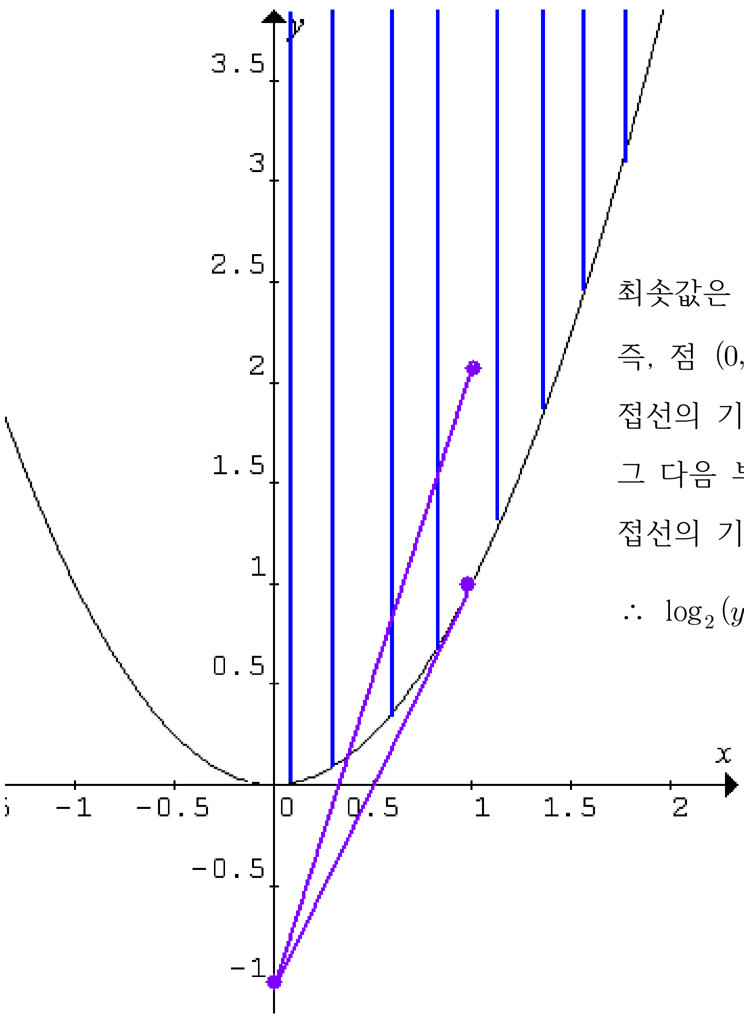
한편, $y \geq x^2$의 영역은 y축 대칭이기에

x가 양수라고 놓고 풀었을 때의 최솟값이나

x가 음수라고 놓고 풀었을 때의 최솟값이나 같습니다.

그래서 진수 부분을 다시 $\frac{y-(-1)}{x-0}$ 로 본다면,

'점 $(0, -1)$과 해당 영역에 속하는 점 (x, y)를 잇는 직선의 기울기'로 볼 수 있겠네요.



최솟값은 그 직선이 영역에 접하는 순간에 되겠구요.

즉, 점 $(0, -1)$에서 $y = x^2$에 그은

접선의 기울기가 얼마인지를 물어보는 문제입니다.

그 다음 부분은 착실하게 계산해보면

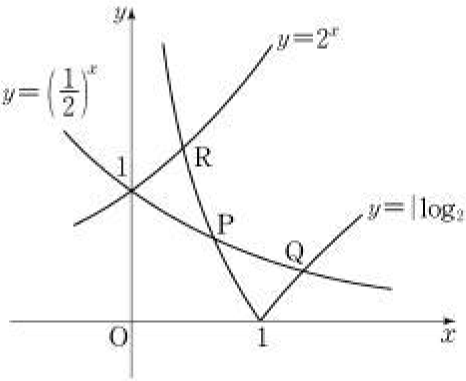
접선의 기울기가 2가 나오고, 따라서

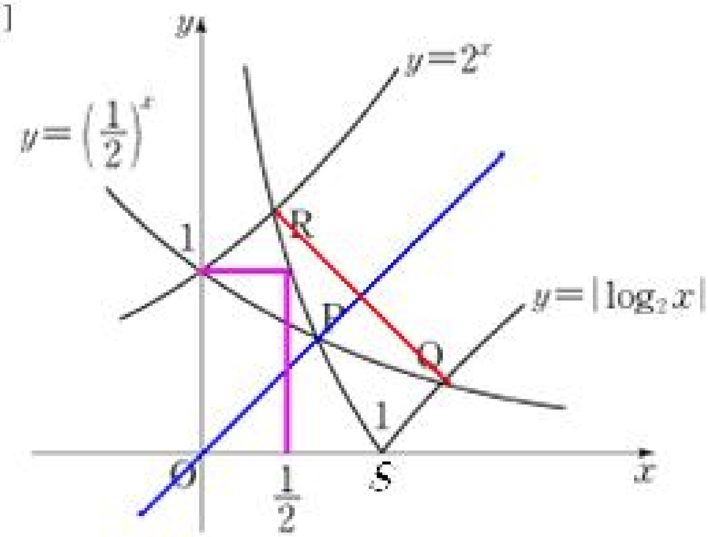
$\therefore\ \log_2(y+1) - \log_2|x| = \log_2 \frac{y+1}{|x|} \geq \log_2 2 = 1$

2010년 11월 18일 2011학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 16번

16. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]





<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$

ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이 문제에서 P, Q, R의 좌표를 어떤 것도 정확하게 구할 수 없습니다.

하지만 근에 집착하지 않더라도 문제 푸는 데에는 지장이 없습니다.

두 함수가 특정 부분끼리 서로 적절하게 역함수 관계이므로 **대칭성을 이용**하면 충분하거든요.

다항함수가 애초에 등장하지 않았으니 아까와 다르게 지금은 이렇게 접근하는 겁니다.

$x_1 = y_1,\ x_2 = y_3,\ x_3 = y_2$이므로 ㄴ은 당연히 참이고, ㄷ에서 물어 보는 건

$$x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)\,? \Leftrightarrow y_3(x_1 - 1) > y_1(x_3 - 1)\,?$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_3}{x_3 - 1} > \frac{y_1}{x_1 - 1}\,? \quad (\because -1 < x_3 - 1 < x_1 - 1 < 0)$$

이걸 기하학적으로 해석하자면 부등식이 의미하는 바는

(직선 SR의 기울기) > (직선 SP의 기울기)?

이므로 거짓입니다.

참고로 S는 제가 임의로 적었는데요,

종종 어떤 문제들에선 필요한 수치 등을 그래프 상에서 일부러 지워 놓기도 합니다.

그땐 당연히 푸는 사람이 필요에 의해 능동적으로 써 넣어야겠죠?

written by ictteru_

이걸로 **지수·로그함수의 비밀**을 마치려 합니다.

비록 고난도 지수·로그함수 문제들을 ‘다’ 풀 수는 없을지라도

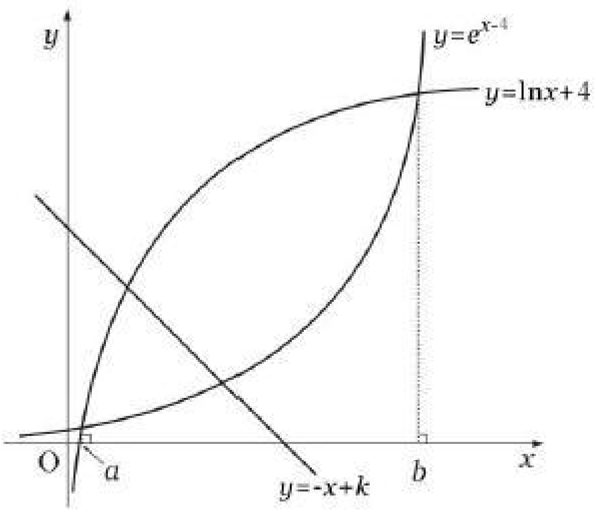
‘더’ 풀 수 있게 되셨으면 좋겠네요.

약 30페이지에 걸쳐 많은 얘기를 했지만,

또 다른 수학적 센스를 요구하는 다음과 같은 문제들도 많이..는 아니고 조금 더 남아 있습니다.

2009년 07월 14일 교육청 수리 (가형) 29번

29. 그림과 같이 함수 $y=\ln x+4$, $y=e^{x-4}$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 각각 a, b라 하자. 일차함수 $y=-x+k$의 그래프가 $a \leqq x \leqq b$에서 두 함수의 그래프와 만나는 두 점 사이의 거리가 최대가 될 때, 상수 k의 값은? [4점]



① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

2010년 07월 08일 교육청 수리 (가형) 28번

28. 함수 $f(x)=\ln\frac{x}{k}$ (k는 자연수)의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 곡선 $y=f(x)$위의 점과 곡선 $y=g(x)$위의 점 사이의 최단거리를 l_k라 하자. $l_k \geqq 3\sqrt{2}$를 만족시키는 k의 최솟값은? (단, $e=2.7$로 계산한다.) [3점]

① 11 ② 10 ③ 9 ④ 8 ⑤ 7

남은 부분은 혼자서도 충분히 커버 가능한 부분이니 여러분의 몫으로 남겨둘게요.

암튼 끝까지 열공열공하셔서 좋은 결과 있으시길 바랍니다..

저도 간절하게 공부하고 있는 수험생 분들에게 도움이 되어 드릴 수 있다는 게 기쁘네요..^^;

written by ictteru_