제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{8}\times 4^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+12n}-3n\right)$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=a_2+6$$

일 때, a_4의 값은? [2점]

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

4. 6개의 문자 a, a, a, b, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 52 ② 56 ③ 60 ④ 64 ⑤ 68

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=10$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2{a_n}^2+3n^2}{{a_n}^2+n^2}$의 값은? [3점]

$\lim \frac{a_n}{n}=0$

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

6. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a\neq 1$) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

$3\,\frac{1}{2}\log_2 a = 2\log_2 b$

$a^3=b^4$ $b=a^{\frac{3}{4}}$

7. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}$$

$\left|\frac{x}{4}\right|<1$

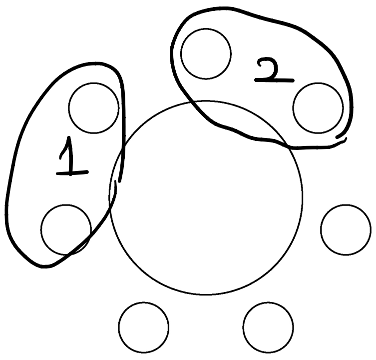
$|x|<4$

에 대하여 $f(k)=-\frac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

8. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 96 ② 100 ③ 104 ④ 108 ⑤ 112



$5! \times (2!)^2 \times \frac{1}{5}$

9. 함수

$$f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$$ 감소

가 닫힌구간 $[0, 12]$에서 최댓값 -4, 최솟값 m을 갖는다. $k+m$의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f(0) = -2\log_2 k = -4$. $k=4$

$f(12) = -2\log_2 16 = -8 = m$

10. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(e^{2x}-1)^2 f(x) = a - 4\cos\frac{\pi}{2}x$$

를 만족시킬 때, $a \times f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① $\frac{\pi^2}{6}$ ② $\frac{\pi^2}{5}$ ③ $\frac{\pi^2}{4}$ ④ $\frac{\pi^2}{3}$ ⑤ $\frac{\pi^2}{2}$

$x=0$ 대입 : $0 = a-4$. $a=4$

$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{4(1-\cos\frac{\pi}{2}x)}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)}{(e^x+1)^2}$$

라 하자. $f'(0)-f(0)=2$일 때, $g'(0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$f(x)=g(x)(e^x+1)^2$, $f(0)=4g(0)$

$f'(x)=g'(x)(e^x+1)^2+g(x)\cdot 2(e^x+1)e^x$

$=4g'(0)+4g(0)$

$g'(0)=\frac{1}{2}$

12. 자연수 n이 $2\le n\le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

$-n^2+9n-18=-(n-3)(n-6)$

$n<3$, $n>6$ 일때 음수 → n은 홀수여야 함. 7 9 11

$n=3, 6$ 일때 0 → n X

$3<n<6$ 일때 양수 → n은 짝수여야 함. 4

13. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $|a-3|+|b-3|=2$이거나 $a=b$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

$|a-3|+|b-3|=2$

		a	b	
0	2	3	1,5	(2)
1	1	2,4	2,4	(4)
2	0	1,5	3	(2)

$\frac{12}{36}$

$a=b$

1	1	
3	3	(4)
5	5	
6	6	

14. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta-2\alpha$의 값은? [4점]

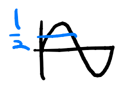
① 3π ② 4π ③ 5π ④ 6π ⑤ 7π

$D/4 = \sin^2\theta - (-3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5)$

$= -2\sin^2\theta + 5\sin\theta - 2 \ge 0$

$2s^2-5s+2 = (2s-1)(s-2) \le 0$

$\frac{1}{2} \le \sin\theta \le 2$



$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5}{6}\pi$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$

15. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=(2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)}+(n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n} \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 $(*)$이 성립한다.
>
> (ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
>
> $$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$
>
> 이다. $n=m+1$일 때,
>
> $$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$
>
> $$+(2^{2m+2}-1)\times \boxed{(가)}^{\;2^{(m+1)m}}+m\times 2^{-m-1} \quad (=a_{m+1})$$
>
> $$=\boxed{(가)}\times\underbrace{\boxed{(나)}}_{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$
>
> $$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$$
>
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점] $\dfrac{2^{16}}{2^{12}}$

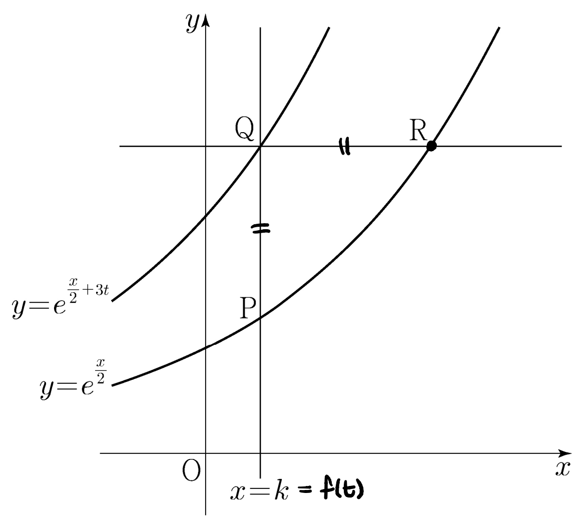
① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

16. 양수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자.

> 직선 $x=k$와 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=e^{\frac{x}{2}+3t}$이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{PQ}=\overline{QR}$이다.

함수 $f(t)$에 대하여 $\lim\limits_{t\to 0+}f(t)$의 값은? [4점]

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$



$\overline{PQ}=e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)$

$R(k+\overline{PQ},\ $Q의 y좌표$)=(k+e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1),\ e^{\frac{k}{2}+3t})$이 $y=e^{\frac{x}{2}}$ 위에 있다.

∴ $\ln y=\frac{x}{2}$에 대입하면 $\frac{k}{2}+3t=\frac{1}{2}(k+e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1))$

$3t=\frac{1}{2}e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)$

$\left(\frac{6t}{e^{3t}-1}\right)^2=e^k$

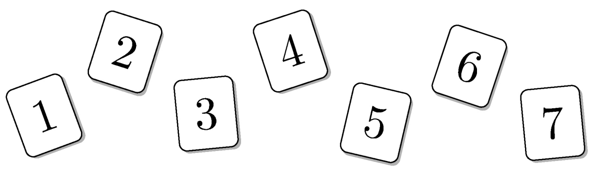
$k=2\ln\left(\frac{6t}{e^{3t}-1}\right)$

$\lim\limits_{t\to 0+}k=2\ln 2$

17. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

> (가) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 4보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 있다.
> (나) 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 5보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

① $\frac{1}{28}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{3}{28}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{5}{28}$



i) 4 양옆에 6, 7

순서 변경 가능 (×2)

(6 4 7) (_ 5 _) _ 배열 → 3! × 3! × 2

1, 2, 3 중 하나 배열 (3!)

∴ 72

ii) 4 양옆 중 하나에 5

(×2)

(_ 4 5 _) _ _ _ 배열 → 4! × 2 × 3 × 2 = 288

반드시 6 또는 7 → (×2)

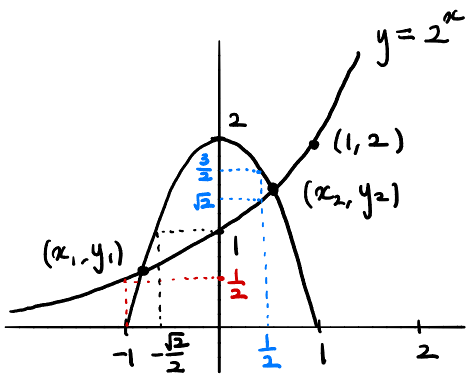
6, 7은 안 됨. → 1, 2, 3 중 하나 배열 (×3)

$\therefore \frac{360}{7!} = \frac{360}{7 \cdot 6 \cdot 120} = \frac{1}{14}$

18. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> <보 기>
>
> ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$
>
> ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$
>
> ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ 와 $-2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 1.5$ 중 후자가 더 큼. (참)

ㄴ. ~~눈으로 보는 맞다~~

$x_2 + y_1 > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

$x_1 + y_2 < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} = 1.5 - 0.7xx < 1.$

$\therefore$ $x_1 + y_2 < x_2 + y_1$ 이므로 $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$ (참)

ㄷ. $y_1 > \frac{1}{2}$, $y_2 > \sqrt{2}$ 이므로 $y_1 y_2 > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_1 y_2 = 2^{x_1 + x_2}$ 이다.

$4 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 > \left(-2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\right)^3 = \frac{1000}{729}$ 이므로 $x_2 < \frac{2}{3}$

$x_1 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 $x_2 < \frac{2}{3}$ 이므로 $x_1 + x_2 < \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

$\therefore$ $y_1 y_2 = 2^{x_1 + x_2} < 2^0 = 1.$ $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$ (참)

19. 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$f(1) \geq 2$이거나 함수 f의 치역은 B이다.

① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{20}{27}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

선지가 $\frac{1}{2}$보다 확연히 크므로 여사건 이용

$f(1) < 2$ 이고 f의 치역이 B가 아닌 경우의 수.

$A \xrightarrow{f} B$

$1 \longrightarrow 1$

2 2

3 3

4

$f(1)=1$, 정의역 원소 2,3,4가 대응되는 경우의수 3^3.

에서, 치역이 B가 되는 경우의 수 제외.

(= 2,3,4가 공역의 원소 2,3 에 모두 대응되는 경우의 수)

i) 2,3,4가 1,2,3에 각각 대응 → $3! = 6$

ii) 2,3,4가 1에 대응되지 않으면서 2,3은 모두 치역 → $2^3-2 = 6$

∴ 전체 경우의수는 3^4

여사건의 경우의수는 $3^4-(3^3-12) = 66$

∴ $\frac{66}{81} = \frac{22}{27}$

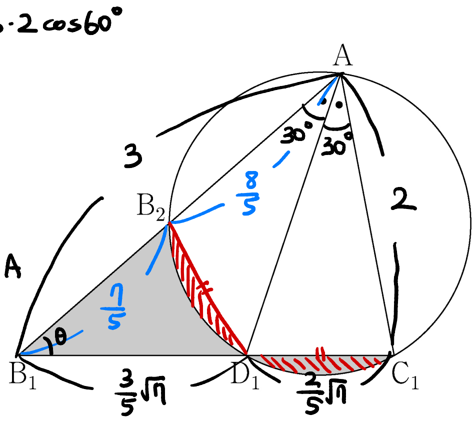
20. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1 = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인 ◺◡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자. 세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인 ◺◡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

$\overline{B_1C_1}^2 = 3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos60°$
$= 7$

$B_1D_1 : D_1C_1 = 3:2$
(각의 이등분선 성질).

R_1

$B_1D_1 \times B_1C_1 = B_1B_2 \times B_1A$
$\sqrt{7} \times \frac{3}{5}\sqrt{7} = x \times 3$
$\therefore x = \frac{7}{5}$



원주각이 같으므로
$\overline{B_2D_1} = \overline{D_1C_1}$

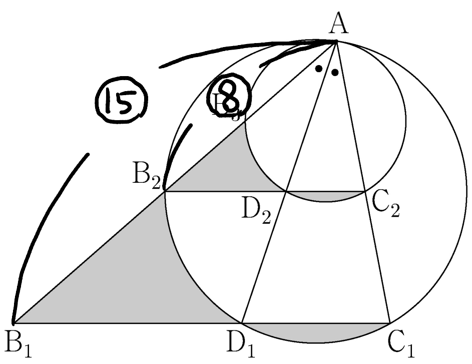
∴ 색칠한 넓이는
$\triangle B_1D_1B_2$의 넓이와 같다.

$\cos\theta = \frac{9+7-4}{2\cdot3\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

$\triangle B_1D_1B_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{5}\sqrt{7}\cdot\sin\theta$
$= \frac{21}{50}\sqrt{3} = S_1$

닮음비 15 : 8
넓이비 225 : 64.
∴ 공비는 $\frac{64}{225}$

R_2



∴ $\lim S_n$
$= \frac{\frac{21}{50}\sqrt{3}}{1-\frac{64}{225}} = \frac{27}{46}\sqrt{3}$

⋮ ⋮

① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$
④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

21. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}} = \frac{1}{2}\log_2 \frac{2(n+1)}{n+2}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

① 150 ② 154 ③ 158 ④ 162 ⑤ 166

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{1}{2}\left(\overbrace{\log_2 \frac{2\cdot 2}{3} + \log_2 \frac{2\cdot 3}{4} + \log_2 \frac{2\cdot 4}{5} + \cdots + \log_2 \frac{2(m+1)}{m+2}}^{m\text{개 항}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log_2\left(2^m \times \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel{m+1}}{m+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2^{m+1}}{m+2}\right)$$ 가 100 이하의 자연수려면

$$\log_2\left(\frac{2^{m+1}}{m+2}\right) = 2n \text{ (짝수)}.$$ ($n \le 100$ 인 자연수)

$$\frac{2^{m+1}}{m+2} = 2^{2n}.$$ $m+2$ 가 2의 거듭제곱수여야 하므로

m	$\frac{2^{m+1}}{m+2}$	n
$2^2-2=2$	2^1	$\frac{1}{2}$ (x)
$2^3-2=6$	2^4	2 (o)
$2^4-2=14$	2^{11}	$\frac{11}{2}$ (x)
$2^5-2=30$	2^{26}	13 (o)
$2^6-2=62$	2^{57}	$\frac{57}{2}$ (x)
$2^7-2=126$	2^{118}	59 (o)

$\therefore 6+30+126 = 162.$

단답형

22. 다항식 $(1+2x)^4$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오. [3점]

${}_4C_2 \cdot (2x)^2$ 24

23. 반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC 에서 $\sin B = \frac{7}{10}$ 일 때, 선분 AC 의 길이를 구하시오. [3점]

$\frac{6}{\frac{7}{10}} = 30$ 21

24. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=9$, $a_2=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k|=3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

$\{a_n\}$: $\underline{9,\ 3,\ -6,\ -9,\ -3,\ 6},\ 9,\ \cdots$

$6n+2$, $6n+5$ 번째에서 $|a_k|=3$.

$\downarrow$ 17개 $\downarrow$ 16개

33

25. 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(a, 0)$에서의 접선의 기울기가 b일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

$a^3=1$

$3x^2-3y^2\cdot y'=ye^{xy}+xe^{xy}\cdot y'$ a는 실수, $a=1$

$$y'=\frac{3x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}$$

$$b=\frac{3a^2}{a}=3$$

4

26. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오. [4점]

$S_{k+2}-S_k=4=a_{k+1}+a_{k+2}$

$=2a_{k+1}+2$

$a_{k+1}=1$.

$a_1=1-2k$

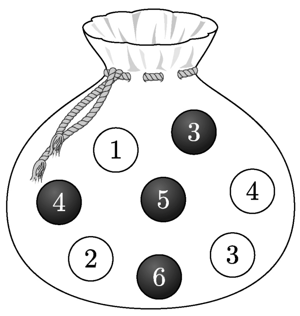
$$\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k(2a_1+2(k-1))}{2}=ka_1+k(k-1)=-16$$

$k-2k^2+k^2-k=-16$.

$k=4$

$a_8=7$

27. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



i) 같은 것이 1쌍일 때

○ ●
3 3 을 같이 뽑았다고 하자.

전체 경우의 수 : 나머지 6개 중 2개를 뽑는데, 흰4와 검4를 함께 뽑는 경우 제외. ${}_6C_2-1=14$

구하는 경우의 수 : 남은 검은공과 흰공 3개씩 중 각각 한개씩 뽑고, " . $3\cdot3-1=8$

○ ●
4 4 를 같이 뽑은 경우의 수도 같으므로 ×2.

∴ 전체 28
구하는 16

ii) 같은 것이 2쌍일 때

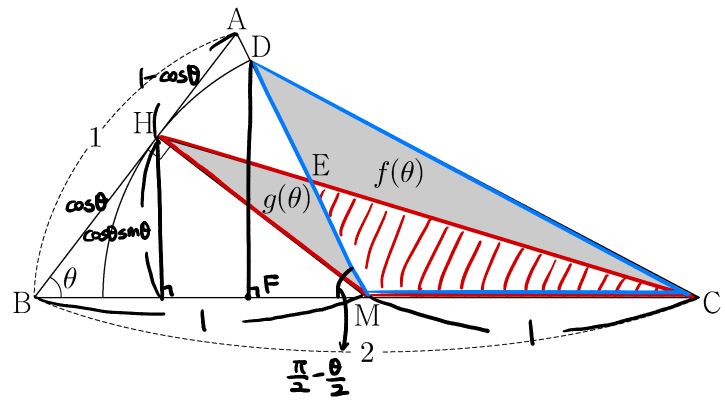
○ ●
3 3
4 4 모두 뽑는다. 전체 경우의 수 1, 구하는 경우의 수 1.

$\therefore \frac{16+1}{28+1}=\frac{17}{29}$. 46

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점] 넓이를 뺀 형태는 겹치는 부분을 생각합니다.



: $\frac{1}{2}\times1$ (밑변) $\times\cos\theta\sin\theta$ (높이)

: $\frac{1}{2}\times1$ (밑변) $\times$ DF (높이)

DF를 구하자.

△ABM은 이등변△, $\angle AMB=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$.

$DM=HM=\sin\theta$. $DF=\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}$.

$$\therefore \lim\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=\frac{\frac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{\theta^3}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}{\theta^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\theta}{2\theta^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$$

$\therefore 80a=15$

29. 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

학생 : A, B

i) 5자루가 2가지 색인 경우

① (1,4)

검	파	빨
1	4	
1		4
	1	4
	4	1

4가지.

검1, 파4인 경우

검은색을 누구에게 줄지 → 2가지.

파란색을 A에게 0,1,2,3,4개 → 5가지.
B에게 4,3,2,1,0개

∴ $4\times 2\cdot 5 = 40$

② (2,3)

검	파	빨
	2	3
	3	2

2가지.

파2, 빨3

파란색 3가지, 빨간색 4가지.

∴ $2\times 3\cdot 4 = 24$

ii) 5자루가 3가지 색인 경우

① (1,1,3)

검	파	빨
1	1	3
1	3	1

2가지

검1, 파1, 빨3인 경우

검은색 2가지, 파란색 2가지, 빨간색 4가지.

∴ $2\times 2\cdot 2\cdot 4 = 32$

② (1,2,2)

검	파	빨
1	2	2

1가지

검은색 2가지, 파란색 3가지. 빨간색 3가지.

∴ $1\times 2\cdot 3\cdot 3 = 18$

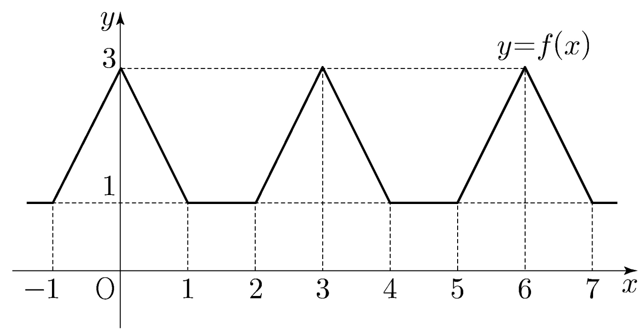
∴ $40+24+32+18 = 114$

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0\le x<3$일 때 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right| = \lim\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}\right|\left|\frac{2^{x+h}-2^x}{h}\right|$$

$$= \left|\lim_{t\to x+} f'(2^t)\cdot 2^x\ln 2\right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5,5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$(n은 자연수)라 할 때, $n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. [4점]



위의 식이 이해가 안 되신다면 : $f(2^x)=h(x)$라 하면

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{h(x+h)-h(x)}{h}\right| = \left|\lim_{t\to x+}h'(t)\right| = \left|\underbrace{\lim_{t\to x+}f'(2^t)}_{f(t)\text{의 } t=2^x\text{에서의 우미분계수.}}\cdot 2^t\cdot\ln 2\right| = \left|2^x\ln 2\cdot\lim_{t\to x+}f'(2^t)\right|$$

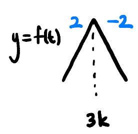
$$= 2^x\ln 2\left|\lim_{t\to x+}f'(2^t)\right|$$

$g(x)=2^x\ln 2\left|\lim_{t\to x+}f'(2^t)\right|$는 $f'(2^x)$가 존재하면 모두 연속입니다.

즉, $f'(2^x)$가 존재하지 않는 점에 대해 조사하면 됩니다.

$2^x=t$라 하면 $f'(t)$가 존재하지 않는 t는 크게 3가지로 분류됩니다.

i) $t=3k$일 때 (k는 정수)



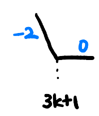
$\lim_{t\to 3k+}f'(t)=-2$ 입니다. 절댓값이 2로 같으므로

$\lim_{t\to 3k-}f'(t)=2$

$\left|\lim_{t\to x+}f'(2^t)\right|$의 값은 $x=3k$ 좌우에서 2로 같습니다.

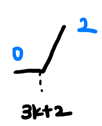
$g(x)$는 $t=2^x=3k$일 때 연속입니다.

ii) $t=3k+1$



좌우 극한의 절댓값이 다릅니다.

iii) $t=3k+2$



역시 좌우 극한의 절댓값이 다릅니다.

따라서 $g(x)$는 $t=2^x=3k+1,\ 3k+2$면 불연속입니다.

$-5<x<5$인 x에 대해 $2^x=3k+1$ or $3k+2$인 값을 찾으면,

$\frac{1}{32}<2^x<32.$ $\quad 2^x = 1,4,7,\cdots,28,31.$ → 11개
$\quad 2,5,8,\cdots,29.$ → 10개. → $n=21$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2} = \sum_{k=1}^{n}2^{a_k}\left|\lim_{t\to a_k+}f'(2^t)\right| = (2+5+8+\cdots+29)\times 2 = 310$$

($x=2^{a_k}$가 $3k+1$이면 $f(x)$의 우미분계수가 0
$3k+2$이면 〃 2)

∴ $21+310=331$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.