01

[풀이]

지수법칙에 의하여

$\sqrt[3]{8}\times 4^{\frac{3}{2}}=2\times 2^{2\times\frac{3}{2}}=2^{1+3}=2^4=16$

답 ⑤

02

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+12n}-3n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n}{\sqrt{9n^2+12n}+3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{\sqrt{9+\frac{12}{n}}+3}=\frac{12}{3+3}=2$

답 ②

03

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(>0)$로 두자.

주어진 등식을 정리하면

$r^2=r+6$, $r^2-r-6=0$,

$(r-3)(r+2)=0$, $r=3(\because r>0)$

$\therefore\ a_4=r^3=27$

답 ④

04

[풀이]

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{6!}{3!2!}=60$

답 ③

05

[풀이]

수열 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$의 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\times\frac{1}{n}=0\times 0=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2a_n^2+3n^2}{a_n^2+n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2}+2\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+3}{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+1}$

$=\frac{0+2\times 0+3}{0+1}=3$

답 ①

06

[풀이]

세 점

$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ \log_4 a)$, $\mathrm{B}(3,\ \log_2 b)$

가 한 직선 위에 있으므로

(직선 OA의 기울기)=(직선 AB의 기울기)

즉, $\frac{\log_4 a}{2}=\frac{\log_2 b-\log_4 a}{3-2}$

정리하면

$\log_4 a=2\log_2 b-2\log_4 a$,

$3\log_4 a=2\log_2 b$, $\frac{3}{2}\log_2 a=2\log_2 b$

$(\because \log_4 a=\frac{\log_2 a}{\log_2 4}=\frac{\log_2 a}{2})$

$\therefore\ \log_a b=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

답 ③

07

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$\left|\frac{x}{4}\right|<1$인 경우:

$f(x)=\frac{2\times0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$ (○)

$\left|\frac{x}{4}\right|=1$인 경우:

$f(x)=\frac{2\times1-1}{1+3}=\frac{1}{4}(x=4)$ (×)

$f(x)=\frac{2\times(-1)-1}{1+3}=-\frac{3}{4}(x=-4)$ (×)

$\left|\frac{x}{4}\right|>1$인 경우:

$\left|\frac{4}{x}\right|<1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{x}{4}-\left(\frac{4}{x}\right)^{2n}}{1+3\times\left(\frac{4}{x}\right)^{2n}}=\frac{2\times\frac{x}{4}-0}{1+3\times0}=\frac{x}{2}\ (\times)$$

이때, $\frac{x}{2}\neq-\frac{1}{3}$이다. 왜냐하면 $x\neq-\frac{2}{3}$이기 때문이다.

이상에서

$f(k)=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \left|\frac{k}{4}\right|<1$, 즉 $|k|<4$

즉, 정수 k는 0, ±1, ±2, ±3이다. (총7개)

답 ②

08

[풀이1]

1학년 학생 2명을 1명으로 생각하고, 2학년 학생 2명을 1명으로 생각하여 5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{5}=4!=24$

이 각각에 대하여 1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이 각각에 대하여 2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

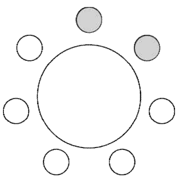
따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2\times2=96$

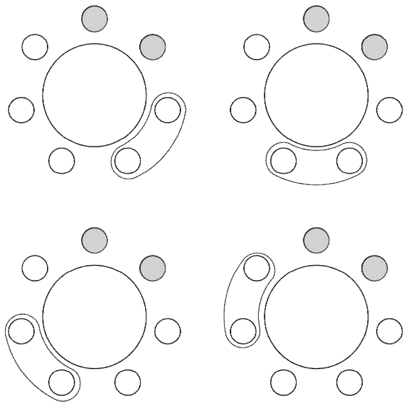
답 ①

[풀이2]

아래 그림처럼 1학년 학생 2명이 앉을 자리를 선택하자.



이제 2학년 학생 2명이 앉을 자리를 선택하면 아래 그림처럼 4가지의 경우가 가능하다.



따라서 구하는 경우의 수는

$4\times2!\times2!\times3!=96$

이때, 2!은 1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수, 2!은 2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수, 3!은 3학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수이다.

답 ①

09

[풀이]

$2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$의 밑은 1보다 작은 양수이므로

함수 $f(x)$는 감소한다.

최댓값: $f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}k=-4$ …㉠

최솟값: $f(12)=2\log_{\frac{1}{2}}(12+k)=m$

⋯㉡

㉠: $\log_{\frac{1}{2}} k = -2$, $k=4$

이를 ㉡에 대입하면

$m = 2\log_{\frac{1}{2}}(12+4) = 2\log_{2^{-1}} 2^4 = 2\times(-4) = -8$

$\therefore\ k+m=-4$

답 ④

10

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x) = \frac{a-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}\quad (x \neq 0)$$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{a-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$$

($\because x\to 0$일 때,

'분수' 가 $f(0)$에 수렴하고, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$=a-4\to 0$, 즉 $a=4$)

$$= \lim_{x\to 0} 4\times\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}x}{\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2}\times\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^2\times\frac{\frac{\pi^2}{4}}{4}$$

$$= 4\times\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\therefore\ a\times f(0) = 4\times\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}$$

답 ⑤

[풀이2]

함수의 극한의 근사적인 계산을 하면 문제를 빠르게 해결할 수 있다.

문제에서 주어진 항등식에 $x=0$을 대입하면

$0\times f(0) = a-4$, 즉 $a=4$

$x\to 0$일 때, $e^{2x}\approx 2x$,

$$4-4\cos\frac{\pi}{2}x \approx 4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}x^2$$

이므로

$$x\to 0\text{일 때, } f(x)\approx\frac{\frac{\pi^2}{2}x^2}{(2x)^2}\approx\frac{\pi^2}{8},\ \text{즉 } f(0)=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\therefore\ a\times f(0) = 4\times\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}$$

답 ⑤

11

[풀이1]

함수 $g(x)$의 도함수는 몫의 미분법에 의하여

$$g'(x) = \frac{f'(x)(e^x+1)-f(x)2e^x}{(e^x+1)^3}$$

이므로

$$\therefore\ g'(0) = \frac{2\{f'(0)-f(0)\}}{8} = \frac{2\times 2}{8} = \frac{1}{2}$$

답 ③

[풀이2]

문제에서 주어진 등식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln|g(x)| = \ln|f(x)| - 2\ln(e^x+1)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{2e^x}{e^x+1}$$

이므로

$$\frac{g'(0)}{g(0)} = \frac{f'(0)-f(0)}{f(0)}$$

양변에 $g(0)\left(=\frac{f(0)}{4}\right)$을 곱하면

$$\therefore\ g'(0) = \frac{f'(0)-f(0)}{4} = \frac{1}{2}$$

답 ③

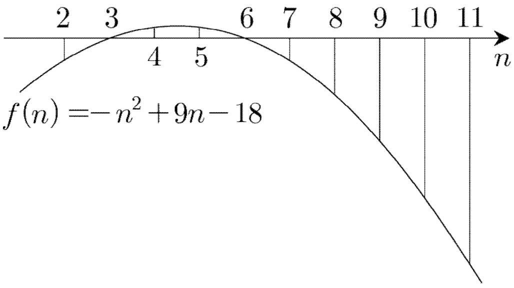
12

[풀이]

함수

$f(n) = -n^2+9n-18(=-(n-3)(n-6))$

의 그래프는 아래 그림과 같다.



$f(n)$의 n제곱근을 표로 정리하면 다음과 같다.

	$f(n)>0$	$f(n)=0$	$f(n)<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{f(n)}$	0	$\sqrt[n]{f(n)}$ (음수)
n이 짝수	$\pm\sqrt[n]{f(n)}$	0	×

위의 표에서 $f(n)$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하는 경우는 다음과 같다.

n이 홀수이고 $f(n)<0$인 경우: $n=7,\ 9,\ 11$

n이 짝수이고 $f(n)>0$인 경우: $n=4$

따라서 구하는 값은

$4+7+9+11=31$

답 ①

[참고]

$n=4$: $f(4)=2$이므로

$f(4)$의 4제곱근은 $\sqrt[4]{2}$, $-\sqrt[4]{2}\,(<0)$이다.

$n=7$: $f(7)=-4$이므로

$f(7)$의 7제곱근은 $\sqrt[7]{-4}=-\sqrt[7]{4}\,(<0)$이다.

13

[풀이1]

$|a-3|+|b-3|=2$일 사건을 A,

$a=b$일 사건을 B라고 하자.

우선 사건 A가 일어날 확률을 구하자.

$|a-3|\ge 0$, $|b-3|\ge 0$이고,

$2=2+0=1+1=0+2$이므로

아래의 표를 얻는다.

	a	b	순서쌍 $(a,\ b)$의 개수
$\lvert a-3\rvert=0$, $\lvert b-3\rvert=2$	3	1, 5	$1\times2=2$
$\lvert a-3\rvert=1$, $\lvert b-3\rvert=1$	2, 4	2, 4	$2\times2=4$
$\lvert a-3\rvert=2$, $\lvert b-3\rvert=0$	1, 5	3	$2\times1=2$

합의 법칙에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{8}{36}$

사건 B가 일어날 확률을 구하자.

$a=b$인 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 6이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{6}{36}$

사건 $A\cap B$가 일어날 확률은 위의 표에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{36}$

이다. 이때, $A\cap B=\{(2,\ 2),\ (4,\ 4)\}$

확률의 덧셈정리에 의하여

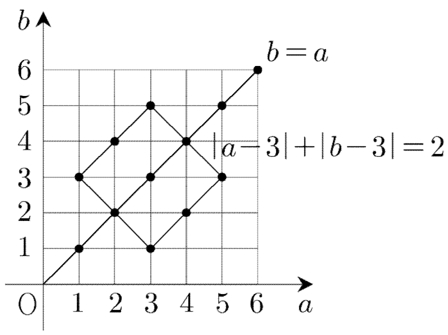
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{8}{36}+\dfrac{6}{36}-\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{3}$

답 ②

[풀이2]

좌표평면에 도형 $|a-3|+|b-3|=2$와 직선 $b=a$를 함께 그리면 아래 그림과 같다.



위의 그림에서 구하는 확률은

$\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

답 ②

14

[풀이]

문제에서 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D/4=(-\sin\theta)^2-(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5)\ge 0$

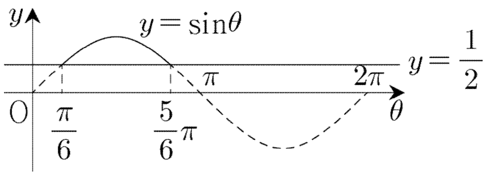
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$으로 두고 좌변을 정리하면

$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2\le 0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)\le 0$

양변을 음수 $\sin\theta-2(\le -1)$로 나누면

$2\sin\theta-1\ge 0$, 즉 $\sin\theta\ge\frac{1}{2}$



위의 그림에서

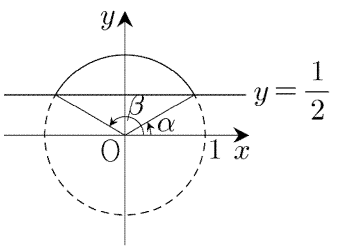
$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore\ 4\beta-2\alpha=3\pi$

답 ①

[참고]

단위원을 이용하여 부등식 $\sin\theta\ge\frac{1}{2}$을 풀 수도 있다.



위의 그림에서

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

15

[풀이]

〈증명〉

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1=(2^2-1)2^0+0=3$,

(우변)$=2^2-2\times 2^{-1}=3$

이므로 (*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$$

$$=\underbrace{2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}}_{\sum_{k=1}^{m}a_k}$$

$$+\underbrace{(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times 2^{-m-1}}_{a_{m+1}}$$

($\because$ $a_n=(2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)}+(n-1)\times 2^{-n}$

에서 n의 자리에 $m+1$을 대입한 것이다.)

$$2^{m(m+1)}(1+2^{2m+2}-1)-\left(m+1-\frac{m}{2}\right)2^{-m}$$

$$=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$

$$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$$

이다.

(가): $f(m)=2^{m(m+1)}$

(나): $g(m)=2^{2m+2}$

$\therefore\ \frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

답 ④

16

[풀이]

$y=e^{\frac{x}{2}+3t}=e^{\frac{x-(-6t)}{2}}$ $\cdots$(*)

이므로 함수 $y=e^{\frac{x}{2}}$의 그래프를 x축의 방향으로

$-6t$만큼 평행이동시키면 함수 (*)의 그래프와 일치한다.

문제에서 주어진 그림에서

$\overline{\mathrm{QR}}=6t$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=6t$

$$\overline{\mathrm{PQ}}=e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}=6t$$

즉, $e^{\frac{f(t)}{2}+3t}-e^{\frac{f(t)}{2}}=6t$

정리하면

$$e^{\frac{f(t)}{2}}(e^{3t}-1)=6t,\ f(t)=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$$

함수의 극한의 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{t\to0+}f(t)$$

$$=\lim_{t\to0+}2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$$

$$=\lim_{t\to0+}2\ln\frac{2}{\frac{e^{3t}-1}{3t}}=2\times\ln\frac{2}{1}=\ln4$$

답 ③

17

[풀이]

전체를 다음의 두 경우로 구분할 수 있다.

(경우1) 4와 5가 이웃한 경우

○45○, ○, ○, ○ 또는 ○54○, ○, ○, ○

(경우2) 4와 5가 이웃하지 않을 경우

○4○, ○5○, ○

(경우1)

$$2\times(\underbrace{{}_2\mathrm{P}_1}_{○4}\times\underbrace{{}_3\mathrm{P}_1}_{5○})\times4!=12\times24$$

이때, 좌변에서 각각의 경우의 수는 다음과 같다.

2: ○45○ 또는 ○54○일 경우의 수

${}_2\mathrm{P}_1$: ○4에서 ○에 들어갈 수를 결정하는 경우의 수

${}_3\mathrm{P}_1$: 5○에서 ○에 들어갈 수를 결정하는 경우의 수

4!: 예를 들어 7452일 때, 1, 3, 6, (7452)을 일렬로 나열하는 경우의 수

(경우2)

마찬가지의 방법으로

$$(\underbrace{{}_2\mathrm{P}_2}_{○4○}\times\underbrace{{}_3\mathrm{P}_2}_{○5○})\times3!=12\times6$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12\times24+12\times6}{7!}$$

$$=\frac{15\times24}{(3\times5)\times(6\times4)\times14}=\frac{1}{14}$$

답 ②

[참고]

(경우2)를 다음과 같이 두 경우로 다시 구분할 수도 있다.

○4○○5○, ○ (또는 ○5○○4○, ○) …㉠

○4○○○5○ (또는 ○5○○○4○) …㉡

㉠:

$$2\times(\underbrace{{}_2\mathrm{P}_2}_{○4○}\times\underbrace{{}_3\mathrm{P}_2}_{○5○})\times2!=48$$

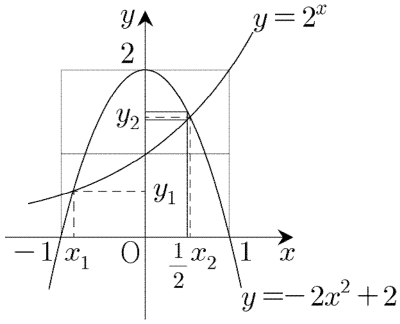
㉡:

$$2\times(\underbrace{{}_2\mathrm{P}_2}_{○4○}\times\underbrace{{}_3\mathrm{P}_2}_{○5○})=24$$

18

[풀이]

ㄱ. (참)



$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}<1.5=-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2$$

(이때, $\sqrt{2}\approx1.4$임을 이용해도 좋고,

$\left(\frac{3}{2}\right)^2-(\sqrt{2})^2=\frac{1}{4}>0$임을 보여도 좋다.)

이므로 위의 그림에서

$$\therefore\ x_2>\frac{1}{2}$$

ㄴ. (참)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2x_2^2+2-(-2x_1^2+2)}{x_2-x_1}$$

($\because$ 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는 곡선 $y=-2x^2+2$ 위에 있다.)

$$=\frac{-2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}$$

$=-2(x_1+x_2)$ …㉠

한편 보기 ㄱ의 그림에서

$-1<x_1<0$, $\frac{1}{2}<x_2<1$ …(*)

위의 두 부등식을 변변히 더하면

$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<1$

양변에 -2를 곱하면

$-2<-2(x_1+x_2)<1$ …㉡

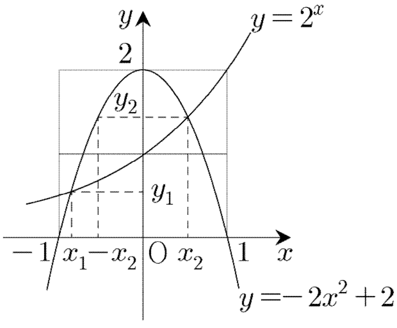
㉠, ㉡에서

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$

양변에 양수 x_2-x_1을 곱하면

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. (참)



문제에서 주어진 이차함수는 y축에 대하여 대칭이므로

위의 그림처럼

$x_1<-x_2$, 즉 $x_1+x_2<0$ …㉢

보기 ㄴ의 (*)에 의하여

$\frac{1}{2}<y_1=2^{x_1}$, $\sqrt{2}<y_2=2^{x_2}$

위의 두 부등식을 변변히 곱하면

$\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2$

그리고 ㉢에 의하여

$y_1y_2=2^{x_1+x_2}<1$

$\therefore\ \frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

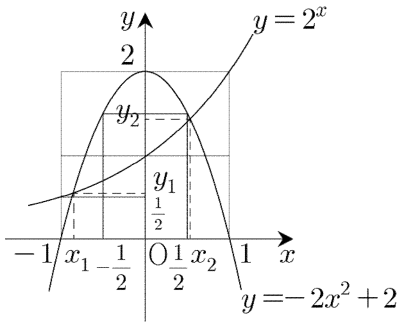
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고1]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

ㄴ. (참)



위의 그림에서

$x_1<-\frac{1}{2}$, $x_2>\frac{1}{2}$이므로 $x_2-x_1>1$

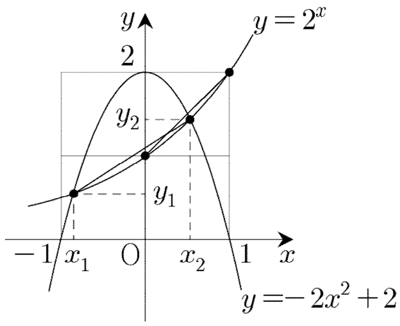
$\frac{1}{2}<y_1$, $y_2<\frac{3}{2}$이므로 $y_2-y_1<1$

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

[참고2]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

ㄴ. (참)



곡선 $y=2^x$은 아래로 볼록이므로

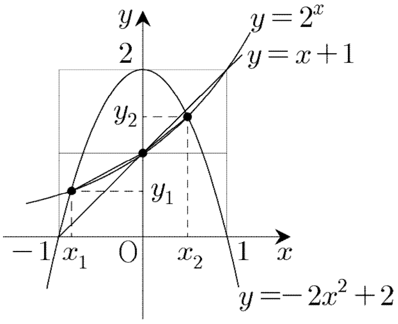
위의 그림처럼

(두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기)

<(두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$를 잇는 직선의 기울기)

즉, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$ $\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

[참고3]
보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.
ㄴ. (참)



위의 그림에서
(두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(0,\ 1)$을 잇는 직선의 기울기)<1

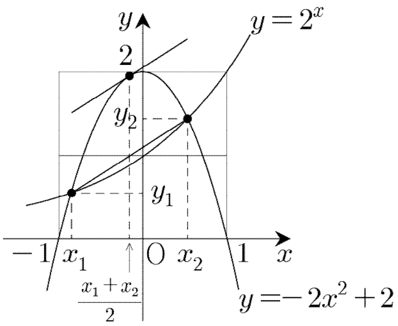
즉, $\dfrac{y_1-1}{x_1}<1$, $y_1-1>x_1(\because x_1<0)$ …ⓔ

(두 점 $(0,\ 1)$, $(x_2,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기)<1

즉, $\dfrac{y_2-1}{x_2}<1$, $y_2-1<x_2$ …ⓜ

ⓔ+ⓜ: $x_1+y_2-1<x_2+y_1-1$
정리하면
$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

[참고4]
보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.
ㄴ. (참)



평균값의 정리에 의하여

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-4\times\frac{x_1+x_2}{2}=-2(x_1+x_2)<1$$

$(\because -1<x_1<-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<x_2<1$에서

$-\dfrac{1}{2}<x_1+x_2<\dfrac{1}{2},\ -1<-2(x_1+x_2)<1)$

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

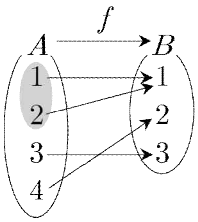
19

[풀이1]
문제에서 주어진 조건의 부정은 다음과 같다.
'$f(1)=1$이고 함수 f의 치역은 B가 아니다.'
이때, 함수 f의 치역은
$\{1\}$ 또는 $\{1,\ 2\}$ 또는 $\{1,\ 3\}$
각각의 집합을 치역으로 갖는 함수 f의 개수를 구해 보자.
함수 f의 치역이
$\{1\}$인 경우: 1개
$\{1,\ 2\}$인 경우: ${}_2\Pi_3-1=2^3-1=7$개
이때, ${}_2\Pi_3$은 $\{2,\ 3,\ 4\}$에서 $\{1,\ 2\}$로의 함수의 개수이고, 1은 $f(2)=f(3)=f(4)=1$인 함수의 개수이다.
$\{1,\ 3\}$인 경우: ${}_2\Pi_3-1=2^3-1=7$개
따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{1+7+7}{{}_3\Pi_4}=\frac{22}{27}$$

답 ④

[풀이2]
$f(1)\geq 2(\Leftrightarrow f(1)=2$ 또는 $f(1)=3\Leftrightarrow f(1)\neq 1)$
일 사건을 C,
함수 f의 치역이 B일 사건을 D라고 하자.
(1) $n(C)$의 값을 구하자.
$f(1)=2$: ${}_3\Pi_3=3^3=27$
이때, ${}_3\Pi_3$은 $\{2,\ 3,\ 4\}$에서 $\{1,\ 2,\ 3\}$으로의 함수의 개수이다.
$f(1)=3$: ${}_3\Pi_3=3^3=27$
이때, ${}_3\Pi_3$은 $\{2,\ 3,\ 4\}$에서 $\{1,\ 2,\ 3\}$으로의 함수의 개수이다.
$\therefore\ n(C)=27+27=54$
(2) $n(D)$의 값을 구하자.
예를 들어 아래의 함수 f는 치역이 B이다.



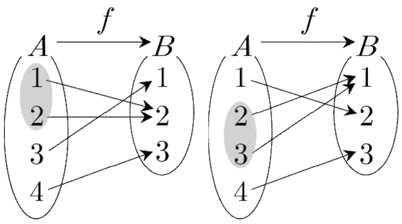
$\therefore\ n(D)={}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2\times 2!=36$

이때, ${}_3\mathrm{C}_1$은 A의 두 원소에 대응되는 B의 한 원소를 선택할 경우의 수, ${}_4\mathrm{C}_2$는 B의 한 원소에 대응되는 A의 두 원소를 선택할 경우의 수, $2!$은 A의 나머지 두 원소에 B의 원소를 각각 하나씩 대응시키는 경우의 수이다.

(3) $n(C\cap D)$의 값을 구하자.

$f(1)=2$이고 함수 f의 치역은 B:

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



왼쪽은 B의 원소 2에 A의 원소가 두 개 대응되는 경우이고,

오른쪽은 B의 원소 2에 A의 원소가 한 개 대응되는 경우이다.

경우의 수는 $\underbrace{3\times 2!}_{\text{전자}}+\underbrace{{}_3\mathrm{C}_2\times 2}_{\text{후자}}=12$

이때, 3은 B의 원소 2에 대응되는 A의 1이 아닌 한 원소를 선택할 경우의 수, $2!$은 A의 나머지 두 원소에 B의 원소를 각각 하나씩 대응시키는 경우의 수이다. 그리고 ${}_3\mathrm{C}_2$는 B의 2가 아닌 한 원소에 대응되는 A의 두 원소를 선택할 경우의 수, 2는 A의 두 원소에 대응되는 B의 한 원소를 선택할 경우의 수이다.

$f(1)=3$이고 함수 f의 치역은 B:

마찬가지의 방법으로

경우의 수는 $3\times 2!+{}_3\mathrm{C}_2\times 2=12$

$\therefore\ n(C\cap D)=12+12=24$

(1), (2), (3)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{54+36-24}{{}_3\Pi_4}=\frac{66}{81}=\frac{22}{27}$$

답 ④

[참고]

$n(C)$의 값을 다음과 같이 구해도 좋다.

$f(1)=1$: ${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때, ${}_3\Pi_3$은 집합 $\{2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$으로의 함수의 개수이다.

$\therefore\ n(C)={}_3\Pi_4-{}_3\Pi_3=3^4-3^3=54$

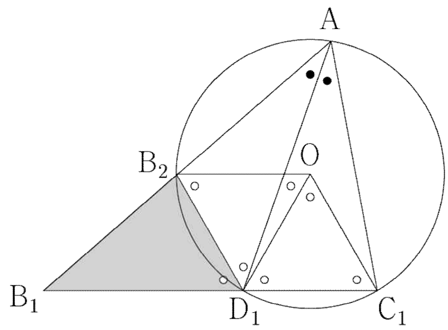
이때, ${}_3\Pi_4$은 A에서 B로의 함수 f의 개수이다.

20

[풀이]

그림 R_1에서 그려진 원의 중심을 O라고 하자.

R_1



(단, $\circ=60^\circ$, $\bullet=30^\circ$)

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle \mathrm{C_1OD_1}=60^\circ\ (=2\angle \mathrm{C_1AD_1})$,

$\angle \mathrm{D_1OB_2}=60^\circ\ (=2\angle \mathrm{D_1AB_2})$

원의 정의와 이등변삼각형의 성질에 의하여

두 삼각형 $\mathrm{OD_1C_1}$, $\mathrm{OB_2D_1}$은 서로 합동인 정삼각형이다.

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\sqrt{3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos60^\circ}=\sqrt{7}$

그런데

$\overline{\mathrm{AB_1}}:\overline{\mathrm{AC_1}}=\overline{\mathrm{B_1D_1}}:\overline{\mathrm{D_1C_1}}=3:2$

이므로

$\overline{\mathrm{B_1D_1}}=\dfrac{3}{5}\sqrt{7}$, $\overline{\mathrm{D_1C_1}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{7}$

이제 S_1의 값을 구하면

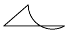
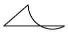
$$S_1=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{B_1D_1}}\,\overline{\mathrm{D_1B_2}}\sin60^\circ=\frac{21\sqrt{3}}{50}$$

한편 할선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{B_1D_1}}\times\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\overline{\mathrm{B_1B_2}}\times\overline{\mathrm{B_1A}}$, 즉

$\frac{3}{5}\sqrt{7}\times\sqrt{7}=\overline{\mathrm{B_1B_2}}\times 3$, $\overline{\mathrm{B_1B_2}}=\frac{7}{5}$

이때, $\overline{\mathrm{B_2A}}=\frac{8}{5}$이므로 $\overline{\mathrm{B_1A}}:\overline{\mathrm{B_2A}}=15:8$

그러므로 그림 R_1의  모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 넓이의 비는 $1:\left(\frac{8}{15}\right)^2$이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\left(\frac{8}{15}\right)^2}=\frac{27\sqrt{3}}{46}$$

답 ①

[참고]

선분 $\mathrm{B_1B_2}$의 길이는 다음과 같이 구해도 좋다.

코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{B_1B_2}}^2=\overline{\mathrm{B_1D_1}}^2+\overline{\mathrm{D_1B_2}}^2-\overline{\mathrm{B_1D_1}}\,\overline{\mathrm{D_1B_2}}\cos 60^\circ$$

$$=\left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-2\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\frac{2\sqrt{7}}{5}\frac{1}{2}$$

$$=\frac{49}{25}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{B_1B_2}}=\frac{7}{5}$$

21

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$$a_n=\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{n+1}{n+2}\right)$$

로그의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_m$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{3}{4}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{m+1}{m+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(2^m\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{m}{m+1}\times\frac{m+1}{m+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}=k\ (\text{단, } k\text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수})$$

로그의 정의에 의하여

$$\frac{2^{m+1}}{m+2}=2^{2k},\ \text{즉}\ 2^{m+1-2k}=m+2 \qquad \cdots(*)$$

(*)의 좌변이 짝수이므로 우변도 짝수이다. 즉, m은 짝수이다.

(*)의 좌변의 $\underbrace{m+1}_{\text{홀수}}-\underbrace{2k}_{\text{짝수}}$는 홀수이다.

$m+2$가 가질 수 있는 값은 2^3, 2^5, 2^7, $\cdots$이다.

이제 다음과 같은 표를 얻는다.

$m+2$	m	k
2^3	6	2
2^5	30	13
2^7	126	60
2^9	510	251 (>100)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

따라서 구하는 값은

$6+30+126=162$

답 ④

[풀이2]

로그의 성질에 의하여

$$a_n=\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{n+1}{n+2}\right)$$

로그의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_m$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{3}{4}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{m+1}{m+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(2^m\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{m}{m+1}\times\frac{m+1}{m+2}\right)$$

$$=\frac{\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}}{2}$$

$$=\frac{\boxed{m+1-\log_2(m+2)}}{2} \qquad \cdots(*)$$

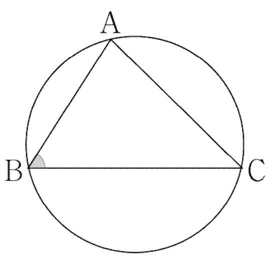
$=(100$ 이하의 자연수$)$

위의 분수의 분자는 200 이하의 짝수이다.
그런데 $m+1$이 자연수이므로 $\log_2(m+2)$는 정수이다.
이제 $\log_2(m+2)=p$(단, p는 정수)로 두자.
$m=2^p-2$를 (*)에 대입하면
$(*)=\dfrac{2^p-1-p}{2}$
(*)의 분자는 양의 짝수여야 하므로
p는 3 이상의 홀수이다.
$p=3$: $(*)=2$, $m=6$
$p=5$: $(*)=13$, $m=30$
$p=7$: $(*)=60$, $m=126$
$p=9$: $(*)=251(>100)$
따라서 구하는 값은
$6+30+126=162$
답 ④

22

[풀이]
$(1+2x)^4$의 전개식에서 각 항은
${}_4C_r(2x)^r={}_4C_r 2^r x^r$
의 꼴로 나타낼 수 있으므로
$x^2=x^r$에서 $x=2$
따라서 x^2의 계수는 ${}_4C_2 2^2=24$
답 24

23

[풀이]


사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$
$\therefore\ \overline{AC}=2\times15\times\dfrac{7}{10}=21$
답 21

24

[풀이]
문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여
$a_3=a_2-a_1=3-9=-6$,
$a_4=a_3-a_2=-6-3=-9$,
$\vdots$
수열 $\{a_n\}$을 나열하면
$9(a_1)$, 3, -6, -9, -3, 6, $9(a_7)$, 3, $\cdots$
즉, 9, 3, -6, -9, -3, 6가 반복적으로 나타난다.
$|a_k|=3 \Leftrightarrow a_k=3$ 또는 $a_k=-3$
$a_k=3$: $k=2$, 8, 14, $\cdots$, $98(=6\times16+2)$
$a_k=-3$: $k=5$, 11, 17, $\cdots$, $95(=6\times15+5)$
따라서 자연수 k의 개수는 $17+16=33$이다.
답 33

25

[풀이]
문제에서 주어진 등식에 $x=a$, $y=0$을 대입하면
$a^3-0=1$, 즉 $a^3=1$, $a=1$
음함수의 미분법에 의하여
$3x^2-3y^2y'=e^{xy}(y+xy')$
위의 등식에 $x=1$, $y=0$을 대입하여 정리하면
$y'=3$, 즉 $b=3$
$\therefore\ a+b=4$
답 4

26

[풀이1]
합과 일반항의 관계에 의하여
$S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}$
$=2a_1+(2k+1)\times2=-12-(-16)=4$
즉, $a_1+2k=1$ $\cdots㉠$

등차수열의 합의 공식에 의하여

$S_k = \dfrac{2a_1 + (k-1)\times 2}{2} \times k = -16$

즉, $\dfrac{2(1-2k)+2(k-1)}{2} \times k = -16 (\because ㉠)$

정리하면

$k^2 = 16,\ k = 4\ (\because k > 0)$

이를 ㉠에 대입하면 $a_1 = -7$

$\therefore\ a_{2k} = a_8 = a_1 + 7\times 2 = -7 + 14 = 7$

답 7

[풀이2]

등차수열의 합의 공식에 의하여

$S_k = \dfrac{2a_1 + (k-1)\times 2}{2} \times k = -16,$

$S_{k+2} = \dfrac{2a_1 + (k+1)\times 2}{2} \times (k+2) = -12$

위의 두 식을 변형하면

$2a_1 + 2(k-1) = -\dfrac{32}{k},$

$2a_1 + 2(k+1) = -\dfrac{24}{k+2}$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$-4 = -\dfrac{32}{k} + \dfrac{24}{k+2}$

정리하면

$k^2 = 16,\ k = 4\ (\because k > 0)$

$S_4 = \dfrac{2a_1 + 6}{2} \times 4 = -16$에서 $a_1 = -7$

$\therefore\ a_{2k} = a_8 = a_1 + 7\times 2 = -7 + 14 = 7$

답 7

[풀이3]

합과 일반항의 관계에 의하여

$S_{k+2} - S_k = a_{k+1} + a_{k+2}$

$= a_k + d + a_k + 2d = 2a_k + 3d = 4$

$d = 2$이므로 $a_k = -1$

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$-7,\ -5,\ -3,\ -1(a_k = a_4),\ 1,$

$3(a_{k+2} = a_6),\ 5,\ 7(a_{2k} = a_8),\ \cdots$

$\therefore\ k = 4,\ a_{2k} = a_8 = 7$

답 7

[풀이4]

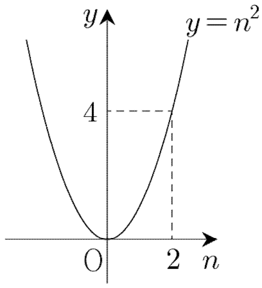
등차수열의 합의 공식에 의하여

$S_n = \dfrac{\{2a_1 + (n-1)\times 2\}}{2} \times n$

$= n^2 + (a_1 - 1)n$ (즉, 이차함수)

$= \left(n + \dfrac{a_1 - 1}{2}\right)^2 - \dfrac{(a_1-1)^2}{4} \qquad \cdots(*)$

함수 $y = n^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{a_1 - 1}{2}$만큼 평행이동하면 함수 $y = S_n$의 그래프와 일치한다.



그런데 $S_{k+2} - S_k = 4$이므로

$(k,\ S_k)$는 $(*)$의 꼭짓점이다.

$k = -\dfrac{a_1 - 1}{2},\ -\dfrac{(a_1-1)^2}{4} = -16$

연립하면

$a_1 = -7,\ k = 4$

$\therefore\ a_{2k} = a_8 = a_1 + 7\times 2 = -7 + 14 = 7$

답 7

27

[풀이]

꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 사건을 A,

꺼낸 공에 검은 공이 2개 있을 사건을 B라고 하자.

- 우선 $n(A)$의 값을 구하자.

③, ❸을 꺼낼 경우의 수: ${}_6C_2$

왜냐하면 ①, ②, ④, ❶, ❷, ❹ 중에서 서로 다른 2개를 꺼낼 경우의 수이기 때문이다.

④, ❹를 꺼낼 경우의 수: ${}_6C_2$

왜냐하면 ①, ②, ③, ❶, ❷, ❸ 중에서 서로 다른 2개를 꺼낼 경우의 수이기 때문이다.

③, ❸, ④, ❹를 꺼낼 경우의 수: 1

이상에서

$n(A)={}_6C_2+{}_6C_2-1=29$

• 이제 $n(A\cap B)$의 값을 구하자.

③, ❸, ○, ●: ${}_3C_1\times{}_3C_1$

왜냐하면 ①, ②, ④ 중에서 한 개, ❶, ❷, ❹ 중에서 한 개를 꺼낼 경우의 수이기 때문이다.

④, ❹, ○, ●: ${}_3C_1\times{}_3C_1$

왜냐하면 ①, ②, ③ 중에서 한 개, ❶, ❷, ❸ 중에서 한 개를 꺼낼 경우의 수이기 때문이다.

③, ❸, ④, ❹: 1

이상에서

$n(A\cap B)={}_3C_1\times{}_3C_1+{}_3C_1\times{}_3C_1-1=17$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{17}{29}$

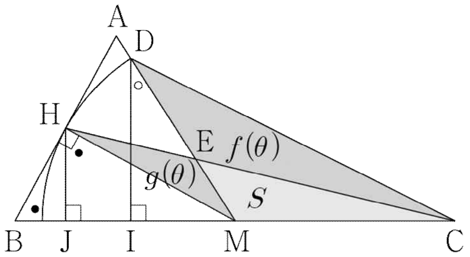
$\therefore\ p+q=46$

답 46

28

[풀이1]

두 점 D, H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 I, J라고 하자. 그리고 삼각형 CEM의 넓이를 S라고 하자.



(단, $\bullet=\theta,\ \circ=\dfrac{\theta}{2}$)

직각삼각형 HBM에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{BH}=\cos\theta,\ \overline{HM}=\sin\theta(=\overline{DM})(\because$ 원의 정의)

직각삼각형 MHJ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{HJ}=\sin\theta\cos\theta$

한편 이등변삼각형 ABM에서

$\angle BMA=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$이므로 $\angle MDI=\dfrac{\theta}{2}$

직각삼각형 MDI에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{DI}=\sin\theta\cos\dfrac{\theta}{2}$

함수 $f(\theta)-g(\theta)$의 방정식을 구하자.

$f(\theta)-g(\theta)$

$=\{f(\theta)+S\}-\{g(\theta)+S\}$

=(△CDM의 넓이)−(△CHM의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\overline{MC}\,\overline{DI}-\dfrac{1}{2}\overline{MC}\,\overline{HJ}$

$=\dfrac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\theta\right)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore\ \displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$

$=\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta}{\theta^2}$

$=\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\left\{\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}-\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\frac{1}{4}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{16}$

$\therefore\ 80a=15$

답 15

[참고1]

$f(\theta)-g(\theta)$의 방정식을 다음과 같이 유도해도 좋다.
(즉, 수선의 발 I, J 없이 삼각형의 넓이를 구한다.)

$\angle HMC=\dfrac{\pi}{2}+\theta,\ \angle DMC=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$

이므로

$f(\theta)-g(\theta)$

$=\{f(\theta)+S\}-\{g(\theta)+S\}$

=(△CDM의 넓이)−(△CHM의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\overline{DM}\,\overline{MC}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right)$

$\quad-\dfrac{1}{2}\overline{HM}\,\overline{MC}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)$$

[참고2]
삼각함수의 반각의 공식을 이용하여 함수의 극한을 계산할 수도 있다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{\cos\frac{\theta}{2}-2\cos^2\frac{\theta}{2}+1}{\theta^2}$$

$(\because \cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{\left(2\cos\frac{\theta}{2}+1\right)\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\times4}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{3\times\frac{1}{2}}{4}=\frac{3}{16}$$

[참고3]
로피탈의 정리를 이용하여 극한값을 계산할 수도 있다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\sin\theta}{2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\left(-\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{16}$$

[참고4]
함수의 극한의 근사적인 계산을 이용해서 극한값을 구해보자.

$\theta\to0$일 때, $\sin\theta\approx\theta$, $1-\cos\theta\approx\frac{1}{2}\theta^2$이므로

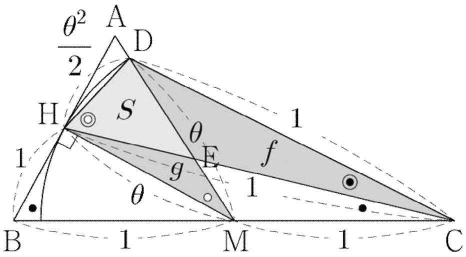
$\theta\to0$일 때,

$$\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{-\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)+(1-\cos\theta)}{\theta^2}$$

$$\approx\frac{1}{2}\times\frac{\theta}{\theta}\times\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\theta^2}{\theta^2}\to\frac{3}{16}$$

[풀이2]
함수의 극한의 근사적 계산을 이용하여 문제를 해결할 수도 있다.



(단, $\bullet=\theta$, $\circ=\frac{\theta}{2}$, $◎=\frac{7}{4}\theta$, $⊙=\frac{7}{8}\theta^3$)

이제부터 $\approx$는 $\theta\to0+$일 때의 근사를 의미한다.

$\overline{\mathrm{BH}}=\cos\theta\approx1$, $\overline{\mathrm{HM}}=\sin\theta\approx\theta$,

$\overline{\mathrm{DM}}\approx\theta$($\because$ 원의 정의),

$\overline{\mathrm{HD}}\approx\overline{\mathrm{HA}}\approx\theta\tan\frac{\theta}{2}\approx\frac{\theta^2}{2}$,

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{5-4\cos\theta}\approx1$,

$\overline{\mathrm{CD}}\approx\sqrt{\theta^2+1-2\theta\sin\frac{\theta}{2}}\approx1$,

$\bullet=\angle\mathrm{MCH}\approx\theta$이므로 $\angle\mathrm{CHM}\approx\frac{\pi}{2}-2\theta$

$\left(\because\ \frac{\overline{\mathrm{CH}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\overline{\mathrm{MH}}}{\sin(\angle\mathrm{MCH})},\right.$

$\left.\frac{1}{1}\approx\frac{\theta}{\angle\mathrm{MCH}}\right)$

$◎=\angle\mathrm{DHE}\approx\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\approx\frac{7}{4}\theta$

$$\frac{\frac{\theta^2}{2}}{\sin\text{◉}} \approx \frac{1}{\sin\text{◎}},\ \frac{\frac{\theta^2}{2}}{\text{◉}} \approx \frac{1}{\frac{7}{4}\theta},\ \text{◉} \approx \frac{7}{8}\theta^3$$

$f(\theta)-g(\theta)$

$=\{f(\theta)+S\}-\{g(\theta)+S\}$

$=$($\triangle$CDH의 넓이)$-$($\triangle$MDH의 넓이)

$\approx \frac{1}{2}\times 1\times 1\times \frac{7}{8}\theta^3-\frac{1}{2}\times\theta\times\theta\times\frac{\theta}{2}$

$\approx \frac{3}{16}\theta^3$, 즉 $\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}\to\frac{3}{16}$

$\therefore\ 80a=15$

답 15

29

[풀이1]

두 학생 중에서 한 학생에게 나누어주는 검은색 볼펜, 파란색 볼펜, 빨간색 볼펜의 수를 각각 a_1, b_1, c_1이라고 하고, 나머지 한 학생에게 나누어주는 검은색 볼펜, 파란색 볼펜, 빨간색 볼펜의 수를 각각 a_2, b_2, c_2라고 하자.

문제에서 주어진 조건에서 다음의 등식과 부등식이 성립한다.

$a_1+a_2\le 1$, $b_1+b_2\le 4$, $c_1+c_2\le 4$

$(a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2)=5$ $\cdots(*)$

(단, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2는 음이 아닌 정수)

(1) $a_1+a_2=0$인 경우

$a_1=a_2=0$

이고,

$b_1+c_1+b_2+c_2=5$

(*)의 해의 개수는 중복조합의 수에 의하여

${}_4H_5-({}_2H_5+{}_2H_5)={}_8C_3-2\times{}_6C_1=44$

이다. 이때, ${}_2H_5$, ${}_2H_5$는 각각 방정식

$b_1+b_2=5(c_1+c_2=0)$,

$c_1+c_2=5(b_1+b_2=0)$

의 해의 개수이다.

(2) $a_1+a_2=1$인 경우

$a_1=1$, $a_2=0$ 또는 $a_1=0$, $a_2=1$

이고,

$b_1+c_1+b_2+c_2=4$

(*)의 해의 개수는 중복조합의 수에 의하여

$2\times{}_4H_4=2\times{}_7C_3=2\times 35=70$

이때, 2를 곱하는 이유는 $(a_1,\ a_2)=(1,\ 0)$ 또는 $(0,\ 1)$이기 때문이다.

(1), (2)에서 구하는 경우의 수는

$44+70=114$

답 114

[풀이2]

5=(검+파+빨)

$=0+4+1$: ${}_2H_4\times{}_2H_1={}_5C_1\times{}_2C_1=10$ $\cdots$㉠

$=0+3+2$: ${}_2H_3\times{}_2H_2={}_4C_1\times{}_3C_1=12$

$=0+2+3$: 12

$=0+1+4$: 10

$=1+4+0$: ${}_2H_1\times{}_2H_4={}_2C_1\times{}_5C_1=10$

$=1+3+1$: ${}_2H_1\times{}_2H_3\times{}_2H_1={}_2C_1\times{}_4C_1\times{}_2C_1=16$

$=1+2+2$: ${}_2H_1\times{}_2H_2\times{}_2H_2={}_2C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1=18$

$=1+1+3$: 16

$=1+0+4$: 10

예를 들어 ㉠의 경우

(2명의 학생에게 파란색 볼펜 4자루를 나누어 주는 경우의 수)

×(2명의 학생에게 빨간색 볼펜 1자루를 나누어 주는 경우의 수)

로 계산한 것이다.

나머지 경우들도 마찬가지의 방법을 따라서 계산한 것이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$2(10+12)+2(10+16)+18=114$

답 114

30

[풀이1]

함수 $g(x)$의 방정식을 변형하면

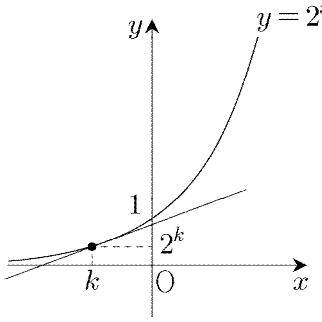
$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}\times\frac{2^{x+h}-2^x}{h}\right|$$

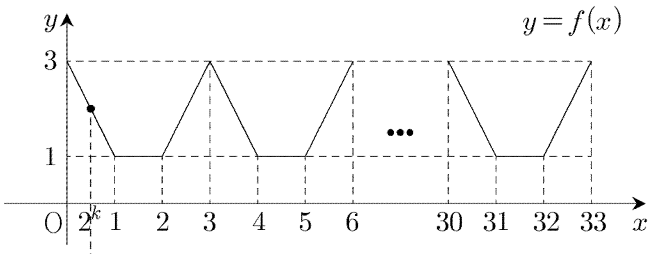
이때,

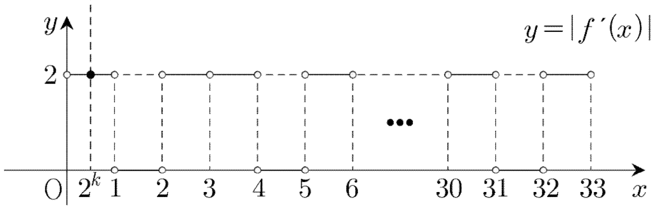
$\dfrac{2^{x+h}-2^{x}}{h}=$(함수 $y=2^{x}$의 $x=x$에서의 우미분계수),

$\dfrac{f(2^{x+h})-f(2^{x})}{2^{x+h}-2^{x}}=$(함수 $y=f(x)$의 $x=2^{x}$에서의 우미분계수)

세 함수 $y=2^{x}$, $y=f(x)$, $y=|f'(x)|$의 그래프는 다음과 같다.







$x=k$일 때의 함수 $g(x)$의 함숫값에 대하여 생각하자. 즉,

$$g(k)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{k+h})-f(2^{k})}{2^{k+h}-2^{k}}\times\frac{2^{k+h}-2^{k}}{h}\right|$$

- $-5\le k<0(\frac{1}{32}\le 2^{k}<1)$일 때,

$h\to 0+$이면

$\dfrac{2^{x+h}-2^{x}}{h}=2^{k}\ln 2$, $\dfrac{f(2^{x+h})-f(2^{x})}{2^{x+h}-2^{x}}=-2$

이므로

$g(k)=|-2\times 2^{k}\ln 2|=2^{k+1}\ln 2$

- $0\le k<1(1\le 2^{k}<2)$일 때,

$h\to 0+$이면

$\dfrac{2^{x+h}-2^{x}}{h}=2^{k}\ln 2$, $\dfrac{f(2^{x+h})-f(2^{x})}{2^{x+h}-2^{x}}=0$

이므로

$g(k)=|0\times 2^{k}\ln 2|=0$

- $1\le k<\log_2 3(2\le 2^{k}<3)$일 때,

$h\to 0+$이면

$\dfrac{2^{x+h}-2^{x}}{h}=2^{k}\ln 2$, $\dfrac{f(2^{x+h})-f(2^{x})}{2^{x+h}-2^{x}}=2$

이므로

$g(k)=|2\times 2^{k}\ln 2|=2^{k+1}\ln 2$

$\vdots$

마찬가지의 방법으로 다음의 결과를 얻는다.

x	2^{x}	$g(x)$
$[-5,\ 0)$	$\left[\frac{1}{32},\ 1\right)$	$2^{k+1}\ln 2$
$[0,\ 1)$	$[1,\ 2)$	0
$[1,\ \log_2 3)$	$[2,\ 3)$	$2^{k+1}\ln 2$
$[\log_2 3,\ 2)$	$[3,\ 4)$	$2^{k+1}\ln 2$
$[2,\ \log_2 5)$	$[4,\ 5)$	0
$[\log_2 5,\ \log_2 6)$	$[5,\ 6)$	$2^{k+1}\ln 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

위의 표에서 어둡게 칠한 세 수가 반복해서 나타난다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,

2^{a}, $g(2^{a})$의 값을 모두 쓰면

$2^{a}=1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 31$(11개): $g(2^{a})=0$

$2^{a}=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 29$(10개): $g(2^{a})=2^{a+1}\ln 2$

이때, $n=11+10=21$이므로

$\therefore\ n+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{g(a_k)}{\ln 2}$

$=21+\dfrac{(2\ln 2)(2+5+8+\cdots+29)}{\ln 2}$

$=21+2\times\dfrac{2+29}{2}\times 10=331$

답 331

[풀이2]

$-5\le x<0$일 때, $\dfrac{1}{32}\le 2^{x}<1$이므로

$f(2^x)=-2\times 2^x+3=3-2^{x+1}$

(이때, 도함수는 $-2^{x+1}\ln 2$)

$0\le x<1$일 때, $1\le 2^x<2$이므로

$f(2^x)=0$

(이때, 도함수는 0)

$1\le x<\log_2 3$일 때, $2\le 2^x<3$이므로

$f(2^x)=2\times(2^x-2)+1=2^{x+1}-3$

(이때, 도함수는 $2^{x+1}\ln 2$)

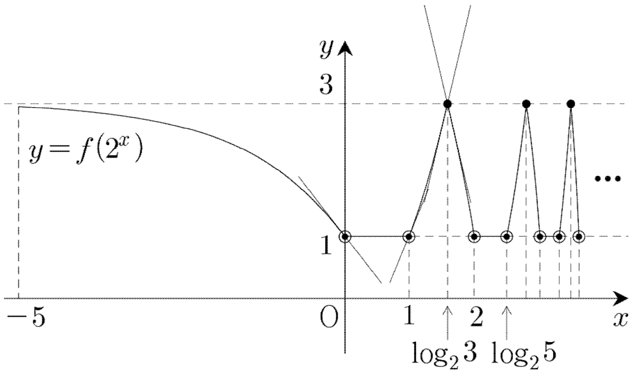
$\log_2 3\le x<2$일 때, $3\le 2^x<4$이므로

$f(2^x)=-2\times(2^x-4)+1=9-2^{x+1}$

(이때, 도함수는 $-2^{x+1}\ln 2$)

⋮

함수 $f(2^x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$g(x)=|$함수 $f(2^x)$의 $x=x$에서의 우미분계수$|$ 이므로

$\lim_{x\to 0-} g(x)=2\ln 2\ne 0=g(0)$ (불연속)

$\lim_{x\to 1-} g(x)=0\ne 4\ln 2=g(1)$ (불연속)

$\lim_{x\to \log_2 3-} g(x)=6\ln 2=\lim_{x\to \log_2 3+} g(x)$ (연속)

(이때, $g(\log_2 3)=\lim_{x\to \log_2 3-} g(x)$)

위의 그림에서

•는 $g(x)$가 연속인 점이고,

◉는 $g(x)$가 불연속인 점이다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,

2^a, $g(2^a)$의 값을 모두 쓰면

$2^a=1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 31$(11개): $g(2^a)=0$

$2^a=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 29$(10개): $g(2^a)=2^{a+1}\ln 2$

이때, $n=11+10=21$이므로

$\therefore\ n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$

$=21+\frac{(2\ln 2)(2+5+8+\ \cdots\ +29)}{\ln 2}$

$=21+2\times\frac{2+29}{2}\times 10=331$

답 331