SKY 수리과학통합논술

차 례

<수리논술>

<과학논술 I>

<과학논술 II>

수리 논술

오승준 정재훈

[대표논제] <첨삭논제>

다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.<1> 11 연세대 모의논술

실수의 집합과 무한한 직선 위의 점들의 집합은 일대일 대응이라 배웠다. 실수 0에 대응되는 임의의 기준점 o와 그 우측에 실수 1이 대응되는 다른 어떤 점 e를 정하고 선분 $\overline{oe}$의 길이를 단위거리로 하면 임의의 양의 실수 a는 기준점 o의 우측에 있고 거리가 a인 점에 대응되고, 임의의 음의 실수 a는 기준점 o의 좌측에 있고 거리가 $-a$인 점에 대응한 무한한 한 직선을 실선이라고 부르자. 그러면 실수 간의 덧셈과 곱셈에 해당되는 연산을 실선 위의 점들 간에도 정의할 수 있을 것이다.

(가) R은 실수 O에 대응되는 기준점이 o이고 실수 1이 대응되는 점이 e인 실선이다.

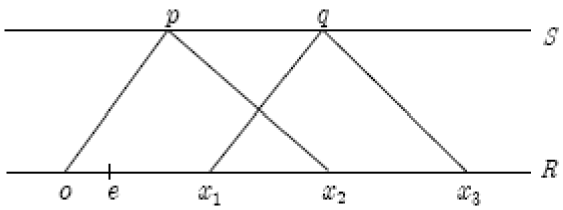
S는 실선 R과 같은 평면에 놓여 있고, R과 일치하지 않으며 평행인 보조 직선이다.

x_1과 x_2는 실선 R 위의 임의의 두 점이다.

p는 S 위의 임의의 한 점이다.

q는 선분 $\overline{op}$와 평행이며 점 x_1을 지나는 직선과 S의 교점이다.

x_3는 선분 $\overline{px_2}$와 평행이며 q를 지나는 직선과 실선 R의 교점이다.



* 위 그림은 x_1과 x_2가 모두 기준점 o 우측에 있는 예제임

(나) R'은 실수 0에 대응되는 기준점이 o'이고 실수 1이 대응되는 점이 e'인 실선이다.

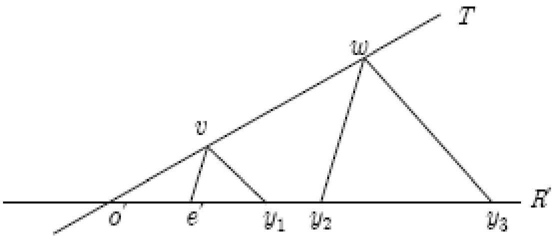
T는 실선 R'과 같은 평면에 놓여 있고, R'과 일치하지 않으며 점 o'을 지나는 임의의 보조 직선이다.

y_1과 y_2는 실선 R' 위의 임의의 두 점이다.

v는 o'에 일치하지 않는 T 위의 임의의 한 점이다.

w는 선분 $\overline{ve'}$과 평행이고 점 y_2를 지나는 직선과 T의 교점이다.

y_3는 선분 $\overline{vy_1}$과 평행이고 점 w를 지나는 실선 R'의 교점이다.



* 위 그림은 y_1과 y_2가 모두 기준점 o' 우측에 있는 예제임

[1-1]

가. 임의의 두 실수 a_1과 a_2가 각각 실선 R 상의 두 점인 x_1과 x_2에 대응된다면, 점 x_3로 대응하는 실수 a_3를 찾고 그 이유를 설명하시오. 그리고 실수 a_3에 대응하는 점 x_3를 찾는 다른 방법을 그림으로 예를 들어 설명하시오. (7점)

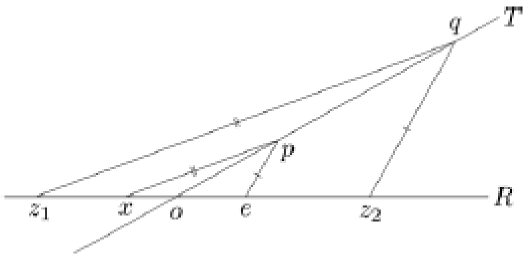
나. 임의의 두 실수 b_1과 b_2가 각각 실선 R' 상의 두 점인 y_1과 y_2에 대응된다면, 점 y_3에 대응하는 실수 b_3를 찾고 그 이유를 설명하시오. 그리고 실수 b_3에 대응하는 점 y_3를 찾는 다른 방법을 그림으로 예를 들어 설명하시오. (10점)

[1-2]

함수 f는 실수의 집합을 정의역과 공역으로 가지고 미분가능하며 증가하며 $f'(0)=1$이다. 정의역과 공역을 각각 예제에 정의한 실선 R과 R'에 일대일 대응을 시키면, 이 함수는 실선 R상의 점 o를 실선 R' 상의 점 e'으로 보내고, (가)에서 정의된 실선 R상의 점 x_1, x_2, x_3를 각각 (나)에서 정의된 실선 R'상의 점 y_1, y_2, y_3로 보낸다. 적분 $\int_{a_1}^{a_2} f(t)dt$ 값에 해당되는 점을 실선 R' 상에 작도하시오. (20점)

[1-3]

제 1항 c_1과 제 2항 c_2가 각각 0이 아닌 어떤 실수이며, 점화식 $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$를 만족하는 어떤 수열이 있다. 그리고 위 수열은 어떤 자연수 $k > 4$에서 처음으로 $c_k = 0$을 만족한다고 가정하자. 실수 c_1과 c_2를 각각 한 실선 위의 두 점 z_1과 z_2에 대응한 아래의 그림에서 점 p를 지나고 선분 $\overline{qz_1}$과 평행한 직선과 실선의 교점 x에 대응되는 실수가 정수가 아님을 설명하시오.(23점)



[대표논제]

다음 제시문은 적분의 개념에 관한 것이다. (아래 문제에서 $x_k = a + k\Delta x$이다.)<2>

08 연세대 수시2

적분의 기본 개념 및 원리는 17세기 뉴턴과 라이프니쯔에 의해 독립적으로 체계화되었고, 적분에 관한 엄밀한 수학적 정의는 코오시와 리이만이 극한의 개념을 도입함으로써 완성되었다. 적분의 기본 원리인 구분구적법은 어떤 도형의 넓이나 부피를 구할 때, 그 도형을 여러 개의 간단한 도형으로 세분하여 이들 도형의 넓이나 부피의 합을 구한 후, 이 합의 극한값으로 원래 도형의 넓이나 부피를 구하는 방법이다. 폐구간 [a,b]에서 연속인 함수 $f(x)$에 대해서 정적분을 다음과 같이 구분구적법의 형태로 정의할 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \qquad (\Delta x = \frac{b-a}{n})$$

다음 (가)와 (나)는 적분의 기본 개념 및 원리를 바탕으로 유도한 결과이다.

(가) 함수 $f(x)$가 폐구간 [a,b]에서 연속일 때, 다음 등식이 성립하는 p_1, p_2, p_3와 q_1, q_2, q_3, q_4가 무한히 많이 존재한다.

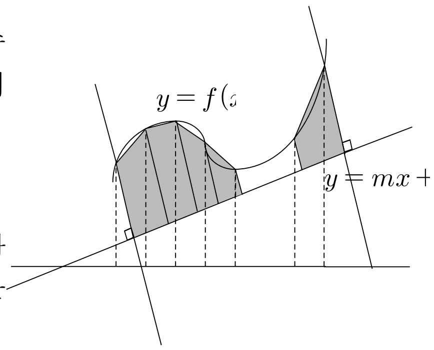
㉠

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(p_1 f(x_{2k}) + p_2 f(x_{2k-1}) + p_3 f(x_{2k-2}))\Delta x \qquad (\Delta x = \frac{b-a}{2n})$$

㉡

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(q_1 f(x_{3k}) + q_2 f(x_{3k-1}) + q_3 f(x_{3k-2}) + q_4 f(x_{3k-3}))\Delta x \qquad (\Delta x = \frac{b-a}{3n})$$

(나) 오른쪽 그림과 같이 폐구간 [a,b]에서 연속함수 $y = f(x)$와 직선 $y = mx + c \quad (m \neq 0)$가 주어질 때, 곡선 $y = f(x)$와 세 직선 $y = mx + c$, $y = -\frac{1}{m}(x-a) + f(a)$, $y = -\frac{1}{m}(x-b) + f(b)$로 둘러싸인 넓이를 구하고자 한다. 오른쪽 그림과 같이 색칠된 부분의 사다리꼴 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, 다음 등식이 성립한다.



㉢

$$S_n = \frac{1}{1+m^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2} - m\frac{x_k + x_{k-1}}{2} - c\right)\left(1 + m\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\Delta x}\right)\Delta x$$

따라서 적분의 개념으로부터 다음과 같은 간단한 공식을 얻게 된다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1+m^2}\int_a^b (f(x)-mx-c)(1+mf'(x))\,dx$$

(1) 등식 ㉠이 성립하기 위한 p_1, p_2, p_3의 조건과 등식 ㉡이 성립하기 위한 q_1, q_2, q_3, q_4의 조건을 구하고, 그 이유를 논리적으로 설명하시오.

(2) (a) 모든 2차 다항함수 $f(x) = Ax^2 + Bx + C$에 대하여

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = p_1 f(-1) + p_2 f(0) + p_3 f(1)$ 이 성립되게 하는 p_1, p_2, p_3를 구하시오.

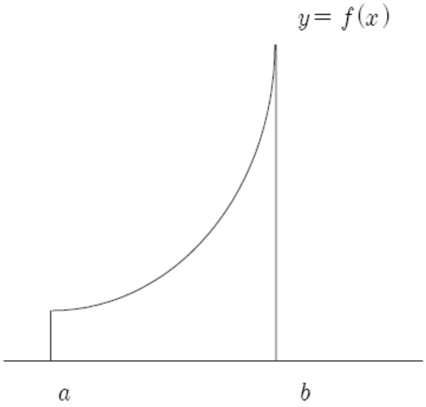
(b) 앞에서 구한 p_1, p_2, p_3는 모든 2차 다항함수 $f(x)$에 대하여

$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{10} \left(p_1 f(x_{2k}) + p_2 f(x_{2k-1}) + p_3 f(x_{2k-2})\right)\Delta x$ ($\Delta x = \frac{b-a}{20}$) 이 성립됨을 논리적으로 설명하시오.

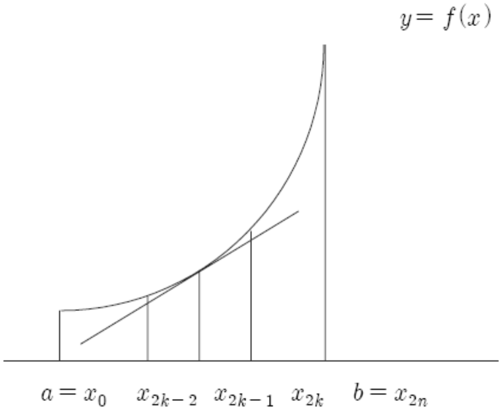
(3) 등식 ㉢이 성립함을 증명하시오.

[실전논제1] <첨삭논제>

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고, $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같을 때, 다음 물음에 답하시오.<3> 09 연세대 모의논술



[그림 1]



[그림 2]

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점$(a,f(a))$부터 점$(b,f(b))$까지의 곡선의 길이를 정적분의 정의를 이용하여 구하시오.

(2) [그림 2]는 [그림 1]의 폐구간 $[a,b]$를 $2n$개의 균등한 소구간으로 나눈 그래프이다. 이때, 점$(x_{2k-1},f(x_{2k-1}))$에서의 접선의 식을 $y=g_k(x)$라 하자. 접선 위의 점 $(x_{2k-2},g_k(x_{2k-2}))$와 점 $(x_{2k},g_k(x_{2k}))$ 사이의 거리를 l_k라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k$의 값을 구하시오.

(3) 위의 $[1-1]$과 $[1-2]$의 결과를 비교 분석하고, $[1-1]$과 같은 결론을 유도할 수 있는 다른 방법에 대하여 논하시오.

[실전논제2]

아래에서는 주어진 정보에 근거하여 단면의 길이와 체적을 구하는 과정 각각을 설명하고 있다. 공식을 유도하는 과정의 타당성에 관하여 논하시오.<4> 08 연세대 모의

(단면의 면적 $A(r)$을 이용, 단면의 길이 $L(r)$을 구하는 논리)

반경이 r인 원기둥을 45° 각도로 잘라서 생성되는 단면의 면적을 $A(r)$, 둘레 길이를 $L(r)$이라고 하자. r의 함수로 단면의 면적 $A(r)$을 알고 있을 때, 이를 이용하여 단면의 둘레 길이 $L(r)$을 구하고자한다.

반경이 각각 $r, r+h\,(h>0)$ 인 원기둥을 45° 각도로 자른 단면의 면적은 $A(r)$, $A(r+h)$이다. 큰 단면에서 작은 단면을 제거하면 가느다란 띠가 생성되는데, 이 띠의 면적은 이 두 단면의 면적의 차이 $A(r+h)-A(r)$이다. 이 띠를 풀면 직사각형으로 근사할 수 있고, 이 직사각형은 밑변의 길이는 우리가 구하고자 하는 단면의 길이 $L(r)$이고 높이는 h이다.

$$A(r+h)-A(r) \approx L(r)h$$

$$\frac{A(r+h)-A(r)}{h} \approx L(r)$$

위의 근사는 h가 작아질수록 정교하여지므로, 위 식에서 h를 0으로 보내는 극한을 취하면 등식이 성립한다. 즉,

$$L(r) = \frac{d}{dr}A(r)$$

(구의 표면적 $S(r)$을 이용, 구의 체적 $V(r)$을 구하는 논리)

반경이 r인 구의 표면적을 $S(r)$, 체적을 $V(r)$이라고 하자. r의 함수로 구의 표면적 $S(r)$을 알고 있을 때, 이를 이용하여 구의 체적 $V(r)$을 구하고자한다. 구의 반경 r을 n등분하여 구를 반경이 $\frac{k}{n}r$,$k=1,2,\ldots,n$ 인 구의 표면을 이용하여 분할하면, 구는 n개의 얇은 “양파 껍질”이 모여서 이루어졌다고 생각할 수 있다.

각각의 양파 껍질은 표면의 넓이가 $S\left(\frac{k}{n}r\right)$이고 두께가 $\frac{r}{n}$이므로, 양파 껍질의 체적은 근사적으로 $S\left(\frac{k}{n}r\right)\frac{r}{n}$이다. 구의 체적은 이들 양파 껍질의 체적을 더하면 되므로 다음과 같이 주어진다.

$$V(r) \approx \sum_{k=1}^{n} S\left(\frac{k}{n}r\right)\frac{r}{n} \approx \int_0^r S(x)dx$$

위의 근사는 n이 커질수록 정교하여지므로, 위 식에서 n을 무한대로 보내는 극한을 취하면 등식이 성립한다. 즉,

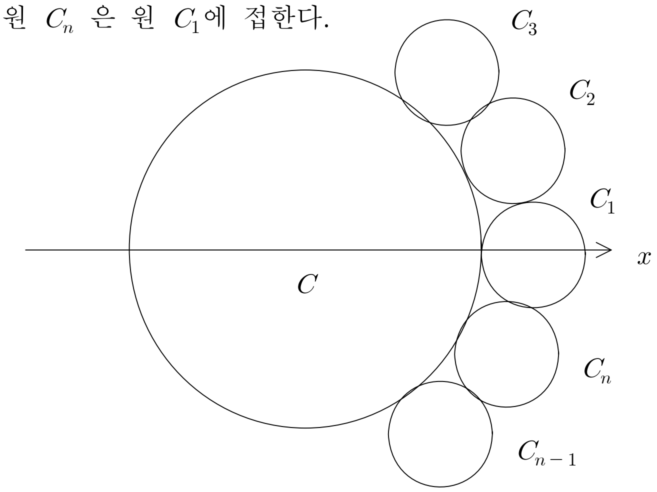
$$V(r) = \int_0^r S(x)dx$$

[대표논제]

다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.<5> 11 고려대 모의

(가) 아래 그림과 같이 원 C는 중심이 x축 위에 있고 반지름이 1인 원이다. 원 C_i 는 다음과 같은 조건을 만족한다.

(1) 원 C_i 는 반지름이 a이고, 원 C 에 접한다. (단, $i=1,\cdots,n$)
(2) 원 C_1 의 중심은 x축 위에 있다.
(3) 원 C_i는 원 C_{i+1} 에 접한다. (단, $i=1,\cdots,n-1$)
(4) 원 C_n 은 원 C_1에 접한다.



(a) a와 n 사이의 관계를 구하시오.

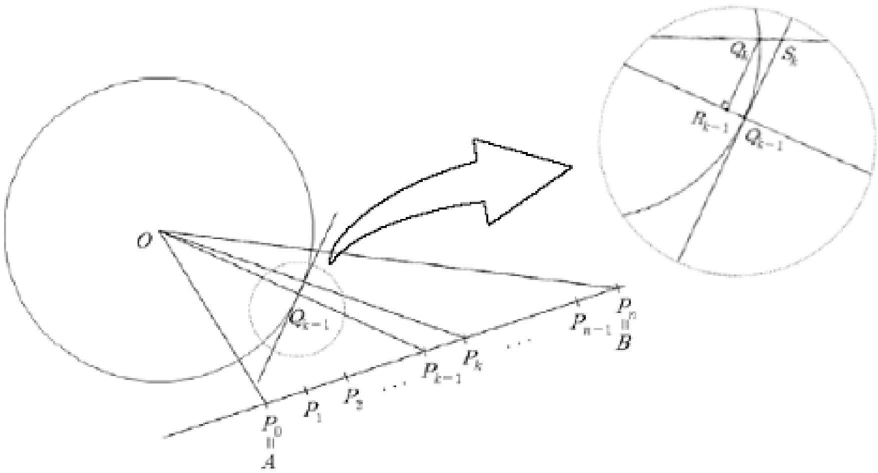
(b) 조건 $a<1$ 을 만족하는 n의 범위를 구하시오.

(c) 원 $C_1,\cdots,C_n$ 들의 둘레의 합을 $L(n)$ 이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} L(n)$ 을 구하시오.

(d) 원 $C_1,\cdots,C_n$ 들을 x축으로 회전시킨 회전체의 부피의 합을 $V(n)$ 이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} nV(2n)$ 을 정적분 형태로 표현하시오.

[실전논제1]

아래의 제시문을 읽고 물음에 답하시오.<6> 08 고려대 정시



그림과 같이 좌표평면 위에 원점 O를 중심으로 하고 반지름이 1인 원이 있다. 이 원의 바깥쪽에 있는 두 점$A(x_1,\ y_1)$와 $B(x_2,\ y_2)$가 $\frac{\pi}{2} < \angle OAB < \pi$를 만족한다. AB를 n등분하는 점들을 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{n-1}$이라 하고 $P_0 = A,\ P_n = B$ 라 하자. 이 원이 선분 OP_{k-1}과 만나는 점을 Q_{k-1}이라 하고 선분 OP_k와 만나는 점을 Q_k라 하자. Q_{k-1}에서 원에 접하는 직선이 선분 OP_k와 만나는 점을 S_k라 하고, Q_k에서 선분 OP_{k-1}에 내린 수선의 발을 R_{k-1}이라 하면 호의 길이 $\overset{\frown}{Q_{k-1}Q_k}$는

$$\overline{R_{k-1}Q_k} \leqq \overset{\frown}{Q_{k-1}Q_k} \leqq \overline{Q_{k-1}S_k}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (1)$$

를 만족한다. 원점 O와 직선 AB사이의 거리를 d라 할 때

$$d = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\overline{AB}} \qquad (2)$$

이다. 따라서

$$\sin(\angle OP_{k-1}A) = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\overline{AB}\,\overline{OP_{k-1}}} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (3)$$

이다. (1)과 (3)을 이용하면 다음 성질도 성립함을 보일 수 있다.

$$\angle AOB = \int_0^1 \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\{x_1 + t(x_2 - x_1)\}^2 + \{y_1 + t(y_2 - y_1)\}^2}dt \qquad (4)$$

제시문의 (2)와 (4)가 성립함을 설명하시오.

[실전논제2] <첨삭논제>

다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.[7] 10 연세대 수시2

갑은 좌표공간에서 시각 t에 따라 연속적으로 움직이는 평면도형 F를 관찰하고 있다. F는 모든 시각에 평면도형을 유지하나, 그 넓이와 모양은 연속적으로 변하고 있다. 갑은 을에게 관찰한 정보의 일부만을 알려주고, 을은 주어진 정보를 수학적으로 분석하여 좌표공간에서 F의 변화와 움직임을 알아내려고 한다.

- 시각 t 에서 도형 F의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영의 넓이를 각각 $A(t), B(t), C(t)$라 하고, 이들은 모든 시각 t에서 연속함수라고 가정한다.

(1) 갑은 을에게 $A(t), B(t), C(t)$를 각각 알려 주었다. 을은 이 정보만으로 도형 F의 넓이 $S(t)$를 알아내었다. 을의 해결 방법을 설명하고, $S(t)$와 $A(t), B(t), C(t)$ 사이의 관계식을 구하시오.

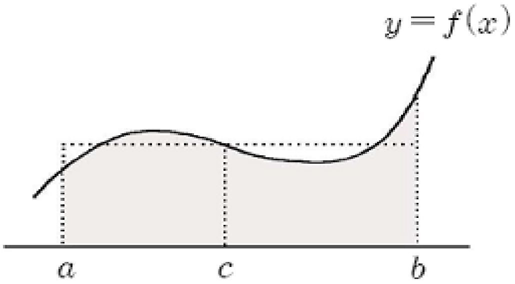
(2) 갑은 을에게 시각 $t(0 \leqq t \leqq 1)$에서 $B(t)$와 $A(t) = C(t) = 0$ 임을 알려주었다. 또한 도형 F 위에 항상 존재하는 점 P의 좌표 $P(f(t), g(t), 0)$도 알려주었다. 그리고 $f(t)$와 $g(t)$는 구간 $0 \leqq t \leqq 1$에서 증가함수이고, 미분 가능하며, 또한 이들의 도함수가 연속이라는 조건을 알려주었다. 을은 $t=0$에서 $t=1$까지 도형 F가 만든 입체도형의 부피를 정적분으로 표현할 수 있었다. 그 이유를 설명하고 입체도형의 부피를 적분변수 t를 사용한 정적분으로 나타내시오.

(3) 갑은 시각 $t(1 \leqq t \leqq 2)$에서 $A(t), B(t), C(t)$ 각각을 모두 알고 있으나, 을에게는 이들의 합인 함수 $G(t) = A(t) + B(t) + C(t)$ 만을 알려주었다. 또한 이 구간에서 도형 F의 넓이 $S(t)$가 변하지 않았다는 정보도 알려주었다. 을은 이 두 가지 정보를 사용하여 어떤 조건하에서는 $S(t)$를 정확하게 구할 수 있었다. 을은 먼저 함수 $G(t)$의 최댓값 M과 최솟값 m 사이의 관계식을 구하였다. 을이 구한 이 관계식을 구하고, 이로부터 F의 넓이 $S(t)$를 구하는 방법을 설명하시오.

[대표논제] <첨삭논제>

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.<8> 08 서울대 정시 논술

(가) 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 f에 대하여 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$를 만족하는 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다는 사실이 잘 알려져 있다. 이를 '적분에 관한 평균값의 정리'라고 한다. 이것은 폐구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$의 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이가 밑변의 길이가 $b-a$이고 높이가 $f(c)$인 직사각형의 넓이와 같다는 것을 의미한다.

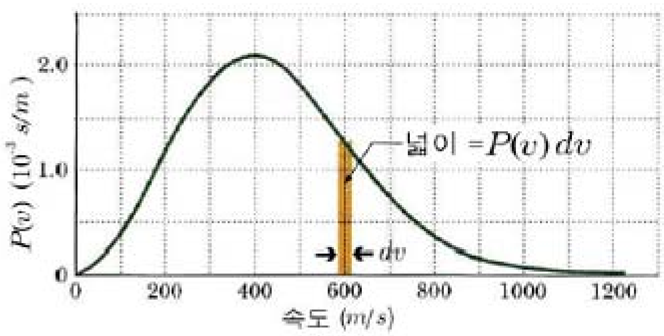


[그림 1]

(나) 1852년 물리학자 맥스웰은 기체분자의 속도분포 문제를 해결하였다. 맥스웰-볼츠만의 속도분포는 기체분자의 속도 v의 확률분포함수

$$P(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$$

로 주어진다. 여기서 M은 몰 질량, R은 기체상수, T는 온도이다. 예를 들어 300K에서 산소분자의 속도분포는 다음과 같다.



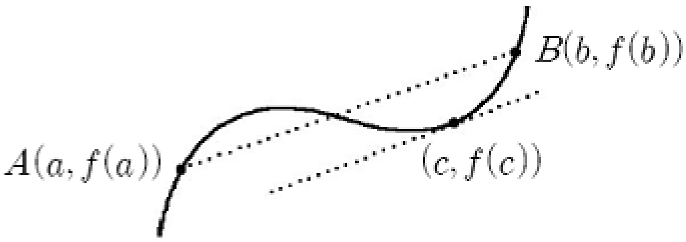
이 경우 산소분자의 속도가 $v_1 = 590m/s$와 $v_2 = 61m/s$ 사이의 값을 가질 확률을 구하기 위해서는 $\int_{v_1}^{v_2} P(v)dv$를 계산해야 하는데, 적분에 관한 평균값의

정리에 의해 이 적분값은 근사적으로 $(v_2 - v_1)P\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)$와 같다.

과학의 여러 분야에서 나타나는 함수의 적당한 값과 구간의 길이를 곱하여 적분값의 근사값으로 사용한다.

(다) 적분에 관한 평균값의 정리로부터 도함수 f'이 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$를 만족하는 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다는 '미분에 관한 평균값의 정리'를 유도할 수 있다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $A(a, f(a))$와 $B(b, f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기는 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$이고, $f'(c)$는 점 $(c, f(c))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기이다. 따라서 미분에 관한 평균값의 정리는 곡선 $y=f(x)$의 접선 중에 직선 AB와 평행한 것이 적어도 하나 존재한다는 것을 의미한다.



[그림 2]

미분에 관한 평균값의 정리는 여러 가지 부등식을 증명하거나 다양한 함수의 근사값을 구하는 데 이용된다.

(라) 함수 f가 폐구간 $[a, b]$를 포함하는 개구간에서 미분가능하고 f' 이 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서 점 $(b, f(b))$까지의 곡선의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이다.

(1) 적분에 관한 평균값의 정리를 이용하여 도함수 f'이 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다는 것을 설명하시오.

(2) 함수 $f(x)=x^3$에 대하여 폐구간 $[1,\ 2]$에서 논제 1의 등식을 만족하는 c의 값을 구하시오.

(3) 도함수가 0인 함수에 대하여 알아보자.

(3-1) 개구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f^{'}(x)=0$이면, f는 개구간 $(a,\ b)$에서 상수함수가 됨을 설명하시오.

(3-2) 상수함수가 아닌 함수 $g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$에 대하여 $g^{'}(x)$를 구하고, 이 결과를 논제 3-1의 내용과 연관시켜 설명하시오.

(4) $(1+x)^{\frac{1}{4}}$의 근사식을 찾아보려고 한다.

(4-1) $|x|\leqq\dfrac{1}{2}$일 때 부등식 $|(1+x)^{\frac{1}{4}}-1|\leqq\dfrac{|x|}{2}$가 성립함을 설명하시오.

(4-2) $|x|\leqq\dfrac{1}{2}$일 때 부등식 $\left|(1+x)^{\frac{1}{4}}-\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)\right|\leqq\dfrac{3}{4}x^2$ 이 성립함을 설명하시오.

(5) 임의의 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3$위의 점 $(t,\ t^3)$에서 점 $(m(t),\ \{m(t)^3\})$까지 곡선의 길이가 1이 되도록 $m(t)$를 정의하자. (단, $0<t<m(t)$), 이렇게 정의한 $m(t)$가 t의 함수로서 미분가능하다고 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}t^3[1-\{m^{'}(t)\}^2]$의 값을 구하고 그 과정을 설명하시오.

[실전논제1]

제시문을 읽고 물음에 답하시오.<9>　　　　09 고려대 모의논술

(나) [평균값의 정리] 함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고, 개구간 (a,b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 개구간 (a,b) 안에 적어도 하나 존재한다.

(다) 형과 동생이 일직선 도로에서 자전거 시합을 한다. 동생은 출발선으로부터 50지점에서 출발하기로 하였다. 둘이 동시에 출발하여 T초 후 형은 200미터 지점을, 동생은 150미터 지점을 통과하였다. 출발 t초 후 형의 위치를 $x_1(t)$미터라 하고 동생의 위치를 $x_2(t)$미터라 하면 운동의 물리적 특성으로 인해 $x_1(t)$와 $x_2(t)$는 폐구간 $[0,T]$에서 연속이고, 개구간 $(0,T)$에서 미분가능한 함수로 볼 수 있다. 따라서 형과 동생의 속도는 각각 $v_1(t)=x_1{}'(t)$미터/초와 $v_2(t)=x_2{}'(t)$미터/초로 표시할 수 있다.

(라) 평면 위를 움직이는 점 P의 좌표가 시간 t초 일 때 $P(x(t),y(t))$로 주어졌다고 하자. $x(t)$와 $y(t)$가 미분가능하면 속도벡터 $\overrightarrow{v(t)}$는 $\overrightarrow{v(t)}=(x'(t),y'(t))$이며 속력은 $|\overrightarrow{v(t)}|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$ 이다.

(마) 구간 $0\le x\le a$에서 정의된 연속함수 $f(x)$와 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$가 다음의 성질을 가진다고 하자. $F(a)=\int_0^a f(t)dt=1$이고, 구간 $0\le x\le a$ 안의 모든 x에 대해 $f(x)=3\{F(x)\}^2+1$이 성립한다.

[논제 2] 제시문 (나)를 활용하여 다음 문항에 답하시오.

(a) 제시문 (다)에서 형의 속도가 동생의 속도의 두 배가 되는 시점, 즉 $v_1(t)=2v_2(t)$가 되는 t가 개구간 $(0,T)$ 안에 존재함을 설명하시오.

(b) 제시문 (라)와 관련하여 아래 주장의 문제점을 지적하시오.

$x(t)$와 $y(t)$가 폐구간 $[t_1,t_2]$에서 연속이고, 개구간 (t_1,t_2)에서 미분가능하면 평균값의 정리에 의해

$$x'(s)=\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1},\ y'(s)=\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}$$

를 만족하는 s가 t_1과 t_2 사이에 존재하고, 이 때 속력은 다음과 같다.

$$|\overrightarrow{v(s)}|=\frac{\sqrt{(x(t_2)-x(t_1))^2+(y(t_2)-y(t_1))^2}}{t_2-t_1}$$

[논제3] 제시문 (마)에 대하여 다음 문항에 답하시오.

(a) 구간 $(0,\ a)$에서 $y=\{F(x)\}^3$의 도함수를 $f(x)$를 이용하여 표현하시오.

(b) 구간 $[0,\ a]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축, 두 직선 $x=0$과 $x=a$로 둘러싸인 도형을 x축 둘레로 회전하여 얻은 회전체의 부피를 구하시오.

[실전논제2]

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.<10> 09 서울대 정시논술 논제1,2

(가) 여러 가지 자연현상 및 사회현상은 시간에 따라 변화하는 적절한 양과 그 양의 순간변화율(도함수) 등의 관계식으로 표현할 수 있다. 예를 들어 마찰이 없는 수평면 위에서 용수철에 의해 진동하는 질량 m인 물체의 운동을 기술해보자. y를 용수철 평형점으로부터의 변위(길이)라 하고 용수철 상수를 k라 하면 후크의 법칙에 의해 용수철이 물체에 가하는 힘은 $F=-ky$가 된다. 뉴턴의 운동방정식은 $F=ma$로 표시되는데 가속도 a는 속도 v의 도함수이고, 속도 v는 위치 y의 도함수이므로 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$이고, y를 두 번 미분한 결과 $\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$, 즉 y의 이차 도함수를 $\frac{d^2y}{dt^2}$로 나타내면, 관계식

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

을 얻는다. ($y=f(t)$인 경우 $\frac{d^2y}{dt^2}$를 $f''(t)$로 쓰기도 한다.) 이와 같이 시간에 따라 변하는 양과 이의 도함수들 사이의 관계를 설정한 등식을 총칭하여 미분방정식이라 부른다.

상수 a에 대해

$$\frac{d\sin at}{dt}=a\cos at, \quad \frac{d\cos at}{dt}=-a\sin at$$

라는 사실을 이용하면, 함수 $y=\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$를 미분방정식 (1) 에 대입했을 때 모든 t에 대해서 등호가 성립함을 쉽게 확인할 수 있다. 이 때, $y=\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$가 미분방정식 (1)을 '만족'시킨다고 말한다. 이와 같이 '주어진 미분방정식을 만족시키는 함수'를 그 미분방정식의 해라고 부른다.

논의를 진행하기 위하여 몇 가지 수학적 사실이 더 필요하다. 우선 수열 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$이 수렴하며 그 극한값을 e로 나타내는데 약 2.71828 이다. e 를 밑으로 하는 지수함수 e^t은 모든 실수 t에서 미분가능하며, 임의의 상수 a에 대하여

$$\frac{de^{at}}{dt}=ae^{at}$$

이 성립한다.

자연현상을 설명하는 미분방정식은 그 해가 초기 조건(한 시점에서의 함수값, 도함수값 등)에 의하여 유일하게 결정된다. 구체적인 예를 들기 위해 아래 미분방정식을 살펴보기로 하자.

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \qquad \cdots\cdots \ (2)$$

여기서 a와 b는 상수이다. 이 미분방정식의 해 $y = f(t)$가 초기값 $f(0)$에 의해 유일하게 결정됨을 확인해 보자. 이를 위하여 $f_1(t)$와 $f_2(t)$가 미분방정식 (2)의 해이고, 또한 f_1의 초기값 $f_1(0)$과 f_2의 초기값 $f_2(0)$이 같다고 하자. 이때 함수 $g(t)$를 $g(t) = f_1(t) - f_2(t)$로 정의하면 $f_1(t)$와 $f_2(t)$가 미분 방정식 (2)의 해라는 사실로부터 $g'(t) = ag(t)$가 성립함을 알 수 있다. 보조 함수 $h(t)$를 $h(t) = e^{-at}g(t)$로 정의하면 모든 실수 t에 대하여 $h'(t) = 0$임을 확인할 수 있다. 따라서 $h(t)$는 상수함수가 되고, $g(0) = f_1(0) - f_2(0) = 0$이므로 모든 t에 대하여 $h(t) = 0$이 된다. 모든 실수 t에 대하여 e^{-at}은 항상 양수이므로, $h(t)$의 정의로부터 $g(t) = 0$ 이 모든 t에 대하여 성립하게 된다. 따라서 두 함수 $f_1(t)$와 $f_2(t)$는 같은 함수이다.

비슷한 방법으로 미분방정식 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ 의 해 $y = f(t)$가 $f(0)$, $f'(0)$에 의해서 유일하게 결정됨도 보일 수 있다. 이와 같이 미분방정식의 해가 초기 조건에 의해 유일하게 결정되는 것을 통칭하여 <u>미분방정식의 해의 유일성</u>이라 한다.

[논제1] C_1과 C_2가 임의로 주어진 상수라 하자. 보조함수

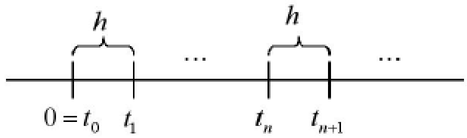
$$g(t) = (\cos t)f(t) - (\sin t)f'(t)$$
$$h(t) = (\sin t)f(t) + (\cos t)f'(t)$$

를 이용하여 미분방정식

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \qquad \cdots\cdots \ (3)$$

의 해 $y = f(t)$가 초기 조건 $f(0) = C_1$, $f'(0) = C_2$에 의해 유일하게 결정됨을 보이시오.

(나) 컴퓨터를 이용하여 미분방정식의 해를 근사적으로 구할 수 있는데, 가장 간단한 방법은 다음과 같다. 우선 h를 충분히 작은 양수로 택하고, $t_0=0$으로부터 일정한 간격으로 떨어진 $t_0=0$, $t_1=h$, $t_2=2h$, $\cdots$ $t_n=nh$, $\cdots$을 고정하자. 이 t_0, t_1, $\cdots$ t_n, $\cdots$을 격자점이라 부르는데, 우리는 이들 격자점 위에서 미분방정식의 해 $f(t)$의 값을 근사적으로 구하고자 한다.



h가 충분히 작으므로 도함수의 정의 $f'(t)=\lim\limits_{\triangle t\to 0}\dfrac{f(t+\triangle t)-f(t)}{\triangle t}$에 의하여 $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$를 $f'(t)$의 근삿값으로 사용할 수 있다.

이제 미분방정식 (2)

$$\frac{dy}{dt}=ay+b$$

의 근사적 해법에 대하여 알아보자. 함수 $y=f(t)$가 초기 조건 $f(0)=y_0$을 만족시키는 미분방정식 (2)의 해라 하자. 위의 관찰로부터 $\dfrac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{h}$이 $f'(t_n)$의 근사값이고 $f'(t_n)=af(t_n)+b$ 이므로 $\dfrac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{h}$이 $af(t_n)+b$의 근삿값이 된다. 따라서 $f(t_{n+1})$을 $(1+ah)f(t_n)+bh$로 근사시킬 수 있다.

그러므로 y_1, y_2, $\cdots$을 점화식

$$y_{n+1}=(1+ah)y_n+bh$$

및 초기 조건 $y_0=f(0)$을 이용하여 귀납적으로 정의하면, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$에 대하여 y_n은 $f(t_n)$의 근삿값이 된다.

비슷한 방법으로 미분방정식 (3)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

의 해의 근삿값을 구할 수 있다. 이 때 $f''(t_n)$의 근삿값으로

$$\frac{f(t_{n+1})-2f(t_n)+f(t_{n-1})}{h^2}$$

을 사용하는데, 그 이유는 다음 공식이 성립하기 때문이다.

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{f(t+\triangle t)-2f(t)+f(t-\triangle t)}{(\triangle t)^2}=f''(t)$$

[논제2] $h=0.1$이라고 하고, $t_0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots$을 위에서 정의한 격자점이라고 하자. 미분방정식 (3)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

의 해 $y=f(t)$가 초기 조건 $f(t_0)=3$, $f'(t_0)=2$를 만족시킨다고 하자. $f(t_n)$의 근삿값 y_n을 귀납적으로 정의하는 점화식과 $y_1,\ y_2$의 값을 구하시오.

[대표논제]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.<11> 08 수시2 연세대 의치계열 응용

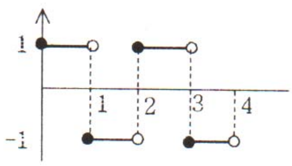
정의: 실수 x에 대하여 $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2a-x)$가 성립할 때 $f(x)$는 $x=a$에 대하여 우함수라하고, $f(x)=-f(2a-x)$가 성립할 때 $f(x)$는 $x=a$에 대하여 기함수라고 정의한다.

실수에서 정의된 함수 수열 $f_n(x)$를 다음과 같이 정의하자.

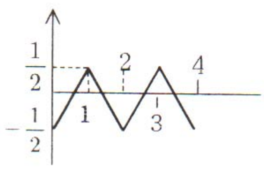
㉠ $f_0(x)=(-1)^{[x]}$, $f_{2n}(x)=\int_0^x f_{2n-1}(t)dt$, $f_{2n+1}(x)=\int_{\frac{1}{2}}^x f_{2n}(t)dt$

$(n=0,1,2,\cdots)$

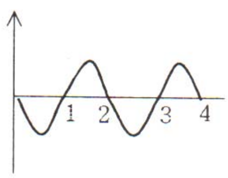
이때 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$는 다음 그림과 같고, 구간 [0 1)에서 $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x-\frac{1}{2}$, $f_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$이다.



$f_0(x)$



$f_1(x)$



$f_2(x)$

일반적으로 함수 $f_n(x)$는 구간 [0 1)에서 n차 다항식이 되며, 이를 $P_n(x)$라 두자. ㉠으로부터 $P_0(x)=1$이고 $\frac{d}{dx}P_n(x)=P_{n-1}(x)$이다. 그리고 $a_0=1$이라 두자.

이때 $\frac{d}{dx}P_1(x)=P_0(x)=a_0$이므로 $P_1(x)=a_0x+a_1$의 꼴이 되고, $\frac{d}{dx}P_2(x)=P_1(x)=a_0x+a_1$이므로 $P_2(x)=\frac{a_0}{0!}\frac{x^2}{2!}+\frac{a_1}{1!}\frac{x}{1!}+\frac{a_2}{2!}$ (단 $0!=1$)의 꼴로 표현될 수 있다. 일반적으로 다항식 $P_n(x)$는 다음과 같은 꼴로 표현될 수 있다.

㉡ $P_n(x)=\frac{a_0}{0!}\frac{x^n}{n!}+\frac{a_1}{1!}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{a_2}{2!}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\frac{x}{1!}+\frac{a_n}{n!}$

$(n=0,1,2,\cdots)$

그리고 ㉠으로부터 다음 등식이 성립한다.

㉢ $P_{2n}(0)=0$, $P_{2n+1}(\frac{1}{2})=0$ $(n=1,2,\cdots)$

---

(1) $f_{2k+1}(x)(k=1,2,\cdots)$ 이 $x=0$에 대하여 우함수, $x=\dfrac{1}{2}$에 대하여 기함수라면 $f_{2k+2}(x)$는 $x=0$에 대하여 기함수, $x=\dfrac{1}{2}$에 대하여 우함수임을 증명하시오.

(2) ㉡을 만족하는 a_n에 대하여, $g(y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}y^n$ 이라 하자.

이때 $g(y)\left\{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}y^n\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)y^n$ 임을 증명하시오.

(3) [문제2]와 ㉢을 사용하여 함수 $g(y)-1$이 $y=0$에 대하여 기함수이고,

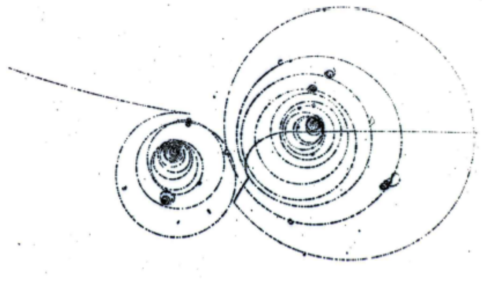
함수 $g(y)\left\{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\right\}$ 이 $y=0$에 대하여 우함수임을 증명하시오.

그리고 $\left\{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-y}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\right\}=g(y)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}\right\}$ 임을 입증하시오.

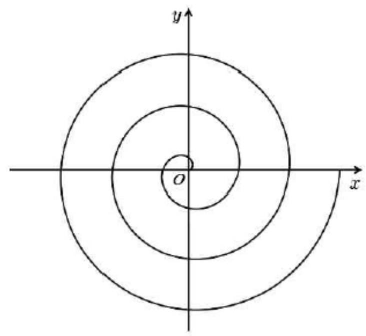
[실전논제1] <첨삭논제>

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.<12> 10 서울대 정시

(가) 20세기 초기에 새로운 입자들의 발견에는 안개상자 실험이 중요한 역할을 하였다. 전하를 띤 입자가 안개 속을 지나갈 때 작은 물방울이 형성되면서 [그림 1]과 같은 자취를 볼 수 있다. 안개상자에 자기장을 함께 걸어 주면 전하를 띤 입자는 자기력에 의하여 원 운동을 하며, 그 반지름은 입자의 운동량에 비례한다. 한편 움직이는 입자는 안개 입자 또는 공기와 부딪혀 연속적으로 조금씩 에너지를 잃어 원 운동의 반지름은 점차 줄어든다. 입자는 나선(와선) 모양을 따라 움직이다가 결국 모든 에너지를 잃고 정지한다.



[그림 1]



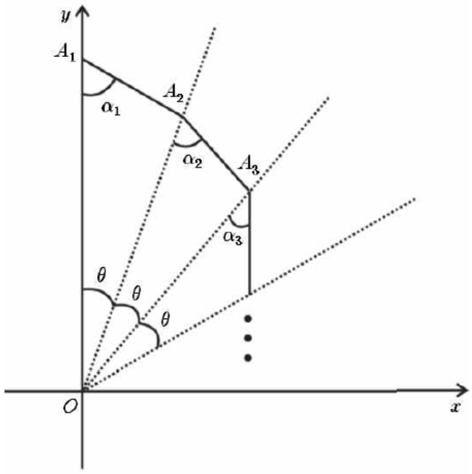
[그림 2]

기원전 250경 아르키메데스는 한 나선을 연구하였는데, 그것은 좌표평면 위를 움직이는 점의 좌표 (x, y)가 $x = \theta\cos\theta,\ y = \theta\sin\theta$ (단, θ는 매개변수)로 정의되는 곡선으로서, $\theta \geq 0$인 경우 [그림 2]와 같은 자취를 갖는다. 아르키메데스는 자와 컴퍼스만으로는 작도가 불가능한 기하학의 문제들, 예컨대 각의 3등분 문제, 원의 넓이와 같은 정사각형을 찾는 문제 등을 이러한 나선을 이용하여 쉽게 해결할 수 있음을 보였다.

먹잇감을 향해 날아가는 독수리를 하늘 위에서 내려다보면, 독수리는 먹이를 가장 잘 관찰할 수 있는 각도를 유지하면서 날아간다. 독수리가 먹이를 가장 잘 관찰할 수 있는 방향은 날아가고 있는 방향이 아니라, 날아가는 방향에서 일정한 각도를 이루고 있다. 1638년 데카르트가 발견한 로그 나선 또한 이러한 성질을 가지고 있다. 즉, 로그 나선의 각 점에서의 접선과 그 점에서 나선의 중심을 잇는 선분이 이루는 각도는 항상 일정하다. 예를 들어, 좌표평면 위를 움직이는 점의 좌표 (x, y)가 $x = e^{\theta}\cos\theta,\ y = e^{\theta}\sin\theta$ (단, θ는 매개변수)로 주어지는 로그 나선은 각 점에서의 접선과 그 점에서 원점까지의 선분이 이루는 각도가 항상 $\frac{\pi}{4}$이다.

(나) 나선의 형태와 길이와의 관계를 알아보기 위하여 선분으로 이루어진 다각나선을 생각해보자. [그림 3]과 같이 평면 위의 점 $A_1(0, 1)$에서 시작하여 시계방향으로 각 θ만큼 회전하되 y축과 각 α_1을 이루도록 하여 선분을 점 A_2

까지 긋는다. 같은 방법으로 차례로 각 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots$를 이루면서 선분들이 $\overline{OA_n} \geq \overline{OA_{n+1}}\,(n=1,2,\cdots)$을 만족하며 서로 겹치지 않고 점차 안 쪽 방향으로 전진해 가면서 다각 나선을 만든다. 이와 같은 다각 나선은 주어진 각의 수열 $\{\alpha_n\}$에 따라 다양한 형태로 나타난다.



[그림 3]

(다) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다. 그러나 일반적으로 그 역은 성립하지 않는다. 예를들어, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$은 발산하고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$은 수렴한다는 사실이 알려져 있다. 또한 모든 $n=1,2,\cdots$에 대하여 $0 < a_n \leq b_n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다는 것도 알려져 있다. 이 사실을 이용하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$이 수렴함을 알 수 있는데, 그 이유는 $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}\,(n=1,2,\cdots)$이기 때문이다.

[논제 1] 제시문 (나)에 주어진 임의의 수열 $\{\alpha_n\}$에 관하여 각 $\theta = \frac{\pi}{2010}$일 때, 각 나선이 원점으로 한없이 가까워지지 않을 수도 있음 (즉, n이 한없이 커질 때, $\overline{OA_n}$이 0으로 수렴하지 않을 수도 있음)을 예를 들어 설명하시오. 또, 원점으로 한없이 가까워지는 경우에, 다각 나선을 이루고 있는 선분들의 길이의 무한급수

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \cdots$$

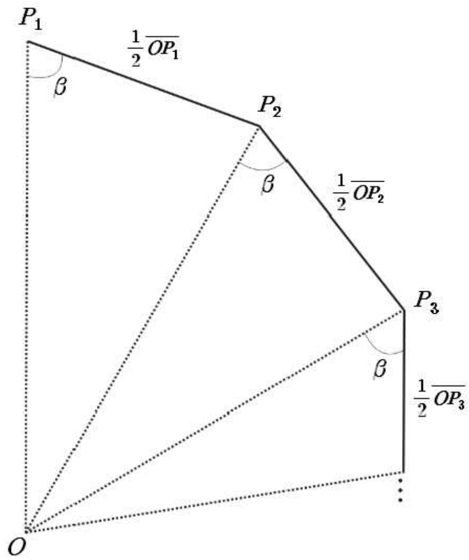
가 항상 수렴하는지 논하시오.

[논제 2] 제시문 (나)에 주어진 임의의 수열 $\{\alpha_n\}$에 관하여 $0<\alpha_1<\theta<\frac{\pi}{3}$이고 $0<\alpha_{n+1}\le\alpha_n(n=1,2,\cdots)$일 때, 다각 나선이 원점으로 한없이 가까워짐을 설명하시오. 또, 다각 나선을 이루고 있는 선분들의 길이의 무한급수

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots$$

가 항상 수렴함을 설명하시오. (단, θ는 고정되어 있다.)

[논제 3] 이번에는 다음과 같이 일정한 길이마다 정해진 각도로 방향을 바꾸는 형태의 다각 나선을 생각해 보자. 원점이 O인 좌표평면 위에 한 점 P_1이 주어졌다고 하자. 아래 그림과 같이 점 P_1에서 선분 OP_1에 대하여 각 β 방향으로 길이 $\frac{1}{2}\overline{OP_1}$만큼 이동한 점을 P_2라 하자. 이러한 과정을 계속 반복하여, 점 P_n에서 선분 OP_n에 대하여 각 β방향으로 길이 $\frac{1}{2}\overline{OP_n}$만큼 이동한 점을 P_{n+1}이라 하자. n이 한없이 커짐에 따라 점 P_n이 좌표평면에서 어떻게 움직이는지 $\cos\beta$에 관하여 구체적으로 기술하시오.



[논제 4] 제시문 (가)의 로그 나선 $x=e^{\theta}\cos\theta,\ y=e^{\theta}\sin\theta$ 위의 한 점 P에서 나선의 접선을 긋고, 원점 O에서 선분 OP에 수직인 직선을 그어 접선과 만나는 점을 Q라고 하자. θ가 $\frac{\pi}{2}$에서 π까지 변할 때, 선분 PQ가 지나간 영역을 구체적인 그림으로 나타내고 그 넓이를 구하시오.

수열과 극한

- 정재훈 선생님 -

[대표논제]

다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.<13> 09 연세대 수시

---

xy평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 단위원 C가 있다. 고정점 $A(-1,\ 0)$부터 시계 방향으로 원 C위의 한 점 P까지의 호의 길이를 $l(P)$라고 하자. 원 C 위의 임의의 두 점 P_1과 $P2$에 대하여 연산 $P_1 \oplus P_2$를 점 P_1부터 원 C를 따라 시계 방향으로 $l(P_2)$만큼 더 이동하여 얻어지는 점으로 정의하자. 그러면 이 연산은 교환법칙과 결합법칙을 만족함을 쉽게 알 수 있다.

[1-1] 점 P가 원 C 위의 임의의 한 점이라고 할 때, 연산 $\oplus$에 대하여 P의 항등원과 역원을 나타내는 점은 어떠한 점인지 각각 설명하시오. (5점)

[1-2] 원 C 위의 점으로 이루어진 수열 $\{P_n\}$이 $P_0,\ P_1,\ P_n = P_{n-1} \oplus P_{n-2}$ (단, $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$) 로 정의된다.

(a) $P_0 = A$이고, P_1은 $l(P_1) = \dfrac{\pi}{3}$인 원 C위의 점일 때, $P_n = A$를 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (5점)

(b) k가 임의의 자연수이고, $P_0 = A$이며, P_1은 $l(P_1) = \dfrac{2\pi}{k}$인 원 C 위의 점일 때, $P_n = A$를 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하는 방법에 대하여 논하시오. (15점)

[1-3] 원 C위의 서로 다른 네 점 $P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2$가 관계식 $P_1 \oplus P_2 = Q_1 \oplus Q_2$를 만족한다면, 두 점 P_1과 P_2를 지나는 직선과 두 점 Q_1과 Q_2를 지나는 직선이 평행임을 논리적으로 설명하시오. (15점)

[실전논제1]

다음 제시문은 박테리아 개체 수 변화에 관한 것이다. 제시문을 읽고 아래 물음에 답하시오.<14>

09 연세대 모의논술

(가) 병을 낫기 위해 병원에 입원했다가 각종 항생제에 내성을 보이는 박테리아에 감염된 경우가 잇따르고 있어 병원감염에 관한 불안이 확산되고 있다. 어떤 보고서에 따르면 항생제 내성 박테리아에 의한 병원감염은 환자와 환자간의 신체 접촉에 의해 직접적으로 전파되기보다는, 병원 내에서 의료진의 손이나 병원 환경을 통해서 전파된다고 한다. 그리고 병원 내 항생제 내성 박테리아 감염률은 병원 내 총 박테리아의 양과 밀접히 관련되어 있다고 한다. 병원 환경에서 박테리아의 총 양의 변화를 정량적으로 분석하기 위하여 여러 수학모델이 제시되었다.

(나) 이 제시문에서는 감염된 환자 개인별로 박테리아의 개체수의 변화를 단위 시간별로 추적하는 수학 모델을 소개하고자 한다. 박테리아가 인체에 침투했을 때 박테리아의 양을 a_0로 표시하고, 침투 후 n시간이 경과한 후 박테리아의 양을 a_n로 표시하자. 이때, 수열 $\{a_n\}$에 관하여 다음 조건이 성립한다고 가정하자.

㉠ $a_{n+1} = a_n + \beta a_n (K - a_n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$

여기서 K는 환자의 몸 안에서 생존할 수 있는 개체수의 정원을 의미하는 양의 상수이고, β는 박테리아의 증가율과 관련 있는 양의 상수이다. (※ 단, a_n은 개체수를 표현함으로 자연수이여야 하나 계산의 편의상 실수라고 하자.) 이 모델은 비현실적인 가정에 근거하고 있으나 박테리아 개체수 변화의 기본 모델로서 이용되어 많은 성과를 얻었다.

(다) 수리모델 ㉠에서 β가 $0 < \beta < \dfrac{1}{2K}$ 일 때 개체수의 변화를 살펴보자. 초기 개체수 a_0가 $K < a_0 < 2K$이면 개체수가 K가 될 때까지 감소하고, 초기 개체 수 a_0가 $0 < a_0 < K$이면 개체수가 K가 될 때까지 증가한다.

---

(1) 수열 $\{a_n\}$이 수렴한다면 그 극한값은 무엇이 되어야 하는지 논리적으로 설명하시오.

(2) 제시문 (다)에서 초기 개체수가 $K < a_0 < 2K$이면 a_1은 부등식 $K < a_1 < a_0$를 만족하고, $0 < a_0 < K$이면 부등식 $a_0 < a_1 < K$를 만족함을 논리적으로 설명하시오.

(3) 제시문 (다)가 성립함을 수열 $\{a_n\}$의 극한을 이용하여 논리적으로 설명하시오.

[실전논제2] <첨삭논제>

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.<15> 08 고려대 수시2

두 개의 저항을 그림 1과 같이 연결하는 방법을 직렬 연결이라 하고, 그림 2와 같이 연결하는 방법을 병렬 연결이라 한다. 크기가 R_1과 R_2인 두 개의 저항을 직렬 연결할 때, 합성 저항 R은 각 저항의 합과 같다($R = R_1 + R_2$).

그리고 크기가 R_1과 R_2인 두 개의 저항을 병렬 연결할 때, 합성 저항의 역수는 각 저항의 역수의 합과 같다. $\left(\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.

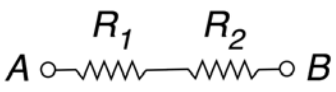


그림 1

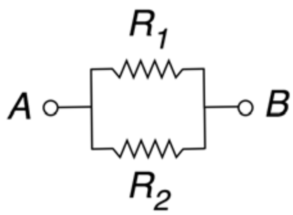


그림 2

그림 3과 같이 1 Ω의 저항을 각 단계마다 계속해서 세 개씩 붙여나갈 때, 수학적 귀납법을 이용하여 A와 B 사이의 합성 저항이 감소함을 설명하고 합성 저항의 극한값에 대하여 서술하시오.

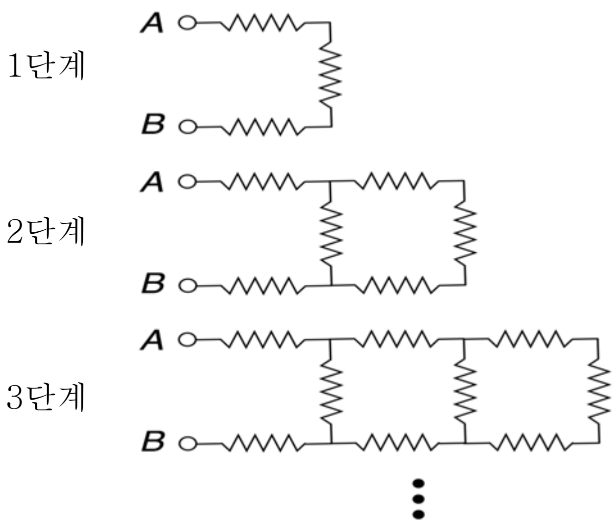


그림 3

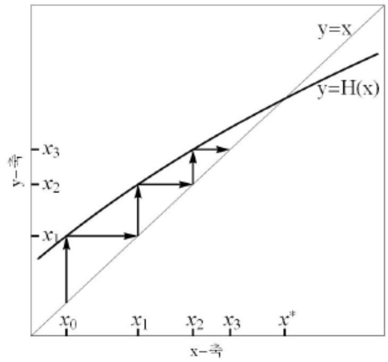
[실전논제3]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.<16> 09 서울대 정시논술 논제3 논제4

(다) 위에서 본 바와 같이 미분방정식이 주어지면 그 해를 근사하는 적절한 점화식을 항상 찾을 수 있기 때문에 미분방정식 연구는 점화식 연구와 밀접한 관계가 있다. 우선 함수 $H(x)$를 이용하여 정의한 점화식

$$x_{n+1} = H(x_n)$$

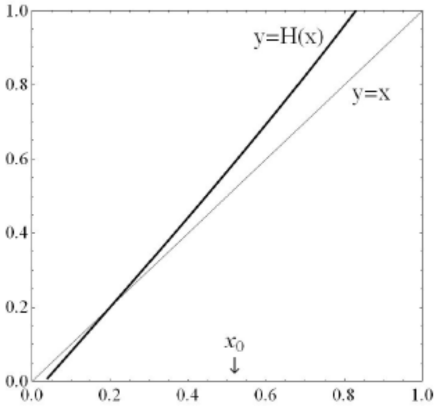
을 살펴보자. 초기값 x_0이 [예시그림 1]에 표시된 바와 같다고 하자. 다음 값 x_1은 $x_1 = H(x_0)$이 되는데 이 값이 [예시그림 1]의 y축에 표시되어 있다. 이 점으로부터 수평선을 직선 $y = x$와 만날 때까지 그으면 그 교점의 x좌표는 당연히 x_1이 되며, 이 값이 x축에 표시 되어 있다. 이 x_1을 새로운 초기값으로 점화식을 다시 적용하면 다음 값 x_2는 $x_2 = H(x_1)$이 되며 이 값이 y축에 x_2로 표시되어 있다. 이 과정을 반복해서 [예시그림 1]에서와 같이 굵게 표시한 화살표들을 그릴 수 있다. 이와 같이 x_0, x_1, $x_2 \cdots$의 움직임에 관한 정보를 화살표들로 그린 것을 x_0에서 시작하는 거미줄그림이라 부른다.



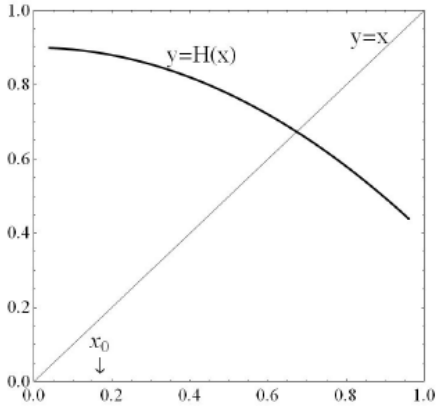
[예시그림 1]

만약 x^*가 $H(x^*) = x^*$를 만족하면 이 x^*를 점화식$x_{n+1} = H(x_n)$의 부동점이라 부른다. [예시그림 1]에서 볼 수 있듯이 x^*는 $y = H(x)$의 그래프와 직선 $y = x$가 만나는 점의 x좌표이다. x^*가 점화식 $x_{n+1} = H(x_n)$의 부동점일 때, x^*를 포함하는 적절한 개구간을 잡아서 그 개구간에 속하는 모든 c에 대하여 $x_0 = c$, $x_{n+1} = H(x_n)$으로 정의된 수열 $\{x_n\}$이 x^*로 수렴하도록 할 수 있으면, x^*를 안정성을 가진 부동점 또는 줄여서 안정부동점이라 부른다. [예시그림 1]의 경우 x^*는 안정부동점이다. 안정부동점이 아닌 부동점을 불안정부동점이라 부른다.

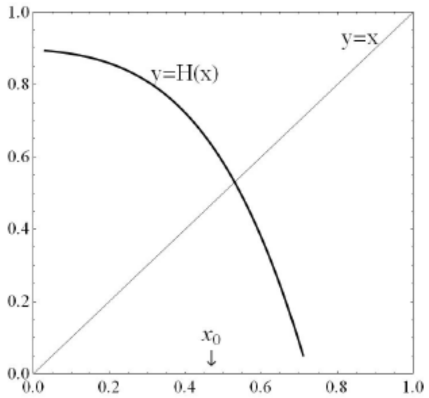
아래에 주어진 [논제 3: 그림 1], [논제 3: 그림 2], [논제 3: 그림 3]에서 함수 $y=H(x)$의 그래프는 굵은 선으로, $y=x$의 그래프는 가는 선으로 표시되어 있다.



[논제 3: 그림 1]



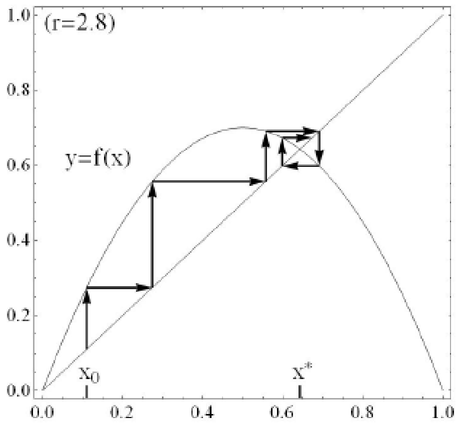
[논제 3: 그림 2]



[논제 3: 그림 3]

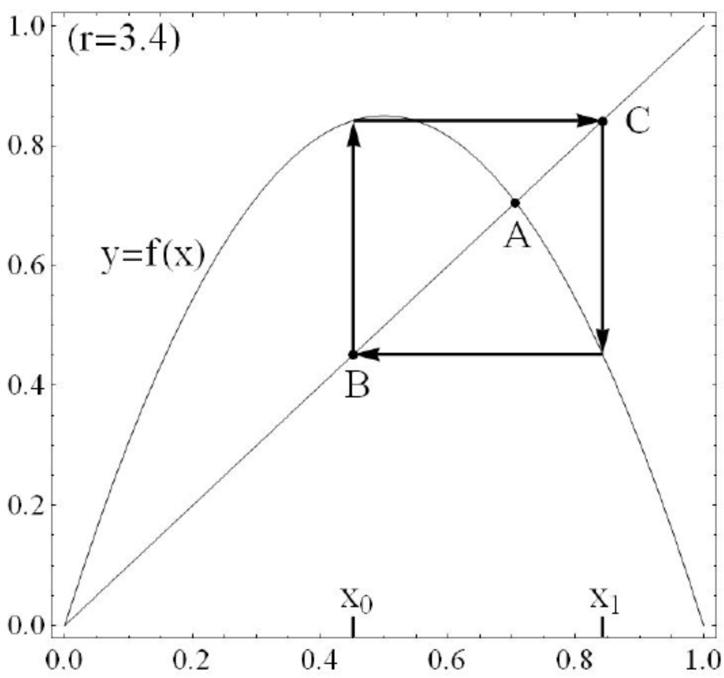
[논제 3] [그림 1~3]의 경우에 각 그림에 표시된 x_0에서 시작하는 거미줄그림의 개형을 답안지에 그리시오. 이를 기반으로 부동점의 안정성 여부를 일반적인 경우에 대하여 곡선 $y=H(x)$의 기울기와 관련해서 논하시오. (단, 함수 $H(x)$가 미분가능하고 도함수가 연속이며, 부동점 x^*에서 곡선 $y=H(x)$의 기울기는 ± 1이 아니라고 가정한다.)

(라) r을 양의 상수라 하고 $f(x)=rx(1-x)$라 하자. 그리고 $0<c<1$에 대하여 점화식 $x_{n+1}=f(x_n)=rx_n(1-x_n)$ 및 초기값 $x_0=c$로 정의된 수열 $\{x_n\}$의 행동을 살펴보기로 하자. 앞으로 이 수열을 c에서 출발한 수열이라 부르자. 또한 c를 $\{x_n\}$의 출발점이라 하자.



[예시그림 2]

[예시그림 2]는 $r=2.8$일 때 거미줄그림의 예를 보여주고 있다. 이 그림을 통하여 0과 1 사이에 있는 모든 c에 대해서 c에서 출발한 수열이 부동점 x^*로 수렴함을 볼 수 있다. [예시그림 3]은 $r=3.4$인 경우를 보여주고 있는데, 그 특징은 특별한 점 x_0과 x_1이 존재해서 x_0에서 출발한 수열이 x_1으로 간 후 다시 x_0으로 돌아오는 주기 2의 주기적 패턴을 보이고 있다는 것이다.



[예시그림 3]

이제 상수 r의 값을 3.4에서 점차 증가시키면 4, 8, 16, 32등의 2^n $(n=2,\ 3,\ \cdots)$을 주기로 갖는 주기점들이 점차적으로 출현한다. 그리고 r이 약 3.57을 넘게 되면, 소위 카오스 현상이 나타난다. 아래의 <예시표 1>은 이 카오스 현상에 대한 이해를 돕기 위한 것으로 상수 r값을 3.79, 3.80, 3.81로 주

고, 이 각각의 경우에 대하여 0.2999, 0.3000, 0.3001에서 출발한 수열의 x_{600} 값을 컴퓨터로 계산한 결과이다.

<예시표 1> 상수 r과 초기값 x_0에 따른 x_{600}값

r \ x_0	0.2999	0.3000	0.3001
3.79	0.697998	0.630530	0.271574
3.80	0.882534	0.545618	0.687939
3.81	0.634374	0.700818	0.927301

이 표에서 출발점의 미소한 변화가 시간이 흐른 후에는 큰 차이를 가져옴을 관찰할 수 있다. 또한 상수 r을 근소하게 변화시켜도 결과 값에 큰 차이가 나타나는 것을 확인할 수 있다. 이와 같이 출발점의 미소한 차이에 대해 큰 변화를 보이는 것이 카오스 현상의 주요한 특징이다. 또한 카오스 현상은 대부분의 출발점 c에 대해 c에서 출발한 수열이 매우 불규칙해진다는 특징을 가진다. 이러한 카오스 현상은 점화식으로 주어진 수열뿐만 아니라 자연현상에서 도출된 많은 미분방정식들에서도 나타나는데 이 현상은 흥미로움을 넘어 자연현상의 이해에 새로운 도전의 장을 열어주고 있다.

[논제 4-1] [예시그림 3]에서 출발점이 임의의 점일 때, n이 증가함에 따라 수열 $\{x_n\}$이 어떻게 행동하는지 추정하고 그 이유를 설명하시오.

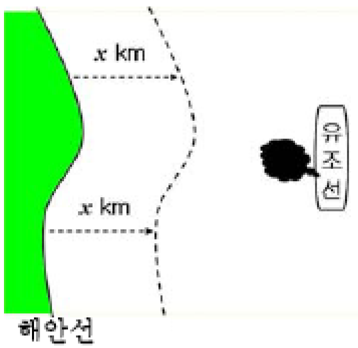
[논제 4-2] 자연법칙이 미분방정식으로 기술되고 이 미분방정식의 해는 초기조건에 의해 유일하게 결정된다는 사실은 “어느 한 시점의 상태가 미래를 완벽하게 결정한다”는 결정론적 세계관에 지대한 영향을 주었다. 그러나 이러한 결정론적 자연법칙의 지배를 받는 자연현상이라도 만약 그것이 카오스 성질을 가지고 있다면, 초기 조건이 미래를 유일하게 결정한다는 사실에도 불구하고 인간이 미래 시점의 상태를 정확하게 예단하는 일은 실질적으로 불가능하게 된다. 그 이유에 대해 위에서 제시한 사실들을 기반으로 설명하고, 이 사실이 결정론적 세계관에 미치는 영향에 대해 논하시오.

[실전논제4]

다음 제시문은 해양 원유유출 사고에 관한 것이다. 제시문을 읽고 아래 문제에 답하시오. (이 문제는 논리적 사고능력을 평가하기 위한 것이므로 계산능력보다는 수리 분석과 문제해결 능력을 검증합니다.)<17> 08 연세대 정시

(가) 해안선에서 대략 10 km 떨어진 곳에 정박 중인 유조선이 해상 크레인선과 충돌하면서 원유 1만 톤이 바다로 유출되는 사고가 발생했다고 하자. 유출된 원유는 바람과 해류를 타고 해안선으로 이동하고 있다. 유출된 원유가 해안가에 도달하여 축적될 경우 막대한 경제적 손실을 입게 된다. 따라서 유출된 원유의 이동상황을 예측할 수 있다면, 효과적으로 방재작업을 할 수 있어 단기 피해를 줄일 수 있을 것이다.

(나) 조류와 풍향, 풍속 등이 시시각각으로 변화하고 있어 유출된 기름이 확산되는 것을 정확히 예측하는 것은 어려우나, 기름의 이동에 영향을 주는 여러 가지 요소들을 단순화하여 아래와 같은 수학적 모델을 만들 수 있다. 사고 발생 후 a시간 경과했을 때, 오른쪽 그림과 같이 해안선으로부터 $x$km 이내의 연역에 퍼져있는 원유의 총량을 $F(x)$라 하자. (단, a는 양의 실수임.) 사고 발생 a 시간 후 유출된 원유 1만 톤은 해안선으로부터 9 ~ 10 km 사이에 퍼져있다고 하자. 즉, $0 \leq x < 9$일 때 $F(x)=0$이고, $x \geq 10$일 때 $F(x)=1$만 톤이 된다.



함수 $F(x)$가 $x>0$에서 미분가능하다고 가정하고, $f_1(x)=\frac{d}{dx}F(x)$ $(x>0)$, $f_1(0)=0$, 그리고 $f_2, f_3, \ldots$은 다음과 같이 정의한다.

㉠ $f_{n+1}(x)=\frac{4}{5}f_n(x)+\frac{1}{5}f_n(x+1)$ $(x \geq 0)$ $n=1,2,3,\cdots$

이 때, $\int_0^x f_n(s)ds$는 사고 발생 후 $a \times n$ 시간 경과했을 때, 해안선으로부터 $x\,km$ 이내의 영역에 퍼져있는 원유의 총량을 나타낸다. 그리고 사고 발생 후 $a \times n$ 시간 경과했을 때 해안가에 축적된 원유의 총량을 S_n이라 하고 이를 다음과 같이 표현한다.

㉡ $S_1=0$, $S_{n+1}=S_n+\frac{1}{5}\int_0^1 f_n(x)dx$ $(n=1,2,3,\cdots)$

이 모델에 따르면 $a=0.5$일 때, 사고 발생 5시간 후 기름이 해안가에서 처음 발견될 것으로 예상된다.

(다) 방재 대책본부는 사고 발생 16시간 후부터 12시간동안 방재작업에 투입할 수 있는 자원봉사자 천명을 긴급히 확보하였다. 자원봉사자가 방재작업에 한 번 투입되면 연속하여 4시간동안 방재작업을 한 후 귀가시키기로 하였다.

그리고 환경오염을 고려하여 기름이 해안가에 도달하는 즉시 처리하는 것을 원칙으로 하였다.

(1)

(a) 제시문 (나)의 모델이 실제 상황을 적절하게 반영했는지에 관한 자신의 견해를 간결하게 서술하시오.

(b) 제시문 (나)의 모델을 쉽게 이해하기 위해 $f_1(x) = \begin{cases} 1 \ (9 \le x < 10) \\ 0 \ (0 \le x < 9 \text{ 또는 } x \ge 10) \end{cases}$라 가정하자. 이때, 함수 f_1, f_2, f_3가 어떻게 변하는지 그래프를 그려보고, f_3을 f_1에 대한 식으로 표현해 보고, 이를 근거로 $f_n(x)$가 의미하는 바를 설명하시오.

(2) 제시문 (나)의 모델에서 $a = 1$일 때, 사고 발생 후 기름이 해안가에서 처음 발견되는 시간을 예측하고, 예측한 시간으로부터 2시간동안 해안가에 축적될 원유의 총량의 변화를 설명하시오.

(3) 제시문 (다)에서 $a = 2$일 때, 자원봉사자를 사고 발생 16시간 후부터 4시간 간격으로 투입하기로 하였다. 제시문 (나)의 모델을 근거로 자원봉사자 수를 어떤 비율로 투입하는 것이 가장 효율적인지 설명하시오.

[대표논제] <첨삭논제>

다음 물음에 답하시오. <18> 09 고려대 수시

그림 1에서 xy 평면 위의 $x^2+y^2 \leqq 1$을 만족하는 영역을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 A라고 한다.

그림 2에서 xy평면 위의 $0 \leqq y \leqq a(1-x^2)$을 만족하는 영역을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 B라고 한다. 단, a는 양의 실수이다.

그림 3은 그림 2에 표시된 영역을 y축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체를 나타낸다. 이 회전체를 z축에 수직인 평면 $z=k(-1 \leqq k \leqq 1)$로 자른 단면을 R_k라고 할 때, R_k는 평면 $z=k$에서

$$0 \leqq y \leqq a(1-k^2-x^2)$$

을 만족하는 영역임을 알 수 있다. 그림 3에 나타난 회전체를 다시 z축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 C라고 한다.

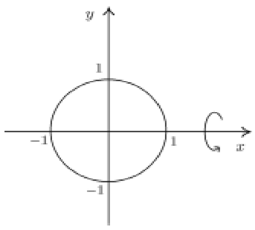


그림 1

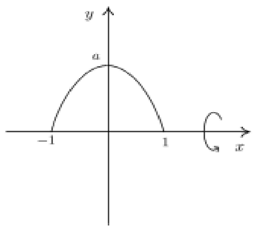


그림 2

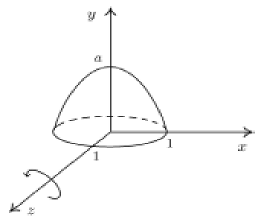


그림 3

(1) 점 $(0,\ 0,\ k)$에서 R_k 위의 점까지 거리의 최댓값을 구하시오.

(2) $\max\{A,\ B\} < C$ 를 만족하는 a의 조건을 찾으시오. 단, $\max\{A,\ B\}$는 A와 B의 최댓값을 나타낸다.

[실전논제1]

삼차정사각행렬 A와 B에 대하여 다음 등식이 성립한다.<19> 09 고려대 수시2

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

자연수 n에 대하여 좌표공간 위의 점 $P_n(a_n,\ b_n,\ c_n)$과 $Q_n(d_n,\ e_n,\ f_n)$의 성분이 다음 등식에 의해 정의된다.

$$A^n\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \quad B^n\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_n \\ e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

(1) 원점 O와 세 점 $R(1,\ 0,\ 0)$, $S(1,\ 1,\ 0)$, $T(1,\ 1,\ 1)$에 대하여

$$\overrightarrow{OP_n}=x_n\overrightarrow{OR}+y_n\overrightarrow{OS}+z_n\overrightarrow{OT}$$

를 만족하는 실수 $x_n,\ y_n,\ z_n$을 찾으시오.

(2) 원점 O와 두 점 $P_n,\ P_{n+1}$에 의하여 만들어지는 삼각형 $\triangle OP_nP_{n+1}$의 둘레의 길이를 l_n이라고 할 때, 극한 $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값을 구하시오.

(3) 원점 O와 세 점 $P_n,\ Q_n,\ Q_{n+1}$에 의하여 만들어지는 사면체 $OP_nQ_nQ_{n+1}$의 부피를 V_n이라고 할 때, 극한 $\lim_{n\to\infty} V_n$의 값을 구하시오.

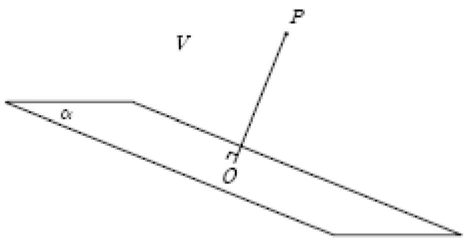
[실전논제2]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.<20> 08 고려대 정시

다음 그림과 같이 평면 α위에 있지 않은 한 점 $P(l,\ m,\ n)$를 지나는 직선이 평면 α와 원점 O에서 수직으로 만난다. 점 P의 좌표 $l,\ m,\ n$은 모두 자연수이다. 평면 α로 나누어지는 공간의 부분 중 점 P를 포함하는 부분을 V라 하고 V는 평면 α위의 점들을 포함하지 않는다고 하자. V에 속하는 점들 중 좌표의 성분이 모두 정수인 점들의 집합을 S라 하고 Q를 S에 속하는 한 점이라 할 때 다음의 정리가 성립한다.

[정리1] S에 속하는 모든 점 R이 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}$를 만족하면 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$는 l의 약수이다.

[정리2] S에 속하는 모든 점 R이 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}$를 만족하면 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 는 l, m, n 의 최대공약수이다.

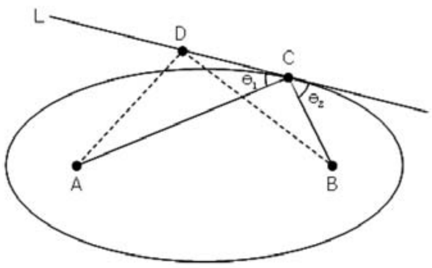


대우를 이용하여 제시문의 [정리 1]이 성립함을 보이고, [정리 1]을 이용하여 [정리 2]가 성립함을 설명하시오.

[대표논제] <첨삭논제>

아래 제시문은 기하학적인 논리와 빛의 성질을 이용하여 타원의 광학적 성질을 설명하고 있다. 이를 읽고 다음 질문들에 답하시오. <21> 08 연세대 모의논술

(타원의 광학적 성질) 평면위의 두 점 A, B로부터 거리의 합이 일정한 점들로 이루어진 곡선을 타원이라고 하고, 이 두 점을 타원의 초점이라고 한다. 라틴어로 초점은 불을 지피는 장소를 의미하는데, 그 이유는 타원의 모양을 따라 거울을 설치하고 한 초점에 불을 지피면 불빛이 타원표면에 설치한 거울에 반사되어 다른 초점으로 가기 때문이다.



타원위의 점 C 에서의 접선을 L 이라고 하면, 타원은 이차곡선이므로 타원과 직선 L은 C 에서만 만난다. 또한 C 를 제외한 직선 L 상의 임의의 점 D 는 타원 밖에 있다. 이 때, 초점 A, B로부터 D 까지 거리의 합이 초점 A, B 로부터 C 까지 거리의 합 보다 큼을 알 수 있다. 즉, 선분 $\overline{BD}$와 타원과의 교점을 E 라고 하면, 삼각형 $\triangle ADE$의 두변의 길이 합($|\overline{AD}|+|\overline{DE}|$)은 다른 한 변의 길이($|\overline{AE}|$)보다 크므로 $|\overline{AD}|+|\overline{DB}|=|\overline{AD}|+|\overline{DE}|+|\overline{EB}|>|\overline{AE}|+|\overline{EB}|$가 성립한다. 또한 E 는 타원위의 점이므로, 타원의 정의에 의하여 $|\overline{AE}|+|\overline{EB}|=|\overline{AC}|+|\overline{CB}|$이고, 따라서

$$|\overline{AD}|+|\overline{DB}|>|\overline{AC}|+|\overline{CB}|$$

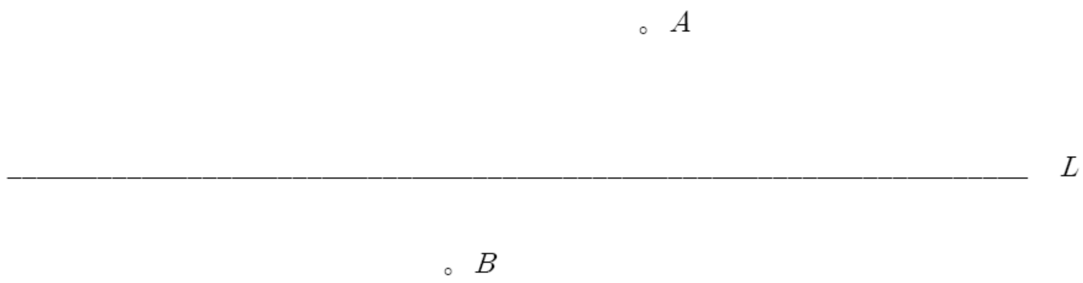
이다. 즉, A 에서 직선 L 상의 한 점을 지나 B 로 가는 최단 경로는 C 를 지나는 것이다.

이 최적의 점 C 는 다른 방법으로도 구할 수 있는데, B 를 직선 L 에 대하여 반사시킨 점 B' 와 A 를 직선으로 연결할 때 직선 L 이 만나는 점이 바로 그 최적의 점이 된다. 이 최적의 점이 C 이므로, 선분 $\overline{AC}$와 접선 L 사이의 각 θ_1과 선분 $\overline{BC}$ 와 접선 L 사이의 각 θ_2 가 같음을 알 수 있다.

$$\theta_1=\pi-\measuredangle B'CD=\theta_2$$

따라서 빛이 A 에서 출발하여 C 에 도달하면, 빛이 반사할 때 입사각 $\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)$과 반사각$\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)$이 같기 때문에, C 에서 반사된 빛은 B 로 향하게 된다.

(1) 아래 그림에서와 같이 직선 L 을 사이에 두고 두 점 A, B가 있다고 하자. 직선 위의 점 C 에 대하여 C 로부터 두 점 사이의 거리의 차 즉, $||\overline{AC}|-|\overline{BC}||$가 최대가 되려면 점 C 가 어디에 놓여 있어야 하는지를 논리적으로 설명하시오.



(2) 평면위의 두 점 A, B로부터 거리의 차가 일정한 점들로 이루어진 곡선을 쌍곡선이라고 하고, 이 두 점을 쌍곡선의 초점이라고 한다. 쌍곡선의 모양을 따라 거울을 설치하고 한 초점에 불을 지피면 불빛이 쌍곡선 표면에 설치한 거울에 반사되어 어느 방향으로 진행하는지를 논리적으로 설명하시오. 타원의 광학적 성질을 설명하는 위의 제시문과 같이 기하학적인 논리와 빛의 성질에 근거하여 이 설명을 전개하시오.

[실전논제1]

아래의 제시문을 읽고 논제에 답하시오.<22> 2010 고려대 모의

(아) 길이가 1로 고정된 선분 $\overline{AB}$ 위에 A로부터 1-a만큼 떨어진 지점에 P가 있다. 그림 2와 같이 선분 $\overline{AB}$의 양 끝점이 한 변의 길이가 3인 정사각형 OCDE 의 변을 따라 움직이고 있다. 단, $0<a<1$이다.

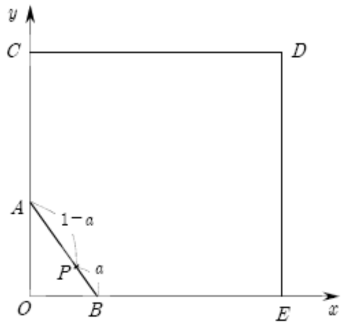


그림 2

(자) 그림 3과 같이 x축의 양의 방향과 이루는 각이 $\theta(0<\theta<\pi)$인 반직선 $\overrightarrow{OQ}$ 가 있다. 길이가 1로 고정된 선분 $\overline{AB}$ 위에 중점 P가 있고 A는 반직선 $\overrightarrow{OQ}$ 를 따라 움직이며 B는 양의 x축 위를 움직인다.

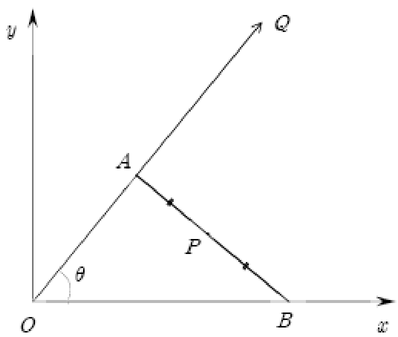


그림 3

(1) 그림 2에서 A가 원점 O를 출발하여 점 C,D,E를 거쳐서 다시 원점으로 돌아올 때 P가 그리는 자취에 대하여 설명하시오.

(2) 그림 2에서 A가 사각형의 둘레를 한 바퀴 돌았을 대 생기는 P의 자취와 정사각형 OCDE의 네 변 사이에 있는 영역을 x축으로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 부피를 $f(a)$라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} nf(\frac{1}{n})$ 을 구하시오.

(참고: 적분 $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 은 원점을 중심으로 하고 반지름이 r인 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$이다.)

(3) 그림 3에서 A가 원점 O에서 시작해서 1만큼 움직일 때 P가 그리는 자취에 대하여 설명하시오.

[실전논제2]

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.<23> 10 고려대 수시

(가) 그림 1과 같이 곡선 $y=x^2+1$ 위에 두 점 $P_1(a_1,\ a_1^2+1)$과 $P_2(a_2,\ a_2^2+1)$가 있다. (단 $a_1<0<a_2$ 이고 $a_1+a_2\neq 0$ 이다.) 점 P_1에서의 접선과 점 P_2에서의 접선 그리고 곡선에 의해 둘러싸인 부분을 S라 하자. 점 P_1에서의 접선과 x축과의 교점을 Q_1, 점 P_1에서 x축에 내린 수선의 발을 R_1, 그리고 각 $\angle Q_1P_1R_1$의 이등분선이 x축과 만나는 교점을 T_1이라 하자.

또한 두 점 P_1과 P_2로부터 시작해서 곡선 위의 점 $P_{n+2}\,(n\geq 1)$를 그 점에서의 접선이 직선 P_nP_{n+1}과 평행이 되도록 계속 반복해서 택하여 나간다고 하자. 그림 2는 이렇게 얻어지는 세 점 $P_n,\ P_{n+1},\ P_{n+2}$를 표시한 것이다. 이 세 점으로 만들어진 삼각형 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$의 넓이를 A_n이라 하고 선분 $\overline{P_nP_{n+1}}$과 선분 $\overline{P_{n+1}P_{n+2}}$가 이루는 각을 θ_n이라 하자.

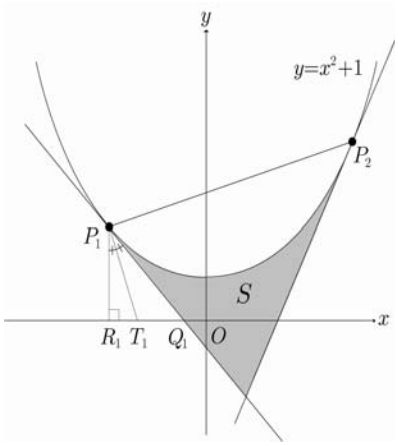


그림 1

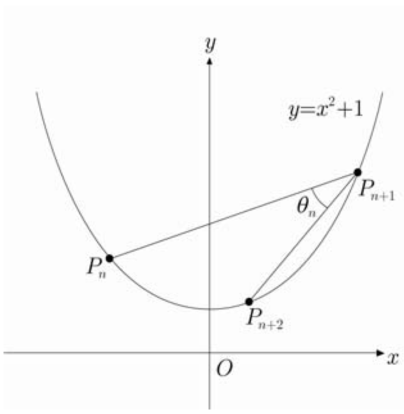


그림 2

(a) 그림 1의 S의 넓이를 $a_2 - a_1$의 식으로 나타내시오.

(b) 벡터를 활용하여 T_1의 x좌표를 구하시오.

(c) 삼각형 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$의 넓이 A_n을 $a_2 - a_1$의 식으로 나타내시오.

(d) 점 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ 들이 수렴하는 점을 $P(a, a^2+1)$라 하자. 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{\tan\theta_n}{a_{n+1} - a_n} \right|$을 a의 식으로 나타내시오.

SKY 수리논술
9

확률과 통계

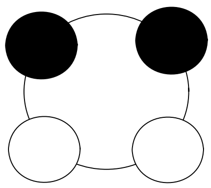
[대표논제]

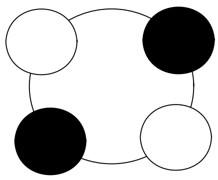
다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.<24> 08 고려대 수시2

(가) 어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를 다음과 같이 정의하고, 그것을 수학적 확률이라고 한다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{r}{n}$$

예를 들어 검은 구슬 두 개와 흰 구슬 두 개를 꿰어 염주를 만드는 경우를 생각해 보자. 구슬 색의 배치에 따라 다음과 같이 두 가지 종류의 염주를 만들 수 있다.


a형 염주


b형 염주

구슬의 색을 보지 않고 임의로 구슬을 배치할 때 a형 염주가 만들어지는 사건을 A라 하자. 표본공간 S가 두 개의 근원사건으로 이루어져 있으며 사건 A는 한 개의 근원사건으로 이루어져 있으므로 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$$

이다.

(나) 어느 제약회사에서 1만 정의 알약을 생산하였다. 그런데 1정의 알약이 모조 알약으로 바뀌는 일이 발생하였다. 알약이 진품인가 모조품인가를 구별하는 기술을 이용할 경우 진품 알약은 90%의 확률로 진품으로 판정되고 10%의 확률로 모조품으로 판정된다. 그리고 모조품 알약은 90%의 확률로 모조품으로 판정되고 10%의 확률로 진품으로 판정된다.

임의의 알약 1정을 검사한 결과 모조품이라는 판정이 나왔다. 이 때 그 알약이 모조품일 확률은 90%이다.

제시문 (가)와 (나)에서 올바르게 서술되지 않은 부분이 있으면 바르게 고치고, 그 과정을 설명하시오.

[실전논제1]

컴퓨터를 이용하여 특정한 작업을 수행할 때, 어떻게 컴퓨터에 명령하느냐에 따라 빠른 시간 안에 원하는 정보를 획득하기도 하고 그렇지 못하기도 한다. 시간의 중요성이 빠르게 인식되고 있는 현대사회에서는, 컴퓨터를 효율적으로 이용하여 원하는 정보를 빠른 시간 내에 생산하는 명령체계(알고리즘)를 개발 이용하는 것이 중요한 이슈가 되고 있다. 아래에서는, 임의의 n개의 서로 다른 숫자 $a_1, \cdots, a_n$이 컴퓨터에 입력되었을 때 이를 증가하는 순서로 정리하는 두 가지의 다른 알고리즘을 소개하고 있다.<25> 08 모의논술

(알고리즘 1)

스텝 1. a_1에 새로 이름을 주어 b_1이라고 하자.

스텝 2. $a_1, \cdots, a_k$를 증가하는 순서대로 정리하여 $b_1, \cdots, b_k$라고 부르기로 하자. a_{k+1}을 이미 정리되어 있는 $b_1, \cdots, b_k$와 비교하여 정리하려고 한다. 이를 위하여 a_{k+1}을 기존 $b_1, \cdots, b_k$의 작은 숫자부터 차례로 비교하여 a_{k+1}이 들어가야 할 위치를 알아내고 그 위치에 a_{k+1}를 집어넣는다.

스텝 3. 스텝 2를 반복하여 $a_1, \cdots, a_n$이 정리되면, 알고리즘을 종료한다.

(알고리즘 2)

스텝 1. a_1에 새로 이름을 주어 b_1이라고 하자.

스텝 2. $a_1, \cdots, a_k$를 증가하는 순서대로 정리하여 $b_1, \cdots, b_k$라고 부르기로 하자. a_{k+1}을 이미 정리되어 있는 $b_1, \cdots, b_k$와 비교하여 정리하려고 한다.

스텝 2-A. $b_1, \cdots, b_k$중 가운데 배치되어있는 $b_{[(k+1)/2]}$와 a_{k+1}을 비교하여, a_{k+1}이 $b_{[(k+1)/2]}$보다 작으면 a_{k+1}을 $b_{[(k+1)/2]}$의 왼쪽에 배치하고 반대의 경우 오른쪽에 배치한다.

스텝 2-B. a_{k+1}이 b_l보다 크고 b_{l+m+1}보다 작다고 하자. 이제 a_{k+1}을 b_l와 b_{l+m+1}사이에 배치되어있는 $b_{l+1}, \cdots, b_{l+m}$와 비교하여 정리하려고 한다. $b_{l+1}, \cdots, b_{l+m}$중 가운데 배치되어있는 $b_{l+[(m+1)/2]}$와 a_{k+1}을 비교하여, a_{k+1}이 $b_{l+[(m+1)/2]}$보다 작으면 a_{k+1}을 $b_{l+[(m+1)/2]}$의 왼쪽에 배치하고 반대의 경우에는 오른쪽에 배치한다.

스텝 2-C. 스텝 2-B를 반복하여 $a_1, \cdots, a_{k+1}$이 정리되면,스텝 2를 종료한다.

스텝 3. 스텝 2를 반복하여 $a_1, \cdots, a_n$이 정리되면, 알고리즘을 종료한다.

(1) 위 두 알고리즘 중 어느 알고리즘이 우수한지 판단하기 위하여 알고리즘의 성능을 측정하는 지표를 만들고, 지표의 적정성에 관하여 논하시오.

(2) (1)에서 제시한 지표를 이용하여 어느 알고리즘이 우수한지 판정하고, 판정근거를 제시하시오.

학교발표 자료 및 예시답안

<1> [예시답안]

1-1.

가) a_3은 a_1+a_2이다.

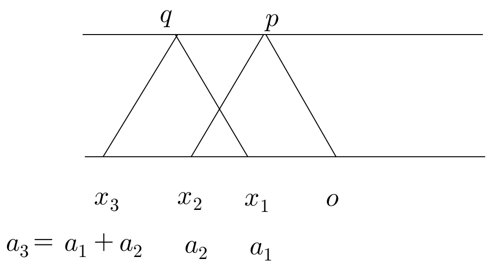
$\overline{ox_1}//\overline{pq}$, $\overline{op}//\overline{x_1q}$이므로 사각형 ox_1qp는 평행사변형이다.

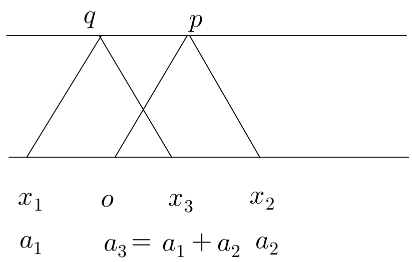
평행사변형의 대변의 길이는 같으므로 $\overline{ox_1}=\overline{pq}$이다.

$\overline{x_2x_3}//\overline{pq}$, $\overline{px_2}//\overline{qx_3}$이므로 $\square x_2x_3qp$는 평행사변형이고, $\overline{pq}=\overline{x_2x_3}$이다.

따라서 $\overline{ox_1}=\overline{x_2x_3}$이다.

$\overline{x_2x_3}$는 a_3-a_2이고 $\overline{ox_1}$은 a_1이므로 $a_3-a_2=a_1$, $a_3=a_1+a_2$이다. 이는 다음 그림에서 보는 바와 같이 x_1, x_2가 어느 위치에 있든 성립한다.

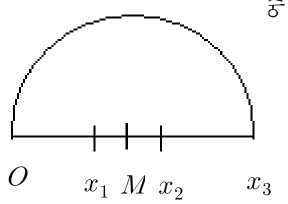




x_3을 찾는 다른 방법은 다음과 같다.(하나의 예)

① x_1과 x_2의 중점을 찾는다

② 중점을 M이라 할 때 M을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{OM}$인 원을 그린다.
중 O가 아닌 점을 x_3라 한다.



나) b_3은 $b_3=b_1b_2$이다.

$\overline{e'v}//\overline{y_2w}$이므로 $\triangle o'e'v$와 $\triangle o'y_2w$는 닮음이다. $\overline{o'e'}:\overline{o'y_2}=\overline{o'v}:\overline{o'w}$이고,

$1:b_2=\overline{o'v}:\overline{o'w}$이다.

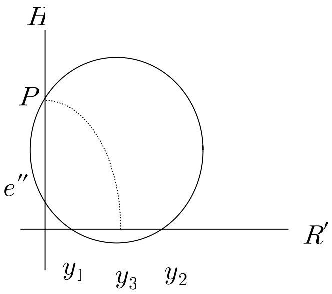
또한 $\triangle o'vy_1$과 $\triangle o'wy_3$은 $\overline{vy_1}//\overline{wy_3}$이므로 닮음이다.

따라서, $\overline{o'v}:\overline{o'w}=\overline{o'v}:\overline{o'w}$이다.

즉, $1:b_2=b_1:b_3$이고 $b_3=b_1b_2$이다.

이러한 관계는 y_1, y_2가 o'의 왼쪽에 있든 오른쪽에 있든 항상 성립함을 확인할 수 있다.
y_3을 찾는 다른 방법은 다음과 같다.(하나의 예)

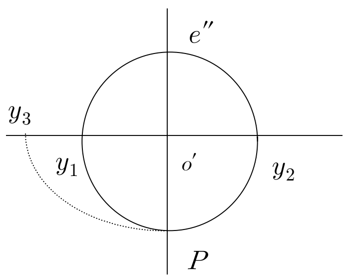
① o'를 지나며 R'와 수직인 직선 H를 긋는다.
② o'로부터 거리가 $\overline{o'e'}$와 같은 위쪽에 있는 점을 e''라 한다.
③ y_1과 y_2, e''를 지나는 원 C를 그린다.
④ 원 C와 H가 만나는 점을 P라 한다.
⑤ o'를 중심으로 점 P를 시계 방향으로 회전시켰을 때 R'와 만나는 점이 y_3이다.



($b_1 > 0,\ b_2 > 0$일 때)

$\overline{o'y_1} \times \overline{o'y_2} = \overline{o'e''} \times \overline{o'P} = \overline{o'P}$

$b_3 = b_1 b_2$

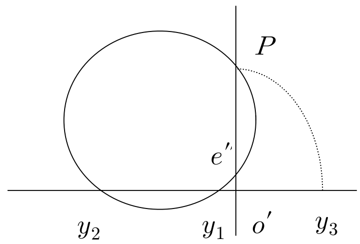


($b_1 < 0, b_2 > 0$일 때)

$\overline{o'y_1} \times \overline{o'y_2} = \overline{o'e''} \times \overline{o'P}$

$\overline{o'P} = |b_1 b_2|$

$b_3 = b_1 b_2\ \ (b_3 < 0)$



($b_1 < 0,\ b_2 < 0$일 때)

$\overline{o'y_1} \times \overline{o'y_2} = \overline{o'e''} \times \overline{o'P}$

$\overline{o'P} = |b_1| \times |b_2|$

$b_3 = b_1 b_2 (b_3 > 0)$

1-2. 문제의 조건에서 다음이 성립한다.

$$f'(0) = 1, f(0) = 1, f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, f(a_3) = b_3$$

이 때, $a_3 = a_1 + a_2, b_3 = b_1 b_2$이므로 임의의 a_1, a_2에 대하여 $f(a_1 + a_2) = f(a_1)f(a_2)$가 성립한다.
또한 함수 f는 미분가능하므로 다음이 성립한다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h}$$

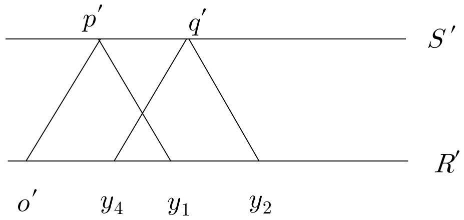
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x)(f(h) - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)(f(h) - f(0))}{h} \quad (\because f(0) = 1)$$

$$= f(x)f'(0)\ (\because \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0))$$

$$= f(x)\ (\because f'(0) = 1)$$

따라서 $\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} f(t)dt = \int_{a_1}^{a_2} f'(t)dt = [f(t)]_{a_1}^{a_2} = f(a_2) - f(a_1) = b_2 - b_1$

이 성립한다.
$b_2 - b_1$을 나타내는 점을 y_4라 하면 다음과 같이 R'상에 y_4를 작도할 수 있다.



① R'와 평행인 S'를 그린다.

② S'상에 점 p'를 잡아 $\overline{op'}, \overline{p'y_1}$를 그린다.

③ y_2를 지나며 $\overline{p'y_1}$에 평행한 직선과 S'의 교점을 q'라 한다.

④ q'를 지나며 $\overline{o'p'}$와 평행인 직선이 R'과 만나는 점을 y_4라 한다.

1-3.

$\triangle oep$ 와 $\triangle oz_2q$ 는 닮음이고 $\triangle oxp$와 $\triangle oz_1q$는 닮음이므로 x에 대응하는 수를 m이라 할 때 $1 : c_2 = \overline{op} : \overline{oq} = -m : -c_1$이 성립한다. 즉, $-mc_2 = -c_1$, $m = \dfrac{c_1}{c_2}$이다.

$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$에 따라 c_n수열을 나열하면 다음과 같다.

$$mc_2, c_2, (m+1)c_2, (m+2)c_2, (2m+3)c_2, (3m+5)c_2, \cdots$$

수열 d_n을 $d_1 = 2, d_2 = 3, d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$이라 정의하자.

그러면 $c_{n+4} = (d_n m + d_{n+1})c_2 \quad (n \ge 1$일 때)가 성립한다. $k > 4$일 때 처음으로 $c_k = 0$을 만족한다는 것은 $n \ge 1$인 어떤 n에 대하여 $c_{n+4} = 0$ 이 성립한다는 것이다.

즉 $(d_n m + d_{n+1})c_2 = 0$ 이 된다는 것인데 $c_2 \ne 0$이므로 $m = -\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$이 성립한다.

이 때 $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$은 모든 n에 대하여 정수가 아니므로 m은 정수가 아니다.

그 이유는 다음과 같다.

수열 d_n은 증가수열이므로 다음 부등식이 성립한다.

$$d_{n+1} < d_{n+2} = d_{n+1} + d_y < d_{n+1} + d_{n+1}$$

$$d_{n+1} < d_{n+2} < 2d_{n+1}$$

$$1 < \frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} < 2 \ (n \ge 1)$$

따라서 $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$은 $n \ge 2$일 때 정수가 아니다. $n = 1$일 때 $\dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{3}{2}$이므로 역시 정수가 아니다. 즉 $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$은 항상 정수가 아니다. 그러므로 m은 정수가 아니다.

<다른 증명>

$\triangle oep$ 와 $\triangle oz_2q$ 는 닮음이고 $\triangle oxp$ 와 $\triangle oz_1q$는 닮음이므로 x에 대응하는 수를 m이라 할 때 $1 : c_2 = \overline{op} : \overline{oq} = -m : -c_1$이 성립한다. 즉, $-mc_2 = -c_1$, $m = \dfrac{c_1}{c_2}$이다.

$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$에 따라 c_n수열을 나열하면 다음과 같다.

$$mc_2, c_2, (m+1)c_2, (m+2)c_2, (2m+3)c_2, (3m+5)c_2, \cdots$$

만약 m이 정수라 하자.

$m = \dfrac{c_1}{c_2}$이므로 $m < 0$이다. 따라서 m은 음의 정수이다.

그런데 $m = -1$이면 $c_3 = 0$이 되어 $k > 4$일 때 처음으로 $c_k = 0$이라는데 모순이다.

즉, $m \neq -1$이다.

또한 $m = -2$이면 $c_4 = 0$이 되어 모순이다. $m \neq -2$이다.

그렇다면 m은 -3보다 작거나 같은 정수이다.

$m \leq -3$이면 $c_2 > 0$이기 때문에 $c_3 = (m+1)c_2 < 0$, $c_4 = (m+2)c_2 < 0$이다.

$c_n < 0$, $c_{n+1} < 0$ 이면 $c_{n+2} = c_n + c_{n+1} < 0$ 이므로 c_k는 $k > 4$일 때 항상 0보다 작다.

이는 $k > 4$일 때 c_k가 처음으로 0이 된다는 가정에 모순이다.

m이 정수라 하면 가정에 모순됨으로 m은 정수가 아니다.

<2> **[예시답안]**

(1) 폐구간 [a, b]를 2n 등분하여 각 등분점을 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ 이라 하고 $\Delta x = \dfrac{b-a}{2n}$라 하자. 또한 폐구간 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$에서 연속함수 $f(x)$의 최댓값이 M_k, 최솟값이 m_k라 할 때 $L = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot 2\Delta x$, $U = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot 2\Delta x$라 하자. 그러면 다음 부등식이 성립한다.

$$L \leqq \sum_{k=1}^{n} f(x_{2k}) 2\Delta x \leqq U$$

$n \to \infty$ 일 때 $U - L \to 0$ 이기 때문에 U와 L은 모두 $\int_a^b f(x)dx$에 수렴한다. 그러므로 $\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k}) 2\Delta x$ 도 $\int_a^b f(x)dx$에 수렴한다.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{2k}) 2\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

이다. 마찬가지 원리에 의해 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})2\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-2})2\Delta x = \int_a^b f(x)dx$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(p_1 f(x_{2k}) + p_2 f(x_{2k-1}) + p_3 f(x_{2k-2})\right)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{p_1\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k})\Delta x + p_2\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\Delta x + p_3\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-2})\Delta x\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{p_1}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k})2\Delta x + \frac{p_2}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})2\Delta x + \frac{p_3}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-2})2\Delta x\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{p_1}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k})2\Delta x + \lim_{n\to\infty}\frac{p_2}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})2\Delta x + \lim_{n\to\infty}\frac{p_3}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-2})2\Delta x\Big\}$$

$$= \frac{p_1}{2}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{p_2}{2}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{p_3}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{p_1+p_2+p_3}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

그러므로 식 ㉠에서 $p_1+p_2+p_3=2$ 이다.

같은 방법으로 ㉡을 생각하면 $\Delta x = \dfrac{b-a}{3n}$ 에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(q_1 f(x_{3k}) + q_2 f(x_{3k-1}) + q_3 f(x_{3k-2}) + q_4 f(x_{3k-3})\right)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{q_1}{3}\sum_{k=1}^{n} f(x_{3k})3\Delta x + \frac{q_2}{3}\sum_{k=1}^{n} f(x_{3k-1})3\Delta x + \frac{q_3}{3}\sum_{k=1}^{n} f(x_{3k-2})3\Delta x + \frac{q_4}{3}\sum_{k=1}^{n} f(x_{3k-3})3\Delta x\right\}$$

$$= \frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{3}\int_a^b f(x)\,dx$$

따라서 $q_1+q_2+q_3+q_4=3$ 이다.

(2)

(a) 모든 2차 다항함수 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 에 대하여

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = p_1 f(-1) + p_2 f(0) + p_3 f(1)$$

이 성립한다고 할 때 식의 좌변은

$$\int_{-1}^{1}(Ax^2+Bx+C)dx = 2\int_0^1 (Ax^2+C)dx = 2\left(\frac{A}{3}x^3+Cx\right)_0^1 = \frac{2A}{3}+2C \qquad \cdots \text{①}$$

로 나타내어진다. 또한 식의 우변은

$$p_1(A-B+C)+p_2C+p_3(A+B+C) = (p_1+p_3)A+(-p_1+p_3)B+(p_1+p_2+p_3)C \qquad \cdots \text{②}$$

이 때 식 ①과 ②는 임의의 A, B, C에 대하여 같은 값이 되어야 하므로

$$p_1+p_3=\frac{2}{3},\ -p_1+p_3=0,\ p_1+p_2+p_3=2$$

이 성립해야 한다. 이 연립방정식을 풀면 $p_1=p_3=\dfrac{1}{3}, p_2=\dfrac{4}{3}$ 이다.

(b) (a)에서 모든 2차 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) \quad \cdots \text{ ①}$$

이 성립한다. 주어진 문제에서 $x_{2k} - x_{2k-1} = x_{2k-1} - x_{2k-2} = \Delta x$ 라 하고 $t = \dfrac{x - x_{2k-1}}{\Delta x}$,

즉 $x = t\Delta x + x_{2k-1}$라 하자. 치환적분의 원리에 의해

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \Delta x f(t\Delta x + x_{2k-1})dt$$

가 성립하고 $f(t\Delta x + x_{2k-1})$도 2차 다항함수이므로 ①을 적용하면 다음이 성립한다.

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \Delta x f(t\Delta x + x_{2k-1})dt = \left(\frac{1}{3}f(x_{2k-2}) + \frac{4}{3}f(x_{2k-1}) + \frac{1}{3}f(x_{2k})\right)\Delta x$$

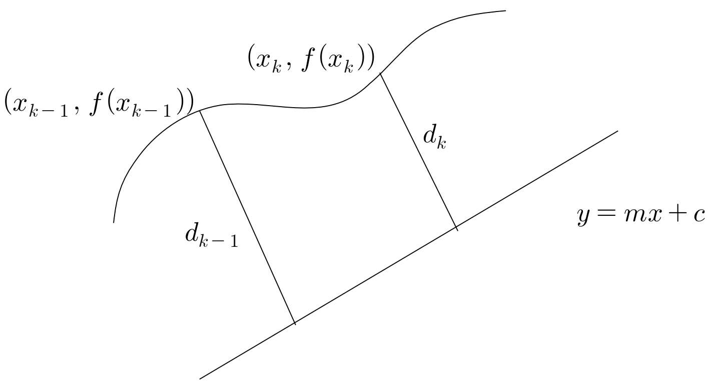
그러므로

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{k=1}^{10}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3}f(x_{2k}) + \frac{4}{3}(x_{2k-1}) + \frac{1}{3}f(x_{2k-2})\right)\Delta x \quad \left(\Delta x = \frac{b-a}{20}\right)$$

이다.

(3)

아래 그림과 같은 k번째 사다리꼴의 넓이를 구하기 위해 d_k와 h_k를 구하자.



d_k는 직선 $y = mx + c$와 $(x_k, f(x_k))$사이의 거리이므로 거리공식을 이용하면

$d_k = \dfrac{|f(x_k) - mx_k - c|}{\sqrt{1+m^2}}$이다. $f(x_k) > mx_k + c$이므로 $d_k = \dfrac{f(x_k) - mx_k - c}{\sqrt{1+m^2}}$이다.

마찬가지로 생각하면 $d_{k-1} = \dfrac{f(x_{k-1}) - mx_{k-1} - c}{\sqrt{1+m^2}}$이다.

또한 h_k는 직선 $y = -\dfrac{1}{m}(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$과 점 $(x_k, f(x_k))$사이의 거리이고

$(x_k, f(x_k))$는 $y > -\dfrac{1}{m}(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$ 인 영역에 있으므로 위와 같은 방법으로

계산하면 $h_k = \dfrac{[x_k + mf(x_k) - \{x_{k-1} + mf(x_{k-1})\}]}{\sqrt{1+m^2}}$이다.

$x_k - x_{k-1} = \triangle x$ 라 하면 h_k는

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left\{1+m\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{\triangle x}\right\}\triangle x \text{ 이다.}$$

k번째 사다리꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}(d_{k-1}+d_k)h_k$ 이므로 위의 식들을 대입하여 정리하면

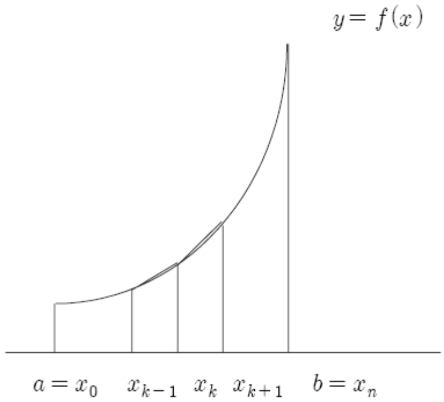
$$\frac{1}{1+m^2}\left(\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}-m\frac{x_k+x_{k-1}}{2}-c\right)\left(1+m\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{\triangle x}\right)\triangle x$$

이 된다. 따라서 다음 등식이 성립한다.

$$S_n = \frac{1}{1+m^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}-m\frac{x_k+x_{k-1}}{2}-c\right)\left(1+m\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{\Delta x}\right)\Delta x$$

<3> [학교발표자료]

[문제 1-1]



[그림 1]

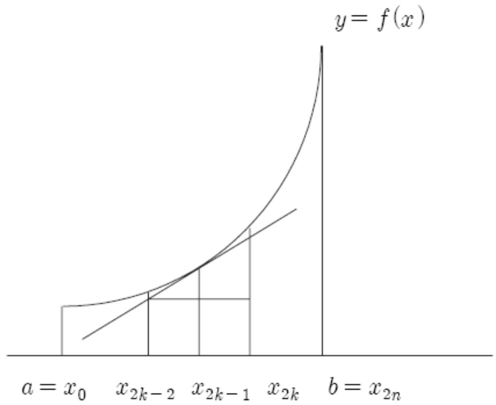
폐구간 $[a,\ b]$를 n개의 균등한 소구간으로 나누고, 각 소구간을 $[a=x_0,\ x_1]$ ⋯ $[a_{k-1},\ x+k]$ ⋯ $[x_{n-1},\ x_n=b]$이라고 하자. 그리고 $x_k-x_{k-1}=\triangle x=\frac{b-a}{n}$이다. 이때, 점 $(x_{k-1},\ f(x_{k-1}))$과 $(x_k,\ f(x_k))$사이의 선분의 길이는 $\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}$인데 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 평균값 정리의 의하여 $f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi)(x_k-x_{k-1})$을 만족하는 ξ가 x_{k-1}과 x_k사이에 존재한다. 따라서 위의 선분의 실이는 $\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(x_k-x_{k-1})^2[f'(\xi)]^2}$이 되므로 각 구간에서 구한 이러한 성분의 총합은 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi)]^2}(x_k-x_{k-1})$이 되어 구하는 곡선의 길이는

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi)]^2}\triangle x=\int_a^b\sqrt{1+[f'(\xi)]^2}\,dx \text{이다.}$$

[문제 1-2]

폐구간 $[a,\ b]$를 $2n$개의 균등한 소구간으로 나누고, 각 소구간을
$[a=x_0,\ x_1]\ \cdots\ [x_{2k-2},\ x_{2k-1}],\ [x_{2k-1},\ x_{2k}]\ \cdots\ [x_{2n-1},\ x_{2n}=b]$라 하자. 그러면
$x_{2k}-x_{2k-1}=\triangle x=\dfrac{b-a}{2n}$이다. 또한 점 $(x_{2k-1},\ f(x_{2k-1}))$에서의 접선의 식을 $y=g_k(x)$라 하면, $g_k(x)=f(x_{2k-1})+f^{'}(x_{2k-1})(x-x_{2k-1})$이다.
$\triangle g_{2k}=[f)x_{2k-1})+f^{'}(x_{2k-1})(x_{2k}-x_{2k-1})]-[f(x_{2k-1})+(f^{'}(x_{2k-1})(x_{2k-2}-x_{2k-1})]$라 놓고
$\triangle x_{2k}=x_{2k}-x_{2k-2}$라 하면, 이 접선위의 두 점 $(x_{2k-2},\ g_k(x_{2k-2}))$와 $(x_{2k},\ g_k(x_{2k}))$사이의 거리는 l_k는
$l_k=\sqrt{[\triangle g_{2k}]^2+[\triangle x_{2k}]^2}=\sqrt{1+[f^{'}(x_{2k-1})]^2}\,\triangle x_{2k}$가 된다.
따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}l_k$의 값은

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}l_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+[f^{'}(x_{2k-1})]^2}\,\triangle x_{2k}=\int_a^b\sqrt{1+[f^{'}(x)]^2}\,dx$$이다.



[그림 2]

[문제 1-3]

(1)과 (2)에서 유도한 바와 같이 두 값은 결국 같은 값을 가지게 된다.
다시 말하면, 이는 곡선의 길이는 교과서에서 말하고 있는 유한선분의 길이의 합을 극한으로 계산하는 정의와 이에 대응하는 다른 선분의 길이를 같은 방법으로 계산하여도 곡선의 길이를 얻을 수 있다는 것을 아는 사실이 중요하다.

(1)에서는 교과서에 나오는 것처럼 소구간에 대응하는 곡선 사이의 선분의 길이의 합의 극한값, (2)에서는 접선의 길이의 합의 극한값이 같은 곡선의 길이가 되었으므로, 이 두 가지와는 다른 선분의 길이나 그 합의 극한은 위의 결론과 같게 되는 선분을 찾아내는 문제이다.

여러 가지 답이 나올 수 있지만, 다음의 각 경우가 있을 수 있다.

가. 폐구간 $[a,\ b]$를 짝수개, 즉 $2rn$개의 균등한 소구간으로 나누고, 위의 방법을 적용하는 방법(r은 자연수)

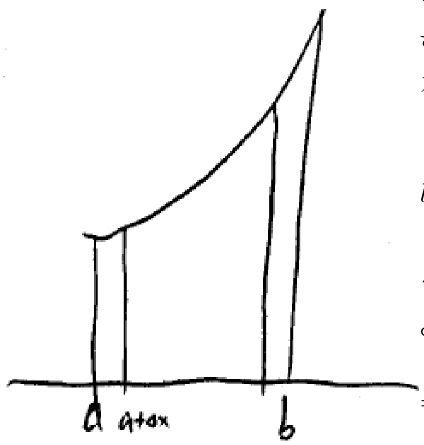
나. 폐구간 $[a,\ b]$를 rn개의 균등한 소구간으로 나누고, 위의 방법을 적용하는 방법 (r은 자연수).
다. (1)과 (2)의 혼합, 즉 교대로 선분의 길이를 사용하는 방법
라. 각 소구간 하나에 대응하는 접선의 길이의 합(즉, 위의 (2)에 사용한 선분의 길이의 반)을 사용하는 방법

[학생답안 및 평가]

▶ **전체문항 답안 사례 1**

[1-1] 답

정적분의 정의에 따르면, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\overline{x_k})\cdot\triangle x=\int_a^b f(x)dx$ (단, $\triangle x=\frac{b-a}{n}$, $\overline{x_k}$는 $a+k\triangle x$와 $a+(k+1)\triangle x$사이의 임의의 수)가 된다.



이제 곡선의 길이를 구해보면, $[a,\ b]$를 일단 n등분을 하자. 잘게 잘랐을 때 곡선의 길이는 직선의 길이와 같게 되므로 곡선의 길이를 l이라고 했을 때,

$$l=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(\triangle x)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}$$ (단, $\triangle x=\frac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\triangle x$)(이뉴는 피타고라스의 정리에 의해서)

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\left(\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{\triangle x}\right)^2}\triangle x$$

평균값정리에 의해 $x_k<\overline{x_k}<x_{k+1}$인 $\overline{x_k}$가 존재해서

$f'(\overline{x_k})=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{\triangle x}$가 된다.

$$l=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1+(f'(\overline{x_k}))^2}\triangle x\quad\left(\triangle x=\frac{b-a}{n},\ x_k<\overline{x_k}<x_{k+1}\right)$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx\qquad\text{(by 정적분의 정의)}$$

[1-2] 답

$y = g_k(x) = f'(x_{2k-1})(x - x_{2k-1}) + f(x_{2k-1})$이 된다.

l_k는 피타고라스 정리에 의해 $\sqrt{(x_{2k} - x_{2k-2})^2 + (f'(x_{2k-1})(x_{2x} - x_{2k-2}))^2}$ 이 된다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_{2k} - x_{2k-2})\sqrt{1+(f'(x_{2k-1}))^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\triangle x\sqrt{1+f'(x_{2k-1}))^2} \quad (\triangle x = \frac{b-a}{n},\ x_{2k-2} < x_{2k-1} < x_{2k})$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+f(x)^2}\,dx \qquad \text{(by 정적분의 정의)}$$

[1-3] 답

[1-1][1-2]에서 유도된 방법은 다르지만, 그 계산값은 같게 된다. 좀 더 일반적으로 $[a,\ b]$를 $2mn$등분 한 뒤 점$(x_{2mk-1}, f(x_{2mk-1}))$에서 접선의 식을 $g_k(x)$, 접선 위의 점 $(x_{2mk-m-1}, g_k(x_{2mk-m-1}))$와 $(x_{2mk+m-1}, g_k(x_{2mk+m-1}))$사이의 거리르 l_k라 하면,

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} l_k = \int_a^b \sqrt{1+f(x)^2}\,dx$가 됨을 쉽게 알 수 있다.

실제적으로 l_k를 구할 때에는, 등분을 할 필요도 없다.(리만적분의 결과에 따르면, 각 구간의 길이가 0에 수렴한다면 이와 같은 방법으로 연속함수에 대해서 정적분이 가능하다.)

평가

[1-1]

정적분의 정의와 평균값의 정리를 정확히 힌지하고 있고, 이를 적용하여 곡선의 식을 $f'(x)$이 포함된 정적분으로 적절히 유도하였다.

[1-2]

1-2에서 주어진 조건을 잘 이해하고 있고, 이를 적절히 이용할 줄 알고 있다. 정적분의 정의를 사용하여 간결하게 원하는 정적분 형태를 얻었다.

[1-3]

첫 번째 답안은 조금 부족하다. [1-1]과 [1-2]에서 유도한 결과가 왜 같은지를 설명하여야한다. 그러나 두 번째 답안은 매우 좋은 답이다. 지문에서 구간 $[a,\ b]$를 $2n$ 등분하였는지를 파악하면 이를 좀 더 일반화 할 수 있다는 것을 알 수 있을 것이다. 비록 선택한 두 점

이 [1-2]에서 말하고 있는 두 점과 대응되는 점은 아니지만, 이러한 생각을 찾아낸 것은 쉽지 않은 일이고, 따라서 많이 칭찬해주고 싶다.

▶ **전체문항 답안 사례 2**

[1-1] 답

$[a,\ b]$를 n등분하여 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\ \triangle x=\dfrac{b-a}{n},$

$x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n}(k=0,1,2,\cdots,n)$일 때

임의의 점 $(x_k,f(x_k)),\ (x_{k+1},f(x_{k+1}))$ 에 대하여

$$l_k=\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\{f(x_{k+1})-f(x_k)\}^2}=(x_{k+1}-x_k)\sqrt{1+\left\{\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k^2}\right\}^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}l_k=\lim_{n\to\infty}(x_{k+1}-x_k)\sqrt{1+\left\{\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\right\}^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1+\left\{\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\right\}^2}\cdot\triangle x$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

따라서 점$(a,f(a))$부터 점 $(b,f(b))$까지의 곡선의 길이는 $l=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이다.

[1-2] 답

[그림2]는 $[a,\ b]$를 $2n$등분하였으므로 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n}=b$, $\triangle x=\dfrac{b-a}{2n},$

$x_{2k}=a+\dfrac{2k(b-a)}{2n}=a+\dfrac{k(b-a)}{n}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$이라고 하자.

점 $(x_{2k-1},f(x_{2k-1}))$에서의 접선의 식은 $y=f'(x_{2k-1})(x-x_{2k-1})+f(x_{2k-1})$이므로

$g_k(x_{2k-2})=f'(x_{2k-1})(x_{2k-2}-x_{2k-1})+f(x_{2k-1})$

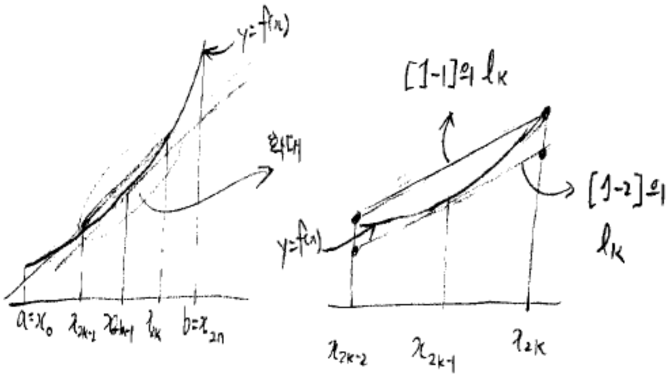
$g_k(x_{2k})=f'(x_{k-1})(x_{2k}-x_{2k-1})+f(x_{2k-1})$

$$l_k=\sqrt{(x_{2k}-x_{2k-2})^2+\{g_k(x_{2k})-g_k(x_{2k-2})\}^2}$$
$$=\sqrt{(x_{2k}-x_{2k-2})^2+\{f'(x_{2k-1})(x_{2k}-x_{2k-2})\}^2}$$
$$=(x_{2k}-x_{2k-2})\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}l_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_{2k}-x_{2k-2})\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(2\cdot\frac{b-a}{2n})\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2}$$
$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

[1-3] 답

[1-1]에서 구한 l_k를 [1-2]에서와 같이 $[a,\ b]$를 $2n$등분하여 생각해보면,
$\sqrt{(x_{2k}-x_{2k-2})^2+\{f(x_{2k})-f(x_{2k-2})\}^2}$ 와 같은 값이다.



구하고자 하는 길이 l의 $\frac{1}{n}$은 [1-1]의 l_k와 [1-2]의 l_k의 사이값인데. [1-1]의 l_k와 [1-2]의 l_k에 극한값을 취할 경우 값이 같아지므로, 구하고자 하는 길이 l은 [1-1]의 l_k나 [1-2]의 l_k의 극한값임을 알 수 있다.
따라서 [1-1]의 결과와 [1-2]의 결과는 같다.

[1-1]과 같은 결론을 유도하는 다른 방법으로는 [그림2]에서 $(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$와 $(x_{2k}, g_k(x_{2k}))$의 거리 d_k를 이용하면 된다.

$d_k=\sqrt{(x_{2k}-x_{2k-1})^2+\{f'(x_{2k-1})(x_{2k}-x_{2k-1})\}^2}$

$[a,\ b]$를 $2n$등분하였으므로 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n}=b$, $\triangle x=\frac{b-a}{2n}$.

$x_k=a+\frac{k(b-a)}{2n}(k=0,1,2,\cdots,2n)$이라고 하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}d_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(x_{2k}-x_{2k-1})\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2}\cdot\triangle x$$
$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

평가

[1-1]

결론 부분에서 $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$과 $f'(x)$사이의 관계를 설명하지 않아서 아쉬운 답이 되었다. 그러나 기본적인 접근 방법은 옳게 알고 있다.

[1-2]

[1-1]과 달리 [1-2]의 문제의 지문에서 $f'(x)$포함하는 관계식(접선의 식)을 얻을 수 있다. 따라서 [1-1]에서 정확한 이유없이 $f'(x)$를 사용하면 감점을 당한 학생이라도, [1-2]에서는 문제의 의도대로 논리를 전개하면, 위와 같이 정확한 정적분으로 표현된 곡선의 길이를 정확히 구할 수 있다.

[1-3]

“사이값”이란 말은 정확한 표현이 아니다. 위쪽의 선분의 길이의 합의 극한([1-1])과 아래쪽 접선의 길이의 합의 극한([1-2])이 같아지는 것이다. 다음 답안, 즉, [1-2]에서 구한 길이의 절반만을 취하여 정적분의 정의를 사용하면 같은 결과를 얻는다는 것은 좋은 답안 중의 하나이다.

▸ **[1-3]의 답안 사례**

[1-3]의 정답은 여러 가지가 있다. 학생들의 논리적이고 창의적인 사고력 측정을 위하여 다양한 답안이 정답이 될 수 있도록 출제한 문제이다. 다음은 몇 가지 다양한 답안의 예이다.

● **답안 사례 1**

[1-2]의 결과와 [1-1]의 결과가 같다. $[a,\, b]$를 $2n$등분한 뒤 $(x_{3k-2}, f(x_{3k-2}))$와 $(x_{3k-1}, f(x_{3k-1}))$을 지나는 직선을 그어 그 직선이 $x=x_{3k}$와 만나는 점을 A_k, $x=x_{3k+3}$과 만나는 점을 A_{k+1}이라 하고 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1}$을 구한다.

$$x_k = \frac{(3n-k)a+kb}{3n}$$

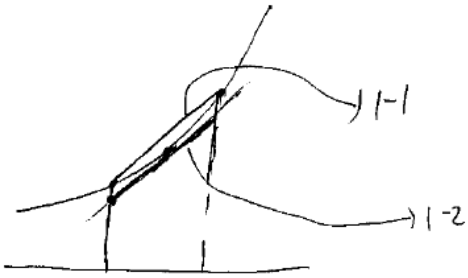
평가

[1-2]의 지문에서 구간 $[a,\, b]$를 $2n$등분한 것을 $3n$등분 한 것으로 생각해본 답안이다. 그러나 [1-2]에서 사용한 접선위의 두 점을 선택한 것이 아니기 때문에 선택한 점들 사이의 거리에서 $f'(x)$를 도출하려면 역시 [1-1]에서 사용한 평균값의 정리를 사용하여야한다. 이러한 논점이 빠져 있기는 하지만, 주어진 구간을 $3n$등분한 것으로 생각해본 아이디어는 좋은 생각이다.

● **답안 사례 2**

[1-1]과 [1-2]의 결과를 비교해보면 [1-1]은 곡선 $f(x)$의 도함수를 이용해 값이 표현되었고 [1-2]는 접선의 방정식을 이용해 표현되었다. 그러나 결과는 같다.
이것은 극한의 개념을 도입했기에 가능한 것이다.
두 결과를 얻는 과정에서 큰 차이점은 [1-1]은 곡선 위의 두 점을 연결한 길이를 무한히

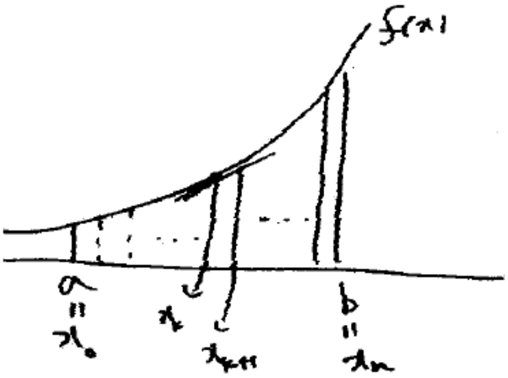
더한 것이고 [1-2]는 두 직선에 의해 잘라진 접선의 길이를 무한히 더한 것이데,
그림으로 살펴보면 무한히 나누었을 때



[1-1]은 이 길이를 무한히 더한 것이고

[1-2]는 이 길이를 무한히 더한 것인데, 결과값은 같다. 같은 이유는 극한의 개념이 도입되었기에 가능한 것이다.

다른 방법을 생각해보면
$(x_k, f(x_k))$에서의 접선식을 $g_k(x)$라 할 때
$(x_k, g_k(x_k))$와 $(x_{k+1}, g_k(x_{k+1}))$사이의 거리를 무한히 더해도 같은 결과가 나올 것이다.
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(g_k(x_{k+1})-g_k(x_k))^2}$를 계산해도 같은 결과를 얻을 수 있다.



평가

[1-2]의 지문에서 구간 $[a,\ b]$를 $2n$등분한 것을 잘 이해하고 있고, 이를 쉽게 n등분한 것으로 생각하여도 같은 결과를 유도할 수 있다는 사실을 간단하게 설명하고 있다. 역시 좋은 답이다.

● **답안 사례 3**

[1-1][1-2]에서 유도된 방법은 다르지만, 그 계산값은 같게 된다.
좀 더 일반적으로 $[a,\ b]$를 $2mn$등분을 한 뒤 점$(x_{2mk-1}, f(x_{2mk-1}))$에서 접선의 식을 $g_k(x)$, 접선 위의 점 $(x_{2mk-m-1}, g_k(x_{2mk-m-1}))$와 $(x_{2mk+m-1}, g_k(x_{2mk+m-1}))$사이의 거리를 l_k라 하면,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1} l_k = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$가 됨을 쉽게 알 수 있다.
실제적으로 l_k를 구할 때에는 등분을 할 필요도 없다.(리만적분의 결과에 따르면, 각 구간의 길이가 0에 수렴한다면 이와 같은 방법으로 연속함수에 대해서 정적분이 가능하다.)

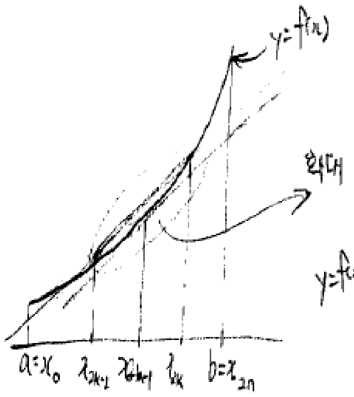
평가

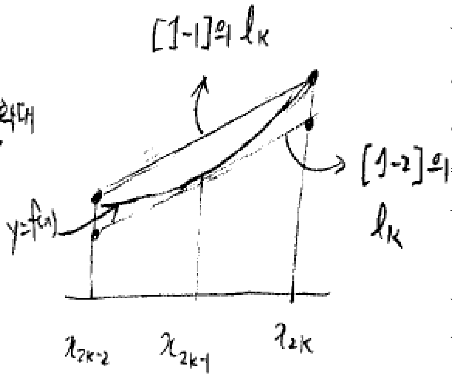
[1-2]의 지문에서 구간 $[a,\ b]$를 $2n$등분한 것을 잘 이해하고 있고, 이를 더욱 일반화하여 $2mn$등분하는 경우를 생각해내었다. 비록 선택한 두 점이 [1-2]에서 말하고 있는 경우의

정확한 일반화는 아니지만 가장 훌륭한 답안 중의 하나이다.

● 답안 사례 4

[1-1]에서 구한 l_k를 [1-2]에서와 같이 $[a,\ b]$를 $2n$등분하여 생각해보면,
$\sqrt{(x_{2k}-x_{2k-2})^2+\{f(x_{2k})-f(x_{2k-2})\}^2}$ 와 같은 값이다.





구하고자 하는 길이 l의 $\dfrac{1}{n}$은 [1-1]의 l_k와 [1-2]의 l_k의 사이값인데. [1-1]의 l_k와 [1-2]의 l_k에 극한값을 취할 경우 값이 같아지므로, 구하고자 하는 길이 l은 [1-1]의 l_k나 [1-2]의 l_k의 극한값임을 알 수 있다.
따라서 [1-1]의 결과와 [1-2]의 결과는 같다.

[1-1]과 같은 결론을 유도하는 다른 방법으로는 [그림2]에서 $(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$와 $(x_{2k}, g_k(x_{2k}))$의 거리 d_k를 이용하면 된다.

$$d_k=\sqrt{(x_{2k}-x_{2k-1})^2+\{f'(x_{2k-1})(x_{2k}-x_{2k-1})\}^2}$$

$[a,\ b]$를 $2n$등분하였으므로 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n}=b$, $\triangle x=\dfrac{b-a}{2n}$.

$x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{2n}(k=0,1,2,\cdots,2n)$이라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}d_k&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(x_{2k}-x_{2k-1})\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2}\cdot\triangle x\\&=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\end{aligned}$$

평가

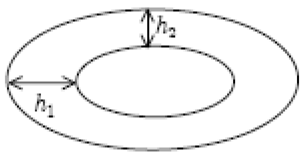
문제의 의미를 잘 파악하고 있다. [1-2]의 지문에서 구간 $[a,\ b]$를 $2n$등분하여 논리를 절대한 것을 이해하고 있고, 또한 [1-2]에서 정의한 접선의 길이 중에서 $\dfrac{1}{2}$만을 이용하여도 같은 결과를 얻는다는 사실을 잘 설명하고 있다. 좋은 답안이다.

<4> [학교발표자료]

[학교측 평가 기준]
원기둥을 45도 각도로 자르는 경사면에서 생기는 도형과 구(球)를 이용하여 주어진 상황에서 미분과 적분의 근원적인 개념을 창의적으로 적용하는 방안을 묻고자 하였다. 두 제시문의 성격을 정확히 파악한 후 상황을 잘 나타내주는 그림과 두 상황을 적절히 대조하면 서 잘못된 논리를 체계적으로 지적하고 올바른 논리를 주장하였는지 여부를 평가하였다.

[답안1]

단면의 길이 $L(r)$ 을 구하는 과정에서 원기둥을 45° 각도로 자르면 그 단면의 모양은 타원형이 된다. 따라서 반지름이 각각 $r, r+h$의 원기둥을 45° 로 자르면 생기는 두 타원 사이의 거리는 측정지점에 따라 달라진다.



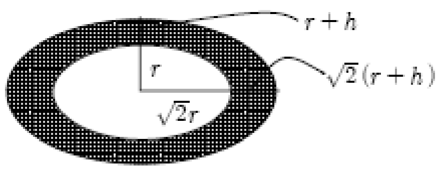
$h_1 \neq h_2$

따라서 이 띠를 풀었을때 생기는 직사각형의 높이 또한 h로 고정시킬 수 없다. 그러므로 위의 공식유도과정은 타당하지 않다. 이에 반해, 체적을 구하는 공식의 유도과정에서는 같은 원리로서 양파껍질을 펼쳤다고 생각하였을때, 분명 두께는 어느 부분에서나 $\frac{r}{n}$로 일정하다.(입체에서의 높이) 따라서, 구분구적법을 적용할 수 있고 n을 ∞로 근사시켜 구의 체적을 구할 수 있다. (타당함)

[학교 평가]
얇은 단면의 높이가 첫 번째 제시문에서는 일정하지 않고, 두 번째 제시문에서는 일정하다는 점을 적절한 그림의 배치와 첫 번째 상황과 두 번째 상황을 대비하여 잘 설명하고 있다.

[답안2]

단면의 면적 $A(r)$을 이용하여 단면적 길이 $L(r)$을 구하는 과정에서, $A(r+h)-A(r)$은 다음과 같은 도형이 된다. (세로의 길이는 정사영 공식을 이용하여 구한다.)



색칠한 부분의 위, 아래쪽 두께는 h이고 좌우의 두께는 $\sqrt{2}h$이므로 띠의 두께의 차이가 있어 $A(r+h)-A(r)=L(r)h$라고 할 수는 없다.

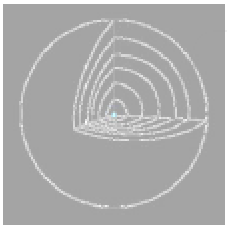
그런데 $L(r)h < A(r+h) - A(h) < L(r) \times \sqrt{2}\,h$ 이므로,

$$L(r) < \frac{A(r+h) - A(h)}{h} < L(r) \times \sqrt{2}$$

$L(r) \leqq \dfrac{d}{dx}A(r) \leqq \sqrt{2}\,L(r)$ 이 된다.

따라서 정확한 $L(r)$의 값은 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{d}{dr}A(r) \leqq L(r) \leqq \dfrac{d}{dr}A(r)$의 범위 내에 있다.

구의 표면적 $S(r)$을 이용하여 체적 $V(r)$을 구할 때 맨 처음 껍질은 반경이 $\dfrac{r}{n}$인 구



모양이므로, 이 껍질을 모두 더하면

$$V\left(\frac{r}{n}\right) + \left\{S\left(\frac{2}{n}r\right) + S\left(\frac{3}{n}r\right) + \cdots + S(r)\right\}\frac{r}{n}$$

$V\left(\dfrac{r}{n}\right) - S\left(\dfrac{r}{n}\right) \times \dfrac{r}{n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S\left(\frac{k}{n}r\right)\frac{r}{n}$ 이 구의 껍질의 총합이다.

여기서 n을 무한대로 보내면

$$V(0) - S(0) \times 0 + \int_0^2 S(x)dx = \int_0^r S(x)dx$$

이므로 과정상 약간의 오차는 있지만 결과는 같다.

[학교 평가]

얇은 단면의 높이가 첫 번째 제시문에서는 일정하지 않고, 두 번째 제시문에서는 일정하다는 점을 잘 설명하고 있다. 더욱이 상황을 설명하는 그림이 전달하고자 하는 의미를 잘 강조하고 있다. 나아가서, 첫 번째 제시문에서는 높이가 h와 $\sqrt{2}\,h$사이에서 일정하게 변한다는 사실을 강조하여 올바른 부등식까지 유도하였다.

<5> [학교발표자료]

출제의도:

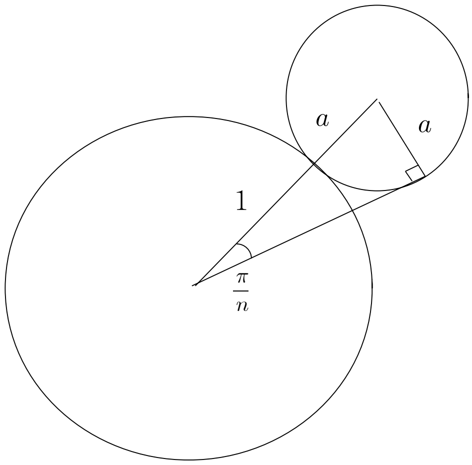
이 논제에서는 주어진 도형의 조건을 이용하여 두 변수 a와 n사이의 관계식을 구하고 큰 원주변의 작은 원들의 둘레의 합과 그 원들을 x축으로 회전시켰을 때 생성되는 회전체의 부피를 구할 수 있는지를 묻고 있다. 이 논제를 해결하기 위해서 삼각비, 삼각부등식, 원의 성질, 극한, 회전체의 부피 그리고 정적분의 정의와 같은 수학의 전반적인 이론을 주어진 상황에서 적절하게 활용할 수 있는지를 묻고 있으며 단순한 공식의 암기가 아닌 변화된 상황에서도 위의 이론을 적용할 수 있는지 묻고 있다.

논제해설:

(a) 두 변수 사이의 관계식을 구하기 위해서는 삼각비와 원이 접했을 때의 접선과 반지름이 수직으로 만나야 한다는 기초적인 수학적 지식과 이를 실제문제에 적용할 수 있는 능력

이 있어야 한다.

아래 그림에서 관계식 $(1+a)\sin(\frac{\pi}{n})=a$를 얻을 수 있다.



(b) 이 논제는 기본적이 삼각부등식에 대한 논제로 간단한 삼각부등식을 풀 수 있는지를 묻고 있다.

(a)에서 얻은 관계식을 a에 관해서 풀면,

$a=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$을 얻을 수 있으므로 $a<1$이기 위한 조건은 $\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{2}$이다. 따라서, $n>6$.

(c) 이 논제는 원의 둘레의 길이의 합을 구하고 그 극한을 구할 수 있는지를 묻고 있으며 학생들이 간단한 삼각함수의 극한을 알고 있는지도 묻고 있다.

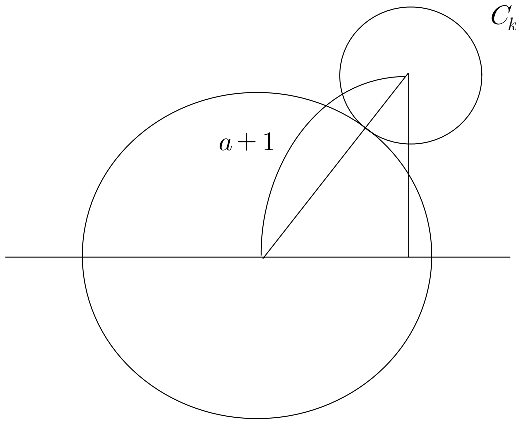
각 원의 둘레의 길이는 $2\pi a$이고 원의 개수는 n개 이므로 다음을 얻는다.

$$L(n)=2\pi an=2\pi\frac{n\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$$

따라서, $\lim_{n\to\infty}L(n)=2\pi^2$.

(d) 이 논제에서는 회전체의 체적을 구할 수 있는지 그리고 정적분의 정의를 이용하여 합과 극한의 형식을 정적분으로 표현할 수 있는지를 묻고 있다. 이 논제에서는 약간의 수식의 변화에도 잘 적응해서 문제를 해결할 수 있어야 올바른 결론을 얻을 수 있을 것이다.

아래 그림에서 원의 개수가 $2n$일 때 k번 째 원의 중심의 x축으로 부터의 거리는 $(1+a)\sin\frac{(k-1)\pi}{n}=(1+a)\sin\frac{(k-1)\pi}{n}$ 이다. (단, $k=2,\cdots,n$)



원 $C_k(k=2,3,\cdots,n)$를 x축으로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 부피는 $2\pi^2 a^2(1+a)\sin\frac{(k-1)\pi}{n}$이고, 원 C_1, C_{n+1}를 x축으로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 부피는 $\frac{4\pi}{3}a^3$이다. 따라서,

$$V(2n)=\frac{8\pi}{3}a^3+\sum_{k=2}^{n}2\pi^2a^2(1+a)\sin\frac{(k-1)\pi}{n}$$

$$=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^3+\sum_{k=2}^{n}2\pi^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2\frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\sin\frac{(k-1)\pi}{n}$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}nV(2n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n\pi}{3}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^3+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}2n\pi^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2\frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\sin\frac{(k-1)\pi}{n}$$

$$=\frac{\pi^4}{2}\int_0^1\sin\pi x\,dx$$

이다.

<6> [예시답안]

식 (2)에서 d는 원점 O와 직선 AB 사이의 거리이다. 먼저 직선 AB의 방정식은 $x_1\neq x_2$일 때

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

이다. 이 식을 변형하면 다음과 같다.

$$(x_2-x_1)y-(y_2-y_1)x+x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)=0$$

원점과 이 직선 사이의 거리를 점과 직선사이의 거리 공식을 이용하여 구하면

$$d=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{AB}}$$

가 성립한다.

$x_1=x_2$ 일 때 원점 O와 직선 AB 사이의 거리는 $|x_1|$인데

$$d=\frac{|x_1y_2-x_1y_1|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2}}=\frac{|x_1||y_2-y_1|}{|y_2-y_1|}=|x_1|$$

이다. 즉 이 경우에도 식 (2)가 성립한다.

부등식 (1) $\overline{R_{k-1}Q_k} \le \overset{\frown}{Q_{k-1}Q_k} \le \overline{Q_{k-1}S_k}$ 을 이용하면 식 (4)가 성립함을 보일 수 있다.

$\angle P_{k-1}OP_k$ 를 θ_k라 하면 원의 반지름이 1이므로 부등식 (1)은 다음과 같이 변형된다.

$$\sin\theta_k \le \theta_k \le \tan\theta_k \qquad \cdots ①$$

$\triangle P_{k-1}OP_k$ 에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{P_kP_{k-1}}}{\sin\theta_k}=\frac{\overline{OP_{k-1}}}{\sin(\angle OP_kA)},\ \sin\theta_k=\frac{\overline{P_kP_{k-1}}}{\overline{OP_{k-1}}}sin(\angle OP_kA)$$

이다. 식 (3)을 이용하면

$$\sin\theta_k=\frac{\overline{P_{k-1}P_k}}{\overline{OP_{k-1}}}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{AB}\cdot\overline{OP_k}}$$

이 되고 부등식 ①은 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{\overline{P_{k-1}P_k}}{\overline{OP_{k-1}}}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{AB}\cdot\overline{OP_k}}\le\theta_k\le\frac{1}{\cos\theta_k}\frac{\overline{P_{k-1}P_k}}{\overline{OP_{k-1}}}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{AB}\cdot\overline{OP_k}}$$

$k=1,2,\cdots,n$ 일 때 위 부등식은 성립하고 각 항을 모두 더하면 다음 부등식이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{P_{k-1}P_k}}{\overline{OP_{k-1}}}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{AB}\cdot\overline{OP_k}}\le\sum_{k=1}^{n}\theta_k\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos\theta_k}\frac{\overline{P_{k-1}P_k}}{\overline{OP_{k-1}}}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{AB}\cdot\overline{OP_k}}$$

그런데 $\angle AOB=\sum_{k=1}^{n}\theta_k$ 이고 $\frac{\overline{P_{k-1}P_k}}{\overline{AB}}=\frac{1}{n}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{OP_{k-1}}\cdot\overline{OP_k}}\frac{1}{n}\le\angle AOB\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos\theta_k}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{OP_{k-1}}\cdot\overline{OP_k}}\frac{1}{n}$$

이다. 이 때 $\overline{OP_{k-1}} < \overline{OP_k}$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{OP_k}^2}\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{OP_{k-1}}\cdot\overline{OP_k}}\frac{1}{n}$이고

$\overline{OP_{k-1}} < \overline{OP_k}\cos\theta_k$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos\theta_k}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{OP_{k-1}}\cdot\overline{OP_k}}\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{OP_{k-1}}^2}\frac{1}{n}$이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{OP_k}^2}\frac{1}{n}\le\angle AOB\le\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\overline{OP_{k-1}}^2}\frac{1}{n}$$

한편 P_k는 (x_1,y_1)과 (x_2,y_2)를 $\frac{k}{n}:1-\frac{k}{n}$로 내분하는 점이므로 좌표는 다음과 같다.

$$P_k(x_1+(x_2-x_1)\frac{k}{n},\ y_1+(y_2-y_1)\frac{k}{n})$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\left\{x_1+(x_2-x_1)\frac{k}{n}\right\}^2+\left\{y_1+(y_2-y_1)\frac{k}{n}\right\}^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\leqq \angle AOB \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\left\{x_1+(x_2-x_1)\frac{k-1}{n}\right\}^2+\left\{y_1+(y_2-y_1)\frac{k-1}{n}\right\}^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$n\to\infty$ 일 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\left\{x_1+(x_2-x_1)\frac{k}{n}\right\}^2+\left\{y_1+(y_2-y_1)\frac{k}{n}\right\}^2}\cdot\frac{1}{n}$ 와

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\left\{x_1+(x_2-x_1)\frac{k-1}{n}\right\}^2+\left\{y_1+(y_2-y_1)\frac{k-1}{n}\right\}^2}\cdot\frac{1}{n}$ 는 모두 정적분의 정의에 의해

$\displaystyle\int_0^1\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\{x_1+t(x_2-x_1)\}^2+\{y_1+t(y_2-y_1)\}^2}dt$ 에 수렴한다.

극한의 대소 관계에 관한 성질에 의해 다음이 성립한다.

$$\angle AOB=\int_0^1\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\{x_1+t(x_2-x_1)\}^2+\{y_1+t(y_2-y_1)\}^2}dt$$

<7>

(1)

평면도형 F에 수직인 법선벡터를 $\overrightarrow{h}=(a,b,c)$ 라 하고 xy, yz, zx 평면의 법선벡터 $\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{h_3}$ 를 각각 $\overrightarrow{h_1}=(0,0,1), \overrightarrow{h_2}=(1,0,0), \overrightarrow{h_3}=(0,1,0)$ 라 하자.

평면도형 F와 xy평면이 이루는 예각을 α라 하면 시각 t 에서 $A(t)$는

$$A(t)=S(t)\cos\alpha$$

가 성립한다. 이 때 α에 대하여

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{h_1}|}{|\overrightarrow{h}||\overrightarrow{h_1}|}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이므로

$$A(t)=S(t)\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

가 성립한다. 마찬가지 원리에 의해 다음이 성립한다.

$$B(t)=S(t)\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\qquad C(t)=S(t)\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이 때

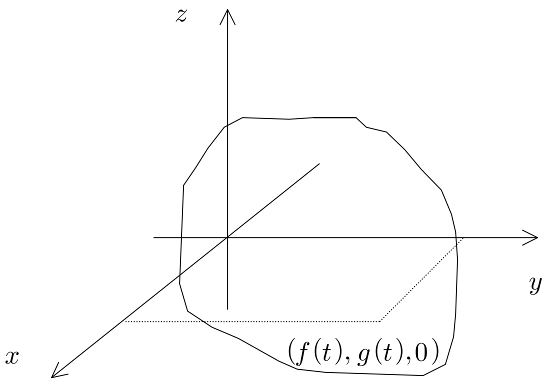
$$A^2(t)+B^2(t)+C^2(t)=S(t)^2\left\{\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\right\}=S(t)^2$$

이 성립한다.
따라서 을은 $A(t), B(t), C(t)$만으로 도형의 넓이 $S(t)$를 알아낼 수 있었으며 관계식은 다음과 같다.

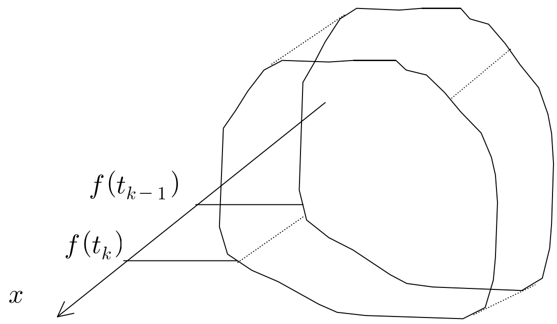
$$S(t)^2 = A^2(t) + B^2(t) + C^2(t)$$

(2)

위 (1)에서 $A(t) = S(t)\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $C(t) = S(t)\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$인데 $A(t) = C(t) = 0$, $S(t) \neq 0$ 이므로 $b = c = 0$이다. 즉 $\vec{h} = (a, 0, 0)$ 이며 이 때 평면도형 F는 yz평면과 평행하고 x축과 수직이다. 또한 $S^2(t) = A^2(t) + B^2(t) + C^2(t)$ 에서 이 도형의 넓이 $S(t)$는 $S(t) = B(t)$ 임을 알 수 있다.



점 $P(f(t), g(t), 0)$ 는 도형 위의 점이고 $f(t)$는 구간 $0 \leqq t \leqq 1$에서 증가함수이므로 도형 F가 만든 입체도형은 $x = f(0)$에서 $x = f(1)$ 사이에 존재한다. 구간 $[0,1]$을 n등분하여 각 등분점을 $t_0 = 0, t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots, t_n = 1$ 이라 하고 소구간의 길이 $\Delta t = \dfrac{1}{n}$이라 하자. 시각 t_{k-1}에서 t_k 사이에 도형 F가 만든 입체도형은 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



F의 넓이 $B(t_k)$

$f(t)$가 증가함수이므로 $f(t_k) > f(t_{k-1})$이다. $V_k = B(t_k)\{f(t_k) - f(t_{k-1})\}$라 하면 V_k는 위 입체도형의 부피의 근삿값이고 $\sum_{k=1}^{n} B(t_k)\{f(t_k) - f(t_{k-1})\}$는 $0 \leqq t \leqq 1$ 에서 도형 F가 만든 입체도형의 부피의 근삿값이다. n이 커질 수록은 입체도형의 부피에 가까워지고 $n \to \infty$ 일

때 도형 F가 만든 입체도형의 부피에 수렴한다. 그러므로 도형 F가 만든 입체도형의 부피는

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B(t_k)\{f(t_k)-f(t_{k-1})\}$$

이다. 함수 f는 미분가능하다 하였으므로 $[t_{k-1},t_k]$에서 연속이고 (t_{k-1},t_k)에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의해 $\dfrac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}=\dfrac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{\Delta t}=f'(c_k)$ 인 c_k가 (t_{k-1},t_k)에 존재한다. 이를 활용하여 위의 식을 변형하면 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B(t_k)\{f(t_k)-f(t_{k-1})\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B(t_k)\frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{\Delta t}\Delta t$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B(t_k)f'(c_k)\Delta t$$

$n\to\infty$ 일 때 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B(t_k)f'(c_k)\Delta t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B(t_k)f'(t_k)\Delta t$ 라는 사실이 알려져 있고 함수 $B(t)$와 $f'(t)$가 연속이라 하였으므로 위의 극한값은 존재하며 극한값은 정적분의 정의에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^1 B(t)f'(t)dt$$

(3)

평면도형 F의 법선벡터를 $\vec{h}=(a,b,c)$ 라 하고 평면도형 F와 xy, yz, zx 평면이 이루는 예각을 각각 α, β, γ 라 하면 다음 식이 성립한다.

$$A(t)=S(t)\cos\alpha,\ B(t)=S(t)\cos\beta,\ C(t)=S(t)\cos\gamma$$

갑이 을에게 알려준 $G(t)$는

$$G(t)=A(t)+B(t)+C(t)=S(t)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$

이 성립한다. 이때 $x=\cos\alpha(0\leqq x\leqq 1)$, $y=\cos\beta(0\leqq y\leqq 1)$, $z=\cos\gamma(0\leqq z\leqq 1)$으로 치환하자. (1)에서 살펴본 바와 같이 (x,y,z)은 $x^2+y^2+z^2=1$ 을 만족한다.
$G(t)$의 최댓값과 최솟값은 $S(t)$의 값이 일정하므로 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$ 의 최댓값 최솟값에 의해 결정된다. 즉

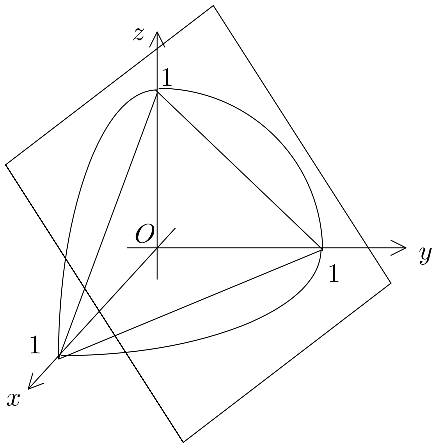
$$x^2+y^2+z^2=1,\ 0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1, 0\leqq z\leqq 1\ \cdots ①$$

이 성립할 때 $x+y+z$의 최댓값과 최솟값을 구해야 한다.
$x+y+z=k$ 라 하면 법선벡터의 성분이 $(1,1,1)$인 평면이 된다. 이 평면이 위의 ① 영역의 (x,y,z)와 만날 때 k의 값이 가장 클 때는 오른쪽 그림의 구면과 평면이 접할 때이고, 가장 작을 때는 $(0,0,1)$을 지날 때이다.
$x+y+z=k$이 반지름 1인 구면과 접할 때는 이 평면과 원점 사이의 거리가 1일 때이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{3}}=1,\quad k=\sqrt{3}\ (\because k>0)$$

가 성립한다. $x+y+z=k$이 $(0,0,1)$을 지날 때 $k=1$이 성립한다. 따라서 $x+y+z$의 최댓

값과 최솟값은 각각 $\sqrt{3}, 1$ 이다. 그러므로 $G(t)$의 최댓값은 $M = \sqrt{3}\,S(t)$, 최솟값은 $m = S(t)$이다. 따라서 을이 구한 최댓값과 최솟값의 관계식은 $M = \sqrt{3}\,m$ 이다.



을이 함수 $G(t) = A(t) + B(t) + C(t)$ $(1 \leqq t \leqq 2)$만으로 $S(t)$를 알아낼 수 있는 경우는 함수 $G(t)$의 $1 \leqq t \leqq 2$ 에서의 최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$ 배가 되는 경우이다. 만약 $1 \leqq t \leqq 2$ 에서 $G(t)$의 최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$ 배보다 작다면 $S(t)$를 알 수 없다. 하지만 만약 $G(t)$의 최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$ 배가 된다면 이때는 최솟값이 $S(t)$가 된다.

<8> **[학교발표 학생우수답안]**

[논제 1] 학생답안 1

논제 1. 적분에관한 평균값의정리에 따르면 폐구간 $[a,b]$에서 연속인 $f(x)$에대해 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f'(c)$ 인 c가 $a<c<b$ 에 존재한다.

그런데 정적분의기본정리에의해 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 이므로

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 인 c가 $a<c<b$ 에존재함을 증명할수있다.

[논제1] 학생답안 2

논제1] 먼저 정적분의 기본원리를 사용하여 $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$로 바꾼다.

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)dx = f'(c)$ 가 되는데 제시문 (가)에서 폐구간 $[a,b]$ 에서 $f(x)$가 연속이면 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$ 인 점 c가 a와 b 사이에 있다고 하였다.

$f'(x)$도 $[a,b]$에서 연속이므로 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)dx = f'(c)$ 인점 c가 a와 b 사이에 존재한다.

따라서 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 인점 c가 a와 b 사이에 존재한다.

[논제 2] 학생답안

[논제 2]

$f(x)=x^3$ 일 때, $f(2)=8$, $f(1)=1$ 이다

평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c)$ 인 c가 존재하고 $f'(x)=3x^2$ 이므로

$7=3c^2$ 이다. c는 $(1,2)$에 존재하여야 하므로

$c=\sqrt{\frac{7}{3}}$ 이다

[논제 3-1] 학생답안 1

논제3. 개구간 (a,b)에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이므로 개구간 (a,b)는 미분가능한 구간이고 그에 따라 연속이다. 그러므로 이 구간에서는 평균값 정리가 성립한다. 그러므로 개구간 (a,b)에서 $a<\alpha<\beta<b$인 임의의 α, β에 대하여 $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(c)$ $(\alpha<c<\beta)$가 성립한다. 그런데 주어진 조건에 의하여 $f'(c)=0$ 이고 $\beta-\alpha\neq0$ 이므로 $f(\beta)-f(\alpha)=0$ 이 되므로 개구간 (a,b)에서 $f(x)=K$(K는 상수) 꼴의 상수함수임을 알 수 있다

[논제 3-1] 학생답안 2

3-1. (a,b) 구간 내의 임의의 $a<c<d<b$인 c, d를 잡는다.

평균값정리에 의해 $\frac{f(d)-f(c)}{d-c}=f'(e)$, $c<e<d$ 인 e가 반드시 존재해야 하며, $f'(e)$는 항등적으로 0이므로 $f(d)-f(c)=0$ 이다.

즉, (a,b) 내의 어떠한 두 점을 잡아도 항상 함수값이 같다는 뜻이고, 이것이 곧 $f(x)$가 (a,b)에서 상수함수라는 것을 의미한다.

[논제 3-2] 학생답안

$x>0$일 때 $g'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0.$

$x<0$일 때 $g'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(-1)-(-1)}{h}=0$ 이므로

함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는

$$g'(x)=\begin{cases}0, & (x>0)\\ 0, & (x<0)\end{cases}$$ 즉, $g'(x)=0$ $(x\neq0)$.

이 결과에서 보듯이 상수함수가 아닌 함수 $g(x)$의 도함수가 $x\neq0$일 때 $g'(x)=0$이 되었다. 이와 같은 결과가 나온 이유는 함수 $g(x)$가 연속함수가 아니라는 데 있다. 3-1에서 함수 $f(x)$는 주어진 구간내에서 항상 미분가능하며 연속이었지만 3-2의 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분계수가 존재하지 않아 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이라는 보장이 없어졌고 실제로도 「$\lim_{h\to+0} g(x)=1\neq\lim_{h\to-0} g(x)=-1$, $g(0)$도 정의되지 않음」으로 $x=0$에서 불연속이다. 따라서 구간 내에서 항상 도함수값이 0이라는 조건이 반드시 충족되어야 그 함수가 상수함수라고 할 수 있다.

[논제 4-1] 학생답안 1

$f(x)=x^{\frac{1}{4}}$ 이라 하면 $f(1+x)-1=\{(1+x)-1\}f'(c)$ 1과 $1+x$ 사이에 c가 존재한다 ...

따라서 $|f(1+x)-f(1)|=|\frac{x}{4}c^{-\frac{3}{4}}|$ ... $|x|\le\frac{1}{2}$ 일 때 $\frac{1}{2}\le c\le\frac{3}{2}$ 에 존재하고

$\frac{2}{3}\le c^{-1}\le 2$, $(\frac{2}{3})^{\frac{3}{4}}\le c^{-\frac{3}{4}}\le 2^{\frac{3}{4}}<2$ $\therefore |\frac{x}{4}\cdot c^{-\frac{3}{4}}|=|(1+x)^{\frac{1}{4}}-1|\le\frac{|x|}{2}$ (등호는 $x=0$일 때 성립)

[논제4-1] 학생답안 2

4-1. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{4}}$ 로 놓고 평균값정리를 활용하자.

- $x=0$ 일 때: $0\le 0$ 에서 성립
- $x>0$ 일 때: $[0,x]$ 에 대해 $\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{x}=\frac{1}{4}(1+c)^{-\frac{3}{4}}$ 인 $0<c<x$ 존재

여기서 $0<x<\frac{1}{2}$ 이므로 $0<c<\frac{1}{2}$이 성립한다.

따라서 $\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2})^{-\frac{3}{4}}<\frac{1}{4}(1+c)^{-\frac{3}{4}}<\frac{1}{4}(1+0)^{-\frac{3}{4}}$ 에서 $\frac{1}{4}(1+c)^{-\frac{3}{4}}<\frac{1}{4}$

결국 $\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{x}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ 이므로 $(1+x)^{\frac{1}{4}}-1<\frac{x}{2}$ 가 성립

양쪽 모두 양수이므로 $|(1+x)^{\frac{1}{4}}-1|<\frac{|x|}{2}$ 도 성립

- $x<0$일 때: $[x,0]$에 대해 $\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{x}=\frac{1}{4}(1+c)^{-\frac{3}{4}}$ 인 $x<c<0$ 존재

$-\frac{1}{2}<x<0$ 이므로 $-\frac{1}{2}<c<0$ 성립

$\frac{1}{4}(1+0)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}<\frac{1}{4}(1+c)^{-\frac{3}{4}}<\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2})^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\times 2^{\frac{3}{4}}<\frac{1}{2}$ 에서 $\frac{1}{4}(1+c)^{-\frac{3}{4}}<\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{x}<\frac{1}{2}$ 이므로 $(1+x)^{\frac{1}{4}}-1>\frac{x}{2}$

양쪽 모두 음수이므로 절대값은 부등호가 바뀌어 $|(1+x)^{\frac{1}{4}}-1|<\frac{|x|}{2}$

따라서 $|x|\le\frac{1}{2}$인 모든 x에 대하여 성립한다.

[논제 4-2] 학생답안

4-2

$g(x)=(1+x)^{\frac{1}{4}}-(1+\frac{1}{4}x)$라 하자. 이때 $g'(x)=\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}}-\frac{1}{4}$이 된다. $x\ge 0$일 때 $(1+x)^{-\frac{3}{4}}\le 1$ 이고, $x<0$일 때 $(1+x)^{-\frac{3}{4}}>1$ 이므로, $g'(x)$는 $x\ge 0$일 때 $g'(x)\le 0$, $x<0$일 때 $g'(x)>0$ 이 된다. $g'(0)=0$ 이므로, $g(x)\le 0$ 이 성립하게 된다. 따라서 $|(1+x)^{\frac{1}{4}}-(1+\frac{1}{4}x)|=(1+\frac{1}{4}x)-(1+x)^{\frac{1}{4}}$ 이되고 문제의 부등식은 다음과 같게 된다.

$$(1+\frac{1}{4}x)-(1+x)^{\frac{1}{4}}\le\frac{3}{4}x^2$$

$f(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x-1+(1+x)^{\frac{1}{4}}$이라 하자. $f'(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}}$이고, $f''(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{16}(1+x)^{-\frac{7}{4}}$이다. $(1+x)^{-\frac{7}{4}}$이 감소함수 이므로, $f''(x)$는 증가함수이다. $f''(-\frac{1}{2})$는 다음과 같이 계산된다

$$f''(-\tfrac{1}{2})=\frac{3}{2}-\frac{3}{16}\cdot(\tfrac{1}{2})^{-\frac{7}{4}}$$

$$=\frac{3}{16}(8-2^{\frac{7}{4}})$$

$2^{\frac{7}{4}}<4$ 이므로 $f''(-\frac{1}{2})>0$ 이다. 따라서 $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$에서 $f'(x)$는 증가 함수이다. $f'(0)=0$ 이므로, $x>0$에서 $f'(x)>0$, $x<0$에서 $f'(x)<0$ 이고 이는 $f(x)$가 $x=0$에서 극소점을 가진다는 것을 의미한다. $f(0)=0$ 이므로, $f(x)\ge 0$ 이다. 따라서 $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$ 에서 다음이 성립한다.

$$(1+\frac{1}{4}x)-(1+x)^{\frac{1}{4}}\le\frac{3}{4}x^2$$

이는 앞에서 다음과 같음을 밝힐 수 있다.

$$|x|\le\frac{1}{2} \text{ 에서 } |(1+x)^{\frac{1}{4}}-(1+\frac{1}{4}x)|\le\frac{3}{4}x^2$$

[논제 5] 학생답안

논제 5) $y=x^3$은 실수 구간 전체에서 미분가능하고 $\frac{dy}{dx}=3x^2$은 실수구간에서 연속이므로

$[a,b]$에서 곡선의 길이를 구하면

$$l=\int_a^b\sqrt{1+9x^4}\,dx \text{ 이다.}$$

(t, t^3)에서 $(m(t), \{m(t)\}^3)$ 까지 길이가 1이므로

$$\int_t^{m(t)}\sqrt{1+9x^4}\,dx=1 \text{ 이고}$$

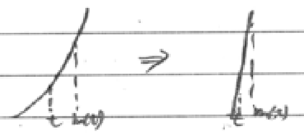
양변을 t에 대해 미분하면 $m'(t)\sqrt{1+9\{m(t)\}^4}-\sqrt{1+9t^4}=0$

$$\{m'(t)\}^2=\frac{1+9t^4}{1+9\{m(t)\}^4}$$

$$t^3[1-\{m'(t)\}^2]=\frac{9t^3[\{m(t)\}^4-t^4]}{1+9\{m(t)\}^4}$$

$$=\frac{9[\{m(t)\}^2+t^2][m(t)+t]\,t}{1+9\{m(t)\}^4}\times\{m(t)-t\}\times t^2$$

$y=x^3$은 $x\to\infty$이면 $\frac{dy}{dx}\to\infty$이므로



오른쪽 그림과 같이 $t\to\infty$이면 $t\approx m(t)$이다.

그리고 $\sqrt{1+9x^4}$는 연속이므로 $t<c<m(t)$가 존재해서

$$\frac{1}{m(t)-t}\int_t^{m(t)}\sqrt{1+9x^4}\,dx=\sqrt{1+9c^4} \text{ 이다.}$$

따라서, $m(t)-t=\frac{1}{\sqrt{1+9c^4}}$ 이고 $\left(\because \int_t^{m(t)}\sqrt{1+9x^4}\,dx=1\right)$

$t\to\infty$일 때 $t\approx m(t)$ 이므로 $t\approx c\approx m(t)$ 이다.

$$\lim_{t\to\infty}t^3[1-\{m'(t)\}^2]=\lim_{t\to\infty}\frac{9[\{m(t)\}^2+t^2][m(t)+t]\,t}{1+9\{m(t)\}^4}\times\frac{t^2}{\sqrt{1+9c^4}}$$

$m(t)\approx c\approx t$로 이용하면

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{9\times2\times2\times t^2\times t\times t}{1+9t^4}\times\frac{t^2}{\sqrt{1+9t^4}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{36}{9+\frac{1}{t^4}}\times\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{t^4}}}=\frac{36}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

<9> [학교발표자료]

논제 2

논제 2에서는 주어진 문제를 해결하기 위해 평균값의 정리를 정확하게 적용할 수 있는 능력을 판단하고자 하였다.

가) 논제 2-(a) 해설 및 평가

첫 번째 문항, (a)에서는 제시문 (다)에서 설정된 형과 동생이 자전거 시합을 하는 상황에서 형의 속도가 동생의 속도의 두 배가 되는 시점이 있음을 설명하기 위해 평균값의 정리를 적용하도록 요구하였다.

학생들이 작성한 답안을 보면, 많은 학생들이 평균값의 정리를 정확하게 이해하고 있으며, 평균값의 정리의 활용에도 익숙함을 알 수 있었다. 좋은 답안을 작성한 학생들은 문항 (a)에서 요구하는 사항에 답하기 위해 형의 위치 함수 $x_1(t)$와 동생의 위치함수 $x_2(t)$에 각각 평균값의 정리를 적용하기 보다는 $x_1(t)-2x_2(t)$ 등과 같은 적절한 함수를 도입하고 이 함수에 평균값의 정리를 적용하여 주어진 문제를 해결하였다.

그러나 평균값의 정의를 정확히 이해하고 있지 못하거나, 정확하게 이해하고 있더라도 활용에 서툰 학생들은 형의 위치함수 $x_1(t)$와 동생의 위치함수 $x_2(t)$에 가각 평균값의 정리를 적용하는 시도를 한 경우가 많았다. 이 경우 x_1에 평균값의 정리를 적용하여 찾은 $\dfrac{x_1(T)-x_1(0)}{T}=v_1(t)$를 만족하는 t와 x_2에 평균값의 정리를 적용하여 찾은 $\dfrac{x_2(T)-x_2(0)}{T}=v_2(t')$를 만족하는 t'이 같은 시점이 될 필요가 없음에도 불구하고 같은 시점이라 받아들이는 오류가 많았다.

다음은 학생들이 작성한 답안들 중 좋은 답안과 그렇지 않은 답안의 예이다.

[좋은 답안의 예]

$f(t)=x_1(t)-2x_2(t)$라 하면 $f(t)$는 폐구간 $[0, T]$에서 연속이고 개구간 $(0, T)$에서 미분가능하다.

$$\frac{f(T)-f(0)}{T-0}=\frac{(x_1(T)-2x_2(T))-(x_1(0)-2x_2(0))}{T}=\frac{(200-2\times150)-(0-2\times50)}{T}=0$$

이므로 평균값의 정리에 의해

$f'=v_1(c)-2v_2(x)=0$

을 만족하는 x가 개구간 $(0, T)$안에 존재한다.

[좋지 않은 답안의 예]

$x_1(t)$는 폐구간 $[0, T]$에서 연속이고 개구간 $(0, T)$에서 미분가능하다.

$\dfrac{x_1(T)-x_1(0)}{T}=\dfrac{200}{T}$이므로 평균값의 정리에 의해 $x_1'(c)=v_1(c)=\dfrac{200}{T}$를 만족하는 c가 개구간 $(0, T)$안에 존재한다.

$x_2(t)$는 폐구간 $[0, T]$에서 연속이고 개구간 $(0, T)$에서 미분가능하다.

$\dfrac{x_2(T)-x_2(0)}{T}=\dfrac{100}{T}$이므로 평균값의 정리에 의해 $x_2'(c)=v_2(c)=\dfrac{100}{T}$를 만족하는 c가 개구간 $(0, T)$안에 존재한다.

따라서 $v_1(c)=2v_2(c)$를 만족하는 c가 개구간 $(0, T)$안에 존재한다.

나) 논제 2-(b) 해설 및 평가

두 번째 문항, (b)에서는 평균값의 정리를 잘못 적용한 예를 제시하고 논리적인 오류를 찾아 설명하기를 요구하였다. 평면 위를 움직이는 저 P의 좌표가 시간 t초 일 때 $P(x(t), y(t))$로 주어지는 상황에서 함수 $x(t)$에 평균값의 정리를 적용하여 찾은 $x'(s)=\dfrac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$를 만족하는 s와 함수 $y(t)$에 평균값의 정리를 적용하여 찾은 $y'(s)=\dfrac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}$를 만족하는 s가 같은 시점이 될 필요가 없음을 지적하면 좋은 답안이 될 것이다.

다음은 학생들이 작성한 답안들 중 좋은 답안의 예이다.

[좋은 답안의 예]

평균값의 정리에 의해

$$x'(s_1)=\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$$

을 만족하는 s_1이 t_1과 t_2 사이에 존재한다. 마찬가지로

$$x'(s_2)=\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$$

을 만족하는 s_2이 t_1과 t_2 사이에 존재한다.

그러나 s_1과 s_2를 같은 값으로 선택할 수 있다는 보장은 없다.

논제 3.

가) 논제 3의 출제의도와 문제해설

제시문 (마)와 논제 3은 수험생이 고등학교 수학과정에서 소개되고 있는 미분과 적분에 대하 정의와 기본적 성질을 정확히 이해하고 있는지 파악하고자 하였다. 또한 어떤 연속함수와 그 함수의 원시함수 사이의 관계식이 주어졌을 때, 이를 적절히 변형하여 적분의 개념을 응용한 문제에 이용할 수 있는지 묻고자 하였다.

논제 3의 (a)에서는 함수의 미분을 정확히 이해하고 있는지 알아보기 위해, 우선 세 함수가 곱해져 있는 경우 그 고의 도함수를 구할 수 있는지 묻고, 두 번째로는 어떤 함수의 원시함수가 주어졌을 때, 이 원시함수의 도함수를 구할 수 있는지 묻고 있다. (b)에서는 함수의 그래프와 x축, x축과 수직인 두 직선으로 이루어진 영역을 x축 둘로 회전하였을 때 얻어지는 회전체의 부피를 구할 수 있는지 묻고 있다. 특히 논제 (a)에서 주어진 함수와 그 원시함수 사이의 관계를 이용하여 회전체의 부피를 어떤 도함수의 적분 형식으로 바꾸어 부피를 구하도록 하고 있다. 정적분의 정의를 올바르게 이해하고 논제에서 주어진 조건을 적절히 이용할 경우 회전체의 부피를 계산할 수 있을 것이다.

나) 논제 3에 대한 채점기준

a. 세 함수의 곱 $y=\{F(x)\}^3$의 도함수를 구할 수 있는가?

b. 제시문 (마)에서 주어진 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$를 x에 대하여 미분할 수 있는가?

c. 회전체의 부피를 계산하는 적분 형태를 유도할 수 있는가?

d. 제시문 (마)와 논제에서 주어진 사실을 이용하여 위 c에 구해진 적분형태에서 부피에 해당하는 구체적인 값을 계산할 수 있는가?

다) 예시답안 사례와 평가

[우수답안의 사례]

(a) $y=\{F(x)\}^3$이므로, $y'=3\{F(x)\}^2 f(x)=(f(x)-1)f(x)$이다.

(b) $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$이므로, $F(0)=0$이고, $F(a)=\displaystyle\int_0^a f(t)dt=1$이다.

(a)에서의 결과를 대입하면 회전체의 부피 $\pi\displaystyle\int_0^a (f(x))^2dx$는

$$\pi\int_0^a (f(x))^2dx=\pi\int_0^a (F(x)^3)'+f(x)dx=\pi\left[(F(x))^3\right]_0^a+\pi=2\pi$$이다.

[평가]

이 답안의 경우 (a)에서의 세 함수의 곱의 도함수를 올바르게 계산하고, 제시문 (마)에서 주어진 관계식을 미분하여 도함수를 $f(x)$에 관한 식으로 나타내었다. (b)에서는 제시문과 논제에서 주어진 사실을 이용하여 $F(0)$와 $F(1)$의 값이 각각 0과 1임을 파악하고, (a)에서 얻어진 결과를 이용하여 회전체의 부피가 2π임을 정확히 구하였다. 논제에서 고려된 채점

기준을 적절히 만족하는 답안의 예이다.

[논제3의 (b)에 대한 부족답안의 사례]

$f(x)=3\{F(x)\}^2+1$이므로 회전체의 부피 $\pi\int_0^a (f(x))^2dx$는

$$\pi\int_0^a (f(x))^2dx=\pi\int_0^a 9(F(x))^2+1dx=\pi\left[\frac{9}{f(x)^5}(F(x))^5+\frac{2}{f(x)^2}(F(x))^3+x\right]_0^a$$

이다. $F(0)=0$이므로 $f(0)=1$이고, $f(a)=1$이므로 $f(a)=4$임을 이용하면 회전체의 부피는 결국 $\left(\frac{19}{20}+a\right)\pi$가 된다.

[평가]

회전체의 부피를 구하는 적분값은 찾아내었지만, 미분과 적분의 개념을 올바르게 이해하고 있지 못한 답안이다. 특히, $(F(x))^4$의 적분을 $\frac{1}{f(x)^5}F(x)^5$로 하는 부분에서는 미분과 적분의 정의를 올바로 파악하고 있지 못함을 보여주고 있다. 단 채점 시 이처럼 부족한 답안의 경우 올바르게 계산된 부부에 대한 부분 점수는 인정하여 주었다.

<10>

논제1

함수 f_1과 f_2가 주어진 초기조건을 만족하는 미분방정식 (3)의 해라고 하자. $f(t)=f_1(t)-f_2(t)$라 하자. 그러면, $f''(t)+f(t)=(f_1''(t)+f_1(t))+(f_2''(t)+f_2(t))=0$이고 $f(0)=f'(0)=0$을 만족한다. 따라서 f는 미분방정식 $\frac{d^2y}{dy^2}+y=0$, $f(0)=f'(0)=0$의 해이다. 또한,

$$g'(t)=-(\sin t)f(t)-(\sin t)f''(t)=-(\sin t)(f''(t)+f(t))=0$$
$$h'(t)=(\cos t)(f''(t)+f(t))=0$$

을 만족하므로, g와 h는 상수함수이다. $g(t)=\alpha$, $h(t)=\beta$라 하면,

$g(0)=(\cos 0)f(0)-(\sin 0)f'(0)=\alpha$에서 $\alpha=0$, $h(0)=(\sin 0)f(0)+(\cos 0)f'(0)=\beta$에서 $\beta=0$이다. 그러므로 모든 실수 t에 대하여

$$g(t)=(\cos t)f(t)-(\sin t)f'(t)=0\cdots ①$$
$$h(t)=(\sin t)f(t)+(\cos t)f'(t)=0\cdots ②$$

이 성립하고 $①\times\cos t+②\times\sin t$를 계산하면

$(\cos^2 t+\sin^2 t)f(t)=0$에서 $f(t)=0$이다. 그러므로 $f_1(t)=f_2(t)$이다. 즉, 주어진 미분방정식의 해는 유일하다.

논제 2.

제시문의 식으로부터 근사적으로

$$\frac{f(t_{n+1})-2f(t_n)+f(t_{n-1})}{h^2}+f(t_n)\approx 0 \text{ 즉, } \frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}+y_n=0$$

따라서

$y_{n+1}=(2-h^2)y_n-y_{n-1}$,

$y_{n+1}=1.99y_n-y_{n-1}$

이 성립한다.

초기 조건으로부터 $y_0=f(t_0)=f(0)=3$이 성립한다.

또한 $f'(t_0)\simeq\dfrac{f(h)-f(0)}{h}\simeq\dfrac{y_1-y_0}{h}=2$에서

$y_1=2h+y_0=3+2h=3.2$

주어진 점화식으로부터

$y_2=(2-h^2)(3+2h)-3=3+4h-3h^2-2h^3=3.368$

이다.

<11>

<문제1>

$f_{2k+2}(x)=\int_0^x f_{2k+1}(t)dt$ 이므로

$f_{2k+2}(-x)=\int_0^{-x}f_{2k+1}(t)dt=\int_0^{-x}f_{2k+1}(-t)dt$ (왜냐하면 $f_{2k+1}(x)$이 $x=0$에 대하여 우함수)

$=\int_0^x -f_{2k+1}(A)dA$ ($-t=A$로 치환)

$=-\int_0^x f_{2k+1}(t)dt$

$=-f_{2k+2}(x)$

따라서 $f_{2k+2}(x)$은 $x=0$에 대하여 기함수이다.

또한

$f_{2k+2}(1-x)=\int_0^{1-x}f_{2k+1}(t)dt=\int_0^{1-x}-f_{2k+1}(1-t)dt$

($\because$ $f_{2k+1}(x)$이 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 기함수)

$=\int_1^x f_{2k+1}(A)dA$ ($1-t=A$ 로 치환)

$=\int_0^x f_{2k+1}(A)dA$

($\because f_{2k+1}(x)$이 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 기함수이므로 $\int_0^1 f_{2k+1}(t)dt=0$)

$$= f_{2k+2}(x)$$

따라서 $f_{2k+2}(x)$은 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 우함수이다.

<문제2>

$g(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}y^n=\frac{a_0}{0!}y^0+\frac{a_1}{1!}y^1+\cdots+\frac{a_n}{n!}y^n+\cdots$ 이므로

$$g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}y^n]=(\frac{a_0}{0!}y^0+\frac{a_1}{1!}y^1+\cdots+\frac{a_n}{n!}y^n+\cdots)(\frac{x^0}{0!}y^0+\frac{x^1}{1!}y^1+\cdots+\frac{x^n}{n!}y^n+\cdots)$$

이 성립한다. 이 때 식의 우변을 전개한 무한급수는 y^n 항들의 합의 꼴이고 y^n 의 계수는 $g(y)$의 y^k의 계수 $\frac{a_k}{k!}$ 와 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}y^n$ 의 y^{n-k} 의 계수 $\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$의 곱들의 합이므로 다음과 같다. (단 $k=0,1,2,\cdots$)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{a_0}{0!}\frac{x^n}{n!}+\frac{a_1}{1!}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{a_2}{2!}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\frac{x}{1!}+\frac{a_n}{n!}\frac{x^0}{0!}$$

이는 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$와 같으므로 다음 식이 성립한다.

$$g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}y^n]=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)y^n$$

<문제3>

식 ㉡에서 $P_{2n}(x)=\frac{a_0}{0!}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{a_1}{1!}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots+\frac{a_{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{x}{1!}+\frac{a_{2n}}{(2n)!}$ 이고 식 ㉢에서 $P_{2n}(0)=0$ 이 성립하므로 $a_{2n}=0$ ($n=1,2,\cdots$) 이다. 그런데 $a_0=1$ 이므로

$$g(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}y^n=\frac{a_0}{0!}y^0+\frac{a_1}{1!}y^1+\frac{a_2}{2!}y^2+\cdots+\frac{a_{2k}}{(2k)!}y^{2k}+\frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!}y^{2k+1}+\cdots$$

$$=1+\frac{a_1}{1!}y^1+\frac{a_3}{3!}y^3+\cdots+\frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!}y^{2k+1}+\cdots$$

이다. $G(y)=g(y)-1$ 이라 하면

$$G(y)=\frac{a_1}{1!}y^1+\frac{a_3}{3!}y^3+\cdots+\frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!}y^{2k+1}+\cdots$$

이고 $G(-y)=\frac{a_1}{1!}(-y)^1+\frac{a_3}{3!}(-y)^3+\cdots+\frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!}(-y)^{2k+1}+\cdots$

$$=-[\frac{a_1}{1!}y^1+\frac{a_3}{3!}y^3+\cdots+\frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!}y^{2k+1}+\cdots]=-G(y)$$

이 성립한다. 그러므로 $g(y)-1$ 은 $y=0$ 에 대하여 기함수이다. $\cdots$ ①

또한 $g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}y^n]=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)y^n$ 이므로 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면,

$$g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\frac{1}{2})y^n=P_0(\frac{1}{2})y^0+P_1(\frac{1}{2})y^1+P_2(\frac{1}{2})y^2+P_3(\frac{1}{2})y^3+\cdots$$

이다. 그런데 ㉡에서 $P_{2n+1}(\frac{1}{2})=0$ 이므로

$$g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]=P_0(\frac{1}{2})y^0+P_2(\frac{1}{2})y^2+P_4(\frac{1}{2})y^4+\cdots$$

$$g(-y)[\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]=P_0(\frac{1}{2})(-y)^0+P_2(\frac{1}{2})(-y)^2+P_4(\frac{1}{2})(-y)^4+\cdots$$

$$=P_0(\frac{1}{2})y^0+P_2(\frac{1}{2})y^2+P_4(\frac{1}{2})y^4+\cdots$$

이다. $g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]=g(-y)[\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]$ 이므로 함수 $g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]$은 $y=0$ 에 대하여 우함수이다. … ②

①에서 $g(y)-1$ 은 $y=0$ 에 대하여 기함수이므로

$$g(-y)-1=-[g(y)-1],\qquad g(-y)=-g(y)+2$$

이고, 이를 ②의 식 $g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]=g(-y)[\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]$ 에 대입하면

$$g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]=(-g(y)+2)[\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]$$

이 성립한다. 이 식을 정리하면

$$[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-y}{2}\right)^n\frac{1}{n!}]=\frac{1}{2}g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^n\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{y}{2})^n\frac{1}{n!}]$$

$$=\frac{1}{2}g(y)[\left\{(\frac{y}{2})^0\frac{1}{0!}+(\frac{y}{2})^1\frac{1}{1!}+(\frac{y}{2})^2\frac{1}{2!}+\cdots\right\}+\left\{(-\frac{y}{2})^0\frac{1}{0!}+(-\frac{y}{2})^1\frac{1}{1!}+(-\frac{y}{2})^2\frac{1}{2!}+\cdots\right\}]$$

$$=\frac{1}{2}g(y)2[\left\{(\frac{y}{2})^0\frac{1}{0!}+(\frac{y}{2})^2\frac{1}{2!}+(\frac{y}{2})^4\frac{1}{4!}+\cdots\right\}=g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}]$$

이 성립한다. 그러므로 $[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-y}{2}\right)^n\frac{1}{n!}]=g(y)[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}]$ 이 성립한다.

<12>

출제의도 및 문항설명[대학발표]

○ '나선'은 역사적으로나 과학적으로 많은 관심과 연구의 대상이었다. 기원전 250년경 아르키메데스가 나선 연구를 처음 시작하였는데, 이 연구를 통하여 당시의 다양한 수학적 난제들을 해결하고 이를 실생활에 활용하였다. 나선은 자연현상에서 빈번히 목격되는 현상으로서 소라껍질이나, 해바라기, 산양의 뿔, 먹잇감을 향해 날아가는 독수리의 비행 등에서 자연스럽게 나타난다. 입자들을 연구하는 안개상자 속의 입자의 궤적 또한 나선 모양이며, 다음과 같은 의미에서 고등학교 교과과정에서 중요한 주제이기도 하다.

- 나선은 곡선으로서 공간 이해력을 요구한다.
- 형태가 다양하여 그 움직임을 이해하기위해 논리적 사고력을 요구한다.

- 그 길이가 유한일 수도 무한일 수도 있어서 수열과 무한급수에 대한 이해가 동반되어야 한다.
- 나선과 연관하여 그릴 수 있는 도형들의 자취는 다양하고 흥미로운 현상을 보여주는데 이는 지적 호기심을 자극하며 상상력을 유발시킬 수 있다.
- 자연 과학, 사회 과학 등에서 나타나는 현상을 이해하는데 활용된다. 이것이 끊임없이 나선을 주목하는 이유이다.

▶ 제시문

○ 학생들이 공통적으로 이수하는 교과과정을 고려하여 논제 해결에 필요한 설명이 충분히 제시되도록 제시문을 작성하였다.

○ 제시문 (가)는 도입부로서 물리 연구에서 나오는 안개상자와 수학사에서 등장하는 아르키메데스의 나선, 자연 현상에서 나타나는 로그 나선을 이야기 형식으로 소개하였다. 그리고 나선이 왜 흥미롭고 중요한가를 설명하고 로그 나선의 성질로 등각현상을 소개하여 논제 해결에 도움을 주었다.

○ 제시문 (나)는 다각 나선을 수학적으로 설명함으로써 학생들에게 상상력을 발휘해 보도록 하였다.

○ 제시문 (다)는 무한급수의 기본 개념을 설명하여 논제 해결에 필요한 정보를 제공하였다.

▶ 논제 구성

○ 논제 1 : 각에 따라 변하는 나선의 움직임을 관찰하여, 복잡한 나선의 움직임을 이해하는 데 필요한 기본적인 개념과 원리를 확인하도록 하였다. 수학I에서 배운 수열에 관한 기본 개념의 이해를 요구하고 있다.

○ 논제 2 : 수학 10-나에서 배운 사인법칙을 활용하여 나선의 최종적인 움직임을 관찰하도록 하였다. 수학 I에서 배운 무한등비급수의 수렴에 관한 기본지식의 이해를 요구하고 있다.

○ 논제 3 : 길이에 따라 변하는 나선의 움직임을 관찰하도록 하여, 수학 10-나에서 배운 코사인법칙을 적절히 활용할 수 있는 지 확인하고 하였다. 주어진 현상을 분석하고 종합할 수 있는 사고력이 필요하다.

○ 논제 4 : 제시문에서 필요한 수학적 내용을 확인하고 로그 나선과 관련된 기하학적 성질을 추론하도록 하였다. 특히 이 논제는 수학 10-가, 10-나의 교육과정 내용에 대한 기본적인 이해만으로 충분히 문제를 해결할 수 있으나, 오히려 어렵게 접근하여 적분과 벡터를 이용하면 많은 계산에 시간을 소모

할 수 있다. 따라서 이 논제를 해결하는 데 있어서는 수학적 논리력, 추리력, 상상력 등이 중요하다.

○ 각 논제 별로 교과서에서의 관련 단원은 다음과 같다.
- 논제 1 : 수학 I의 수열과 무한급수
- 논제 2 : 수학 10-나의 사인법칙과 수학 I의 무한등비급수
- 논제 3 : 수학 10-나의 코사인법칙
- 논제 4 : 수학 10-나의 도형

[예시답안]

논제 1. 다각 나선과 무한급수

임의의 자연수 n에 대해 $\overline{OA_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}$라 하자. 삼각형 OA_nA_{n+1}에서 두 변 $\overline{OA_n}, \overline{OA_{n+1}}$과 그 끼인각 $\theta=\frac{\pi}{2010}$이므로 삼각형이 유일하게 결정되므로, 수열 $\{\alpha_n\}$은 유일하게 결정된다. 수열 $\{\alpha_n\}$에 대해 $\overline{OA_n}\geq\overline{OA_{n+1}}$이 성립하고, $\lim_{n\to\infty}\overline{OA_n}=\frac{1}{2}\neq 0$이므로, 다각 나선이 원점으로 한없이 가까워지지 않을 수도 있다.

또 $\theta=\frac{\pi}{2}$이고 $OA_n=\frac{1}{n}$를 만족하는 다각나선은 $\lim_{n\to\infty}OA_n=0$이므로 원점으로 한없이 가까워진다. 그러나 $A_nA_{n+1}>OA_n=\frac{1}{n}$이고, $\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$이므로 $\sum_{n=1}^{n}A_nA_{n+1}=\infty$이다. 따라서 무한급수 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots$가 항상 수렴하는 것은 아니다.

논제 2. 다각 나선과 무한급수

삼각형 OA_nA_{n+1}에서 사인 법칙을 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{OA_{n+1}}}{\sin\alpha_n}=\frac{\overline{OA_n}}{\sin(\theta+\alpha_n)}\quad\cdots①$$

①과 문제의 조건에서 $\overline{OA_{n+1}}=\frac{\sin\alpha_n}{\sin(\theta+\alpha_n)}\cdot\overline{OA_n}<\frac{\sin\alpha_1}{\sin\theta}\overline{OA_n}$이 성립한다.
($\sin\alpha_n\leqq\sin\alpha_1\sin\theta>\sin(\theta+\alpha_n)$이 성립함은 문제의 조건에 의해 자명하다.)

$n=1,2,\cdots,n-1$을 순차적으로 대입하여 변변 곱하면
$\overline{OA_n}<\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\theta}\right)^{n-1}\cdot\overline{OA_1}=\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\theta}\right)^{n-1}$이 성립한다.

$\sin\alpha_1<\sin\theta$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\theta}\right)^{n-1}=0$가 성립한다. 따라서 극한의 부등식 성질에 의해 $\lim_{n\to\infty}OA_n=0$이다. 그러므로 주어진 조건을 만족하는 다각나선은 원점에 한 없이 접근한다.

①에서 $A_nA_{n+1} = \dfrac{\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)} OA_n < OA_n < \left(\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\theta}\right)^{n-1}$ 이 성립한다. $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\theta} < 1$이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\theta}\right)^{n-1}$ 은 수렴한다. 따라서 제시문 (다)에 의해 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_nA_{n+1}$은 수렴한다.

논제 3. 다각 나선과 좌표

문제의 조건에서 $\overline{OP_n} : \overline{P_nP_{n+1}} = 2:1$가 성립함을 알 수 있다. $\triangle OP_nP_{n+1}$에서 코사인 제 2 법칙을 쓰면, $\overline{OP_{n+1}} = \left(\sqrt{\dfrac{5}{4} - \cos\beta}\right) \cdot \overline{OP_n}$이 성립한다. 따라서 수열 $\{\overline{OP_n}\}$은 초항이 $\overline{OP_1} = 1$이고 공비가 $\sqrt{\dfrac{5}{4} - \cos\beta}$인 등비수열이다.

i) $\cos\beta < \dfrac{1}{4}$일 때, 공비가 1보다 크므로, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\overline{OP_n} = \infty$가 된다. 즉, P_n은 n이 커짐에 따라 원점에서 한없이 멀어진다.

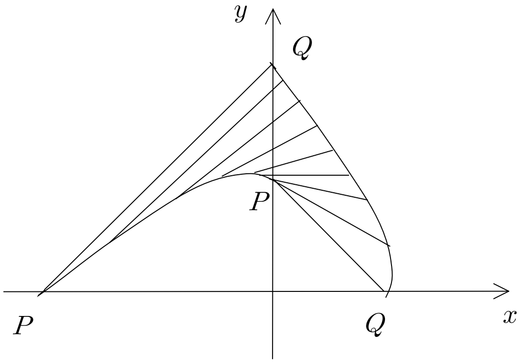
ii) $\cos\beta = \dfrac{1}{4}$일 때, 공비가 1이므로, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\overline{OP_n} = \overline{OP_1}$이므로, 즉, P_n은 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\overline{OP_1}$인 원 위를 움직인다.

iii) $\cos\beta < \dfrac{1}{4}$일 때, 공비가 1보다 작으므로, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\overline{OP_n} = 0$이고, 점 P_n은 n이 커짐에 따라 원점에 한없이 가까워진다.

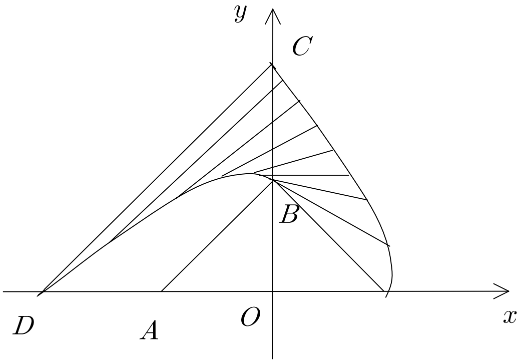
논제 4. 로그나선

제시문 (가)와 문제의 조건에서 점 P에서의 접선과 $\overline{OP}$가 이루는 각은 $\dfrac{\pi}{4}$이고 $\angle POQ = \dfrac{\pi}{2}$이므로, $\triangle OPQ$는 $\overline{PQ}$가 빗변인 직각이등변 삼각형이고, 이때 $\overline{OP} = \overline{OQ}$가 되므로 점 Q는 점 P에서 원점을 중심으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼 회전이동한 점이다. 선분 $\overline{PQ}$가 지나간 영역은 <그림1>의 빗금친 부분과 같다.

점 P가 2사분면 위를 지날 때, 점 Q는 1사분면 위를 같은 모양으로 지나게 된다. 따라서, <그림 1>에서 색칠한 부분의 넓이는 <그림 2>의 사각형 $ABCD$의 넓이와 같다. 그러므로 영역의 넓이는 $\dfrac{1}{2}(e^{\pi})^2 - \dfrac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}})^2 = \dfrac{1}{2}(e^{2\pi} - e^{\pi})$이다.



<그림 1>



<그림2>

<13>

(1) 연산 $\oplus$에 대한 항등원은 A이다. $P\oplus A$는 점 P부터 원 C를 따라 시계 방향으로 $l(A)$만큼 더 이동하여 얻어지는 점이다. 이 때 $l(A)=0$이므로 $P\oplus A=P$이다. 또한 이 연산은 교환법칙이 성립하므로 $P\oplus A=A\oplus P=P$이고 항등원은 A이다.

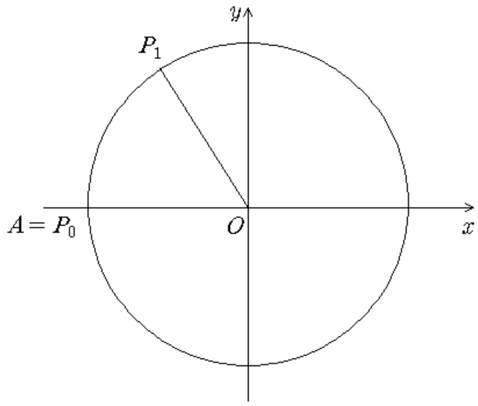
P의 역원은 P의 x축에 대한 대칭점 P'이다. $P\oplus P'$은 점 P부터 원 C를 따라 시계 방향으로 $l(P')$만큼 더 이동하여 얻어지는 점이다. 이 때 $l(P')=2\pi-l(P)$이므로 $P\oplus P'=P'\oplus P=A$이다. 따라서 x축에 대한 대칭점 P'가 P의 역원이다.

(2)

(a) $P_n=P_{n-1}\oplus P_{n-2}$ 이므로 연산의 정의에 의해 P_n은 P_{n-1}부터 원 C를 따라 시계방향으로 $l(P_{n-2})$만큼 더 이동하여 얻어지는 점이다. 예를 들어 P_2는 P_1부터 원 C를 따라 시계방향으로 $l(P_0)$ 즉 A부터 P_0까지 호의 길이만큼 더 이동하여 얻어지는 점이다. 이 때 $\overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_1}$ 이 $\overrightarrow{OA}$로부터 시계방향으로 회전한 각의 크기를 각각 $\alpha=0, \beta=\frac{\pi}{3}$라 하면 $\overrightarrow{OP_2}$ 가 $\overrightarrow{OA}$로부터 시계방향으로 회전한 각의 크기는 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$가 된다. 이와 같이 연산 $\oplus$에 의한 점의 이동은 각의 덧셈에 대응시킬 수 있다. 점 P_n에 대응하는 각의 수열 θ_n을 다음과 같이 정의하자.

$$\theta_0=0,\ \theta_1=\frac{\pi}{3},\ \theta_n=\theta_{n-1}+\theta_{n-2}(n\geqq 2)$$

이 때 $\overrightarrow{OA}$로부터 시계방향으로 θ_n만큼 회전한 반직선을 $\overrightarrow{OQ}$ 라 하면 $\overrightarrow{OQ}$와 단위원 C의 교점이 P_n이다.



θ_n 수열을 나열하면 다음과 같다.

$$0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \cdots$$

$a_n = \dfrac{3}{\pi}\theta_n$라 정의하면 $P_n = A$를 만족하는 자연수 n의 최솟값은 θ_n이 처음으로 $2k\pi$ (k는 정수)가 되는 n, 즉 a_n이 처음으로 $6k$ (k는 정수)가 될 때의 n의 값이다.

(답안1)

수열 a_n은

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots$$

이고 a_n이 처음으로 6의 배수가 되는 것은 $a_{12} = 6 \times 24$ 이므로 $n = 12$ 이다.

(답안2)

이 때 수열 a_n을 6으로 나눈 나머지로 이루어진 수열을 b_n이라 하면 a_n이 처음으로 $6k$ (k는 정수)가 될 때의 n의 값은 b_n이 처음으로 0이 될 때의 n이다. 수열 b_n은

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, \cdots$$

이고 b_n이 처음으로 0이 되는 것은 $b_{12} = 0$이므로 $n = 12$ 이다.

(b) $P_0 = A$이며 $l(P_1) = \dfrac{2\pi}{k}$인 경우 P_n에 대응하는 수열 θ_n은

$$\theta_0 = 0,\ \theta_1 = \frac{2\pi}{k},\ \theta_n = \theta_{n-1} + \theta_{n-2} (n \geq 2)$$

으로 정의하면 된다. θ_n 수열을 나열하면 다음과 같다.

$$0, \frac{2\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \cdots$$

$a_n = \dfrac{k}{2\pi}\theta_n$라 정의하면 θ_n이 처음으로 $2l\pi$ (l은 정수)가 되는 n, 즉 a_n이 처음으로 k의

배수가 될 때의 n의 값을 구하면 된다.

(답안1)

수열 a_n은 $a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 으로 정의된다.

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$를 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ 꼴로 변형하면

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ \cdots ①$$

이 된다. $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ 에서

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_1-\alpha a_0)\beta^n=\beta^n\ \cdots ②$$

이 성립하고 같은 방법에 의해

$$a_{n+1}-\beta a_n=(a_1-\alpha a_0)\alpha^n=\alpha^n\ \cdots ③$$

이 성립한다. ③－②하고 ①을 대입하여 정리하면

$$a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

이다. 일반항 a_n이 처음으로 k의 배수가 될 때의 n을 찾는다.

(답안2) [정수론을 이용한 증명]

이 때 수열 a_n을 k로 나눈 나머지로 이루어진 수열을 b_n이라 하면 a_n이 처음으로 k의 배수가 될 때의 n의 값은 b_n이 처음으로 0이 될 때의 n이다. 수열 b_n을

$$b_0=0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \cdots,\ b_n,\ b_{n+1},\cdots,\ b_{n+T},\ b_{n+T+1},\cdots$$

라 하자. $A_n=(b_n,\ b_{n+1})$라 하면 순서쌍 $(b_n,\ b_{n+1})$은 서로 다른 경우의 수가 k^2이다.

따라서

$$A_0=(b_0,\ b_1),\ A_1=(b_1,\ b_2),\ A_2=(b_2,\ b_3),\ \cdots\ ,\ A_{k^2}=(b_{k^2},\ b_{k^2+1})$$

중 적어도 두 개는 같다.

즉 $(b_n,\ b_{n+1})=(b_{n+T},\ b_{n+T+1})$을 만족하는 T $(n+T\leq k^2,\ T>0)$가 존재한다.

수열 a_n에 대하여 $a_{n-1}=a_{n+1}-a_n$이므로 다음이 성립한다.

$$a_{n-1}\equiv a_{n+1}-a_n\ (\mathrm{mod}\ k),\quad a_{n+T-1}\equiv a_{n+T+1}-a_{n+T}\ (\mathrm{mod}\ k)$$

$(b_n,\ b_{n+1})=(b_{n+T},\ b_{n+T+1})$에서 $a_n\equiv a_{n+T}\ (\mathrm{mod}\,k),\ a_{n+1}\equiv a_{n+T+1}\ (\mathrm{mod}\,k)$이므로

$$a_{n-1}\equiv a_{n+T-1}\ (\mathrm{mod}\ k)$$

그러므로 $b_{n-1}=b_{n+T-1}$이고 이와 마찬가지로 생각하면

$$b_{n-2}=b_{n+T-2},\ \cdots\quad b_0=b_T=0$$

이 된다. 즉 $b_T=0$인 T는 반드시 존재한다.

따라서 b_n을 나열하여 처음으로 0이 될 때의 n을 찾으면 된다.

(3) $\overrightarrow{OA}$로부터 $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OQ_1}$, $\overrightarrow{OQ_2}$까지 시계방향으로 회전한 각의 크기를 각각 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$라 하자. $P_1 \oplus P_2 = Q_1 \oplus Q_2$ 이므로

$$\alpha + \beta = 2n\pi + \gamma + \delta$$

가 성립한다. 즉 $\frac{\alpha+\beta}{2} = n\pi + \frac{\gamma+\delta}{2}$가 성립한다.

점 P_3, Q_3은 원 C위의 점이고 각각 $\overrightarrow{OA}$로부터 $\overrightarrow{OP_3}$, $\overrightarrow{OQ_3}$까지 시계방향으로 회전한 각의 크기가 $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $n\pi + \frac{\gamma+\delta}{2}$인 점이라 하면 P_3과 Q_3은 $P_3 = Q_3$이거나 서로 원점 대칭이다.

$P_3 = Q_3$인 경우를 생각하자.

직선 P_1P_2과 직선 OP_3이 만난 점을 M이라 하자. $\triangle OP_1M$과 $\triangle OP_2M$에서

$$\overline{OP_1} = \overline{OP_2},\ \overline{OM}\text{은 공통},\ \angle P_1OM = \angle P_2OM = \frac{|\alpha-\beta|}{2}$$

이므로 $\triangle OP_1M \equiv \triangle OP_2M$이다. $\angle OMP_1$과 $\angle OMP_2$ 는 각의 크기가 같고 합이 π이므로 $\angle OMP_1 = \angle OMP_2 = \angle R$ 이다. 따라서 직선 P_1P_2과 직선 OP_3은 서로 수직이다.

마찬가지 원리에 의해 직선 Q_1Q_2는 직선 OP_3에 수직이다.

P_1, P_2, Q_1, Q_2은 서로 다른 네 점이며 한 직선에 수직이 두 직선은 평행하므로 직선 P_1P_2와 직선 Q_1Q_2는 서로 평행하다.

P_3과 Q_3이 서로 원점 대칭인 경우에도 직선 P_1P_2과 직선 Q_1Q_2는 직선 P_3Q_3에 수직이고 같은 원리에 의해 두 직선은 서로 평행하다.

<14> [학교발표예시답안]

[1-1]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 하자. 관계식 ㉠의 양변에 극한을 취하면

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}[a_n + \beta_n(K - a_n)] = \alpha + \beta\alpha(K-\alpha)$$

따라서 α는 다음 방정식의 근이 된다.

$$\alpha = \alpha + \beta\alpha(K-\alpha)$$

따라서 $\alpha = 0, K$가 된다.

[1-2]

(a) 초기 개체수 a_0가 $K < a_0 < 2K$일 때

편의상 $a_0 = K+b$, $0 < b < K$로 표시하자. $\beta a_0(K-a_0) < 0$임으로 관계식 ㉠에 의해 다음이 성립한다.

$$a_1 = a_0 + \beta a_0(K-a_0) = K + b - \beta(K+b)b$$

$0 < \beta < \frac{1}{2K}$이고 $0 < b < K$임으로 다음 부등식이 성립한다.

$0 < \beta(K+b) < 1, \qquad 0 < b - \beta(K+b)b < b$

따라서 다음 부등식이 성립한다.

$K < a_1 = k + b - \beta(K+b)b < a_0$

(b) 초기 개체수 a_0가 $0 < a_0 < K$일 때

편의상 $a_0 = K - b$, $0 < b < K$로 표시하자. 관계식 ㉠에 의해

$a_1 = a_0 + \beta a_0(K - a_0) = K - b + \beta(K-b)b$

$0 < \beta < \frac{1}{2K}$이고 $0 < b < K$임으로 다음 부등식이 성립한다.

$0 < \beta(K-b) < 1, \qquad -b < -b + \beta(K-b)b < 0$

따라서 다음 부등식이 성립한다.

$a_0 < a_1 = K - b + \beta(K-b)b < K$

[1-3] 다양한 답안이 가능하다.

[답안A] *오류를 포함하고 있어 생략함.*

[답안B]

(a) 초기 개체수 a_0가 $K < a_0 < 2K$일 때

답안 1-2에서 a_0와 a_1간의 관계는 일반적으로 a_n와 a_{n+1}에서도 성립함으로 다음 결론이 유도된다.

$a_0 > a_1 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots > K$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 감소수열이면서 하한(최대하계)을 가지고 있다. 따라서 수열의 극한은 존재함(상식적인 수준이나 대학수준의 논리임)으로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 하자. [문제 1-1]의 답안에 의해 극한값 α는 0또는 K가 된다.

$a_n > K$임으로 $\alpha = K$이여야 한다.

(b) $0 < a_0 < K$일 때, $a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < K$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 단조증가 또는 단조감소 수열이면서 상한(=최소상계)과 하한(=최대하계)을 가지고 있다.

초기 개체수 a_0가 $0 < a_0 < K$일 때도 (a)와 같은 방식으로 증명한다.

[우수학생답안 및 평가]

▶ 답안 사례 1

[1-1] 답

α_n이 수렴한다면,

$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$로 표현할 수 있다.

$\alpha_{n+1}=\alpha_n+\beta\alpha_n(k-\alpha_n)$-----------㉠

$n\to\infty$로 보내면,

$\alpha=\alpha+\beta\alpha(k-\alpha)$가 되서

$\alpha\beta(-\alpha+k)=0$이 되므로

$\therefore\ \alpha=0$ or k

그런데 $\alpha_0>0$, $\beta>0$, $k>0$이므로

1) $0<\alpha_n<k$이면,

㉠에서 $\beta\alpha_n(k-\alpha_n)$이 양수가 되어

α_{n+1}은 α_n보다 증가하게 됨을 알 수 있다.

2) $\alpha_n>k$이면

㉠에서 $\beta\alpha_n(k-\alpha_n)$이 음수가 되어

α_{n+1}은 α_n보다 감소하게 됨을 알 수 있다.

1), 2)로 보아 α는 0에 수렴이 불가능하고($\because$1))에서 증가하니까 “k”에 수렴함을 알 수 있다.

[1-2] 답

$\alpha_{n+1}=\alpha_n+\beta\alpha_n(k-\alpha_n)$

$\quad\quad=\alpha_n+\beta k\alpha_n-\beta\alpha_n^2$

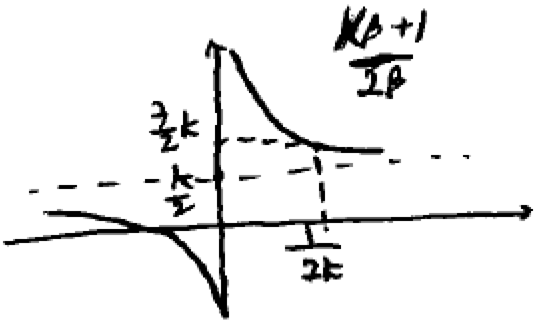
Let $\alpha_{n+1}=y$, $\alpha_n=x$,,

$y=-\beta x^2+\beta kx+x$ ---- 이차함수($\beta>0$, $k>0$, $x>0$)

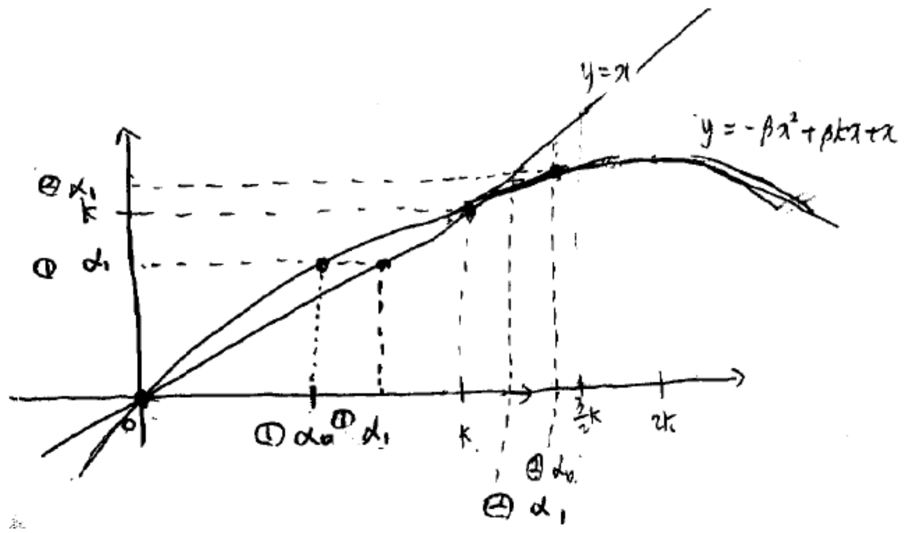
이 이차함수는 $x=\dfrac{\beta k+1}{2\beta}$을 축으로 한다.

그런데 $0<\beta<\dfrac{1}{2k}$이므로

축은 $x=\dfrac{3}{2}k$ 오른쪽에 있음을 알 수 있다.



위의 정보를 통해 이차함수를 작성하면



①과 ②를 통해

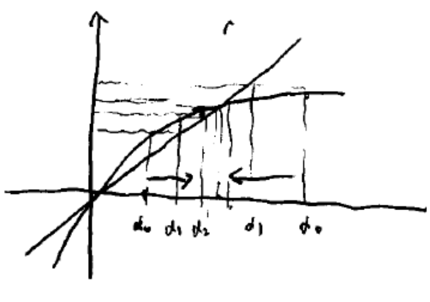
② $k < a_0 < 2k$이면 $k < a_1 < a_0$임을 확인

① $0 < a_0 < k$이면 $a_0 < a_1 < k$임을 확인할 수 있다.

[1-3] 답

수열 a_n에서 n을 실수로 확장하여 생각했을 대 위의 이차함수를 작성할 수 있었다.

$(0 < \beta < \dfrac{1}{2k},\ k > 0$인 조건하$)$



y는 x의 다음 항이 되므로,
위 그림에서 $\alpha_0 \to \alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha_3$와 같은 과정을 반복하면
$y=x$와 이차함수의 교점인 $(k,\ k)$로 계속 접근해감을 확인할 수 있다.
즉, $k < a_0 < 2k$이면 a_n이 k가 될 때까지 감소하고,
$0 < a_0 < k$이면 a_n이 k가 될 때까지 증가한다.

[평가]

직관에 의한 통합적인 추론 능력과 수리 과학적 상황을 그래프로 변환하여 결과를 예측하는 능력이 우수하다. 다만, 결과의 타당성을 논리적으로 설명하는 능력을 보완하였으면 한다.

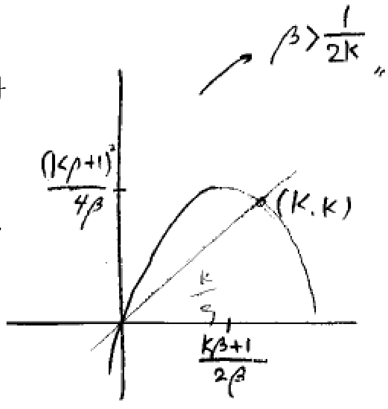
▶ 답안 사례 2

[1-1] 답

$a_{n+1} = a_n + \beta a(k - a_n)$에서 a_{n+1}과 a_n의 관계는 $y = f(x)$의 함수에서 y와 x의 관계와 같은 함수관계이다.

따라서 $a_{n+1} = y,\ a_n = x$로 두면,
$y = x + \beta x(k-x)$의 함수를 얻게 되고 이를 $g(x)$라 하자.
$y = x + \beta x(k-x) = (1+\beta k)x - \beta x^2$이고,
여러번의 시행은 $g(x)$의 거듭합성으로 나타낼 수 있다.

$$y = -\beta x^2 + (1+\beta k)x$$
$$= -\beta(x^2 - (\frac{1}{\beta} + k)x)$$
$$= -\beta(x - \frac{k\beta+1}{2\beta})^2 + \frac{(k\beta+1)^2}{4\beta}$$ 이며 개형은 <그림①>과 같다.



<그림①>

$y = g(x) \ni (k,\ k)$이므로, 수렴한다면 함수를 합성함에 따라 점차 $(k,\ k)$에 근접하여 수렴하게 될 것이다.

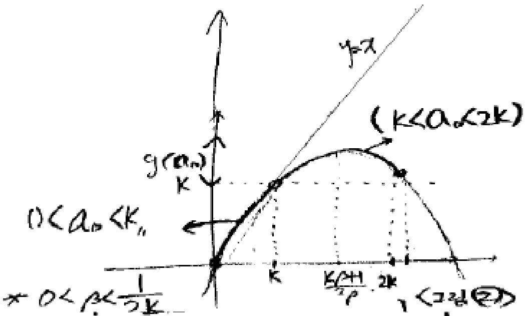
[1-2] 답

i) $k < a_1 < a_0$을 [1-1]의 $y = g(x)$로 해석하면,
$k < g(a_0) < a_0$이다.

$0 < \beta < \frac{1}{2k}$이면,

$\frac{k\beta+1}{2\beta} > \frac{3}{2}k$이므로

(By.(*))
그러면 $y = g(x)$는 <그림②>처럼 수정된다.



그러면, $k < a_0 < 2k$에서 $g(a_0) > k$가 성립한다. ---①

$k < a_0 \Leftrightarrow k - a_0 < 0$

$\therefore a_1 = a_0 + \beta a_0 (k - a_0) < a_0 (\because \beta > 0)$ ---②

By①②, $k < a_1 < a_0$

$* \ 0 < \beta < \frac{1}{2k}$

$\Leftrightarrow 0 < 2\beta k < 1$

$\Rightarrow 1 + \beta k > 3\beta k$

$\Rightarrow \frac{k\beta + 1}{2\beta} > \frac{3}{2}k \cdots (*)$

ii<그림②>에서 $y = g(x)$는 위로 볼록한 함수(이차함수 최고차항계수$< 0 \Leftrightarrow$ 이계도함숫값$< 0 \Leftrightarrow$ 위볼록)이므로, $a_1 = g(a_0) > a_0$ ---③

마찬가지로 그래프에서 $g(a_0) < k$ ---④

By③④, $a_0 < a_1 < k$ 성립

[1-3] 답

[1-2]의 결과와 <그림②>에 의해

ⅰ) $k < a_0 < 2k$에서 $k < \forall a_n < 2k$, $k < a_{n+1} < a_n$이 성립한다.

$\Rightarrow$ $\forall n \in N$, $a_{n+1} < a_n$이고, $a_n > k$이므로

감소수열이며 하계를 가진다. --- $2k > a_0 > a_1 > \cdots > a_n > k$

$\therefore a_n$은 수렴하고, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = k$이다. ---①

ⅱ)$0 < a_0 < k$일 때도 마찬가지로

$0 < \forall a_n < k \Rightarrow a_n < a_{n+1} < k$가 성립한다. $\Rightarrow$ $\forall$ $n \in N$, $a_{n+1} < a_n$이고, $a_n > k$이므로

증가수열이며 상계를 가진다

$\therefore 0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n < k$

$\therefore \lim\limits_{n \to \infty} a_n = k$이다. ---②

By①,②, $0 < \beta < \frac{1}{2k}$일 때 a_n은 k로 수렴한다.

[평가]

제시문의 원리를 정확히 이해하였고, 수준 높은 수리분석을 수행하여 결론을 유도하였다. 다만, [1-3]의 답안에서 상계, 하계의 개념을 사용하였는데, 이는 대학수준의 개념으로 고등학교학생에게는 적절하지 않다.

▶ 답안 사례 3

[1-1] 답

$a_{n+1} = a_n + \beta a_n (k - a_n)$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = \beta a_n (k - a_n)$

여기서

$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} a_n$이고 둘 다 수렴하므로

$\lim_{n \to \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} - \lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$\lim_{n \to \infty} \beta a_n (k - a_n) = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} - a_n = 0$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$라 하면

$\beta \alpha (k - \alpha) = 0$

$\alpha (k - \alpha) = 0$

$\therefore \alpha = 0,\ k$

$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = 0,\ k$

[1-2] 답

$a_1 = a_0 + \beta a_0 (k - a_0)$이다.

$a_1 - a_0 = \beta a_0 (k - a_0)$

$k < a_0 < 2k$일 때 $0 < k < a_0$이므로

$a_0 > 0,\ k - a_0 < 0$

따라서

$\beta a_0 (k - a_0) < 0$이다.

$\therefore a_1 < a_0$

또한 $a_0 - k = a_0 + \beta a_0 (k - a_0) - k$

$\qquad = -(k - a_0) + \beta a_0 (k - a_0)$

$\qquad = (\beta a_0 - 1)(k - a_0)$

여기에서 $0 < \beta < \dfrac{1}{2k}$이므로

$\dfrac{1}{\beta} > 2k > a_0$이다.

$a_0 < \dfrac{1}{\beta}$

$\beta a_0 < 1$

$\beta a_0 - 1 < 0$

또한 $k - a_0 < 0$이므로

$(\beta a_0 - 1)(k - a_0) > 0$이다.

따라서 $a_1 - k > 0$이므로

$\therefore k < a_1 < a_0$

마찬가지로

$a_1 - a_0 = \beta a_0(k - a_0)$에서

$0 < a_0 < k$일 때

$a_0 > 0,\ k - a_0 > 0$이므로

$\beta a_0(k - a_0) > 0$이다.

$\therefore a_1 > a_0$

또한 $a_1 - k = (\beta a_0 - 1)(k - a_0)$에서

$\dfrac{1}{\beta} > 2k > a_0$이다.

그래서 $\beta a_0 - 1 < 0$이고

$k - a_0 > 0$이므로

$a_1 - k = (\beta a_0 - 1)(k - a_0) < 0$

$\therefore a_0 < a_1 < k$

[1-3] 답

$k < a_0 < 2k$일 때

[1-2]에서 $k < a_1 < a_0 < 2k$이므로

$k < a_1 < 2k$이다.

그러므로 $k < a_1 < 2k$일 때

a_2는 부등식 $k < a_2 < a_1$을 만족할 것이다.

a_3도 역시 위와 같은 이유로 $k < a_3 < a_2$를 만족할 것이다.

그러므로 $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > k$이다.

그런데 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ k$에서

$a_n > k > 0$이기 때문에 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$은 0이 될 수 없다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k$

$\therefore k < a_0 < 2k$이면 개체수가 k가 될 때까지 감소한다.

또한 $0 < a_0 < k$일 때

$k > a_1 > a_0$이므로

$0 < a_1 < k$를 만족한다.

$0 < a_1 < k$일 때

a_2도 부등식 $k > a_2 > a_1$을 만족한다.

그러므로 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < k$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ k$에서

$a_n > a_0 > 0$이므로 $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$이다.

$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = k$

$\therefore 0 < a_0 < k$이면 개체수가 k가 될 때까지 증가

[평가]

제시문의 원리와 개념을 정확히 분석한 후, 다루기 쉬운 다항식(중학교수준)의 형태로 변환하여 결론을 유도하였다. 개념 및 원리에 관한 인지능력이 우수하고, 논리적인 표현능력도 갖추었다.

<15> [예시답안]

n단계의 저항을 a_n이라 하자. 이 때 $a_1 = 3$이다. 제시문에서 $n+1$ 단계의 저항 a_{n+1}은 1 Ω과 저항 a_n이 병렬로 연결된 저항에 1Ω 저항 두 개가 직렬로 연결되어 있는 합성저항이다. 그러므로

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{a_n}} + 1$$

이고 이를 정리하면 합성저항의 수열 a_n에 대하여 다음과 같은 식이 성립한다.

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n + 1}$$

이 때 합성저항의 수열 a_n은 감소한다. 즉 $a_{n+1} < a_n$ 이다. 이를 수학적 귀납법으로 증명하면 다음과 같다.

$n=1$일 때, $a_1 = 3$ 이고 $a_2 = \frac{11}{4}$이므로 $a_2 < a_1$이 성립한다.

$n=k$일 때 $a_{k+1} < a_k$ 이 성립한다고 가정하자.

$$a_{k+1} - a_{k+2} = 3 - \frac{1}{a_k + 1} - \left(3 - \frac{1}{a_{k+1} + 1}\right)$$

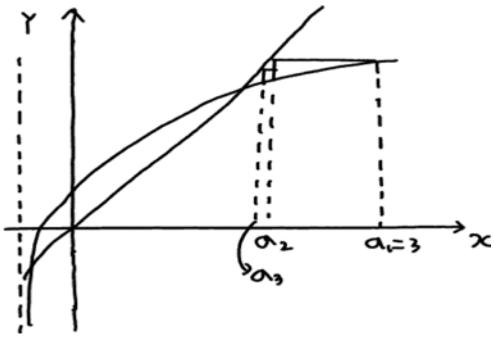
$$= \frac{a_k - a_{k+1}}{(a_{k+1}+1)(a_k+1)} > 0 \ (\because 0 < a_{k+1} < a_k)$$

$\therefore a_{k+2} < a_{k+1}$

즉 $n=1$일 때 $a_{n+1} < a_n$ 이 성립하고 $n=k$일 때 성립하면 $n=k+1$ 일 때도 성립하므로 명제 $a_{n+1} < a_n$ 은 모든 자연수 n에 대해 성립한다.

$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n + 1}$을 만족하는 수열은 수렴한다. a_{n+1}을 y, a_n 을 x라 하자. 그러면 a_n과 a_{n+1}의 관계는 $y = 3 - \frac{1}{x+1}$의 함수로 파악할 수 있다. 이 그래프의 개형을 $y = x$와 함께 다음과 같이 나타내고 이 함수에 의해 수열의 다음 항을 찾아가면 이 수열의 항은 일정한 값에 한없이 다가감을 알 수 있다.

$y = x$



이 수열의 극한값을 $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ 라 하면, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = x$이고 따라서 n을 무한대로 보낼 때

$a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{a_n + 1}$ 에서 $x = 3 - \dfrac{1}{x+1}$이 성립한다. 이 식을 풀면 $x = 1 \pm \sqrt{3}$을 얻는데, a_n은 양 수이므로 합성저항의 극한값 $x = 1 + \sqrt{3}$이다.

<16>

논제 3 거미줄 그림 (생략)

$|H'(x^*)| < 1$라 하자. 그러면 H'은 연속이므로 $|H'(x^*)| < \epsilon < 1$를 만족하는 실수 $\epsilon > 0$가 존재한다. 또한 구간 $[x^* - \delta, x^* + \delta]$사이의 모든 x에 대하여 $|H'(x)| \leq \epsilon$을 만족하는 δ가 존재한다. (※엄밀한 설명은 생략)
$x_0 \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$사이의 임의의 값이라고 하자. H가 미분가능하므로 평균값 정리에 의해 $H(x_n) - H(x^*) = H'(c)(x_n - x^*)$를 만족하는 c가 x*와 x_n사이에 존재한다. 특히 $c \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$인 c가 존재한다. 또한

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x^*| &= |H(x_n) - H(x^*)| \qquad (n = 1,2,3,\cdots) \\ &= |H'(c)(x_n - x^*)| \\ &= |H'(c)|\,|x_n - x^*| \leq \epsilon\,|x_n - x^*| \end{aligned}$$

가 성립한다.
$|x_n - x^*| \leq \epsilon |x_{n-1} - x^*| \leq \epsilon^2 |x_{n-2} - x^*| \leq \cdots \leq \epsilon^n |x_0 - x^*|$ 이므로 $0 \leq |x_n - x^*| \leq \epsilon^n |x_0 - x^*|$ 이고, $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \epsilon^n |x_0 - x^*| = 0$이므로 극한의 부등식 성질에 의해 $\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| = 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$가 성립한다. 그러므로 $|H'(x^*)| < 1$일 때 x*는 안정부동점이다.
위와 비슷한 논리로 $|H'(x^*)| > 1$일 때, $x_0 \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$이고, $x_0 \neq x^*$이면 $|x_1 - x^*| > |x_0 - x^*|$가 성립하므로 수열 $\{x_n\}$은 x^*로 수렴하지 않는다. 따라서 x^*는 불안정부동점이다.

논제 4-1. 예시그림 3에서 $x_1 = f(x_0)$, $x_0 = f(x_1)$과 $(f \circ f)(x_0) = x_0$, $(f \circ f)(x_1) = x_1$임을 나타낸다. 따라서 x_0와 x_1은 $x = (f \circ f)(x)$의 부동점들이다. 또한 점 A의 x좌표를 x_A라 하면 $(f \circ f)(0) = 0$, $(f \circ f)(x_A) = x_A$가 성립하므로 $x = (f \circ f)(x)$의 부동점은 $0, x_0, x_A, x_1$이다. $x = f(x)$의 근은 $0, \dfrac{r-1}{r}$이므로 $x_A = \dfrac{r-1}{r}$.

$x_1 = f(x_0)$, $x_0 = f(x_1)$에서

$$x_1 = rx_0(1-x_0) \cdots ①$$
$$x_0 = rx_1(1-x_1) \cdots ②$$

① − ② 에서 $x_1 - x_0 = -r(x_1 - x_0) + r(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)$, $x_0 + x_1 = \dfrac{r+1}{r}$

① × ② 에서 $x_0 x_1 = r^2 x_0 x_1 (1 - (x_0 + x_1) + x_1 x_0)$, $x_0 x_1 = \dfrac{1+r}{r^2}$

따라서 $t^2 - \dfrac{r+1}{r}t + \dfrac{r+1}{r^2} = 0$의 두 근이 x_0와 x_1이다. 따라서,

$x_0 = \dfrac{r+1-\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$, $x_1 = \dfrac{r+1+\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$이다.

함수 $\dfrac{d}{dx}f(f(x)) = f'(f(x))f'(x)$에서 $\left|\dfrac{d}{dx}f(f(0))\right| > 1$, $\left|\dfrac{d}{dx}f(f(x_A))\right| > 1$이고,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(f(f(x_0))) = f'(f(x_0))f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0) \\
&= (r - 2rx_0)(r - 2rx_1) \\
&= (r - [(r+1) - \sqrt{(r+1)(r-3)}])(r - [(r+1) + \sqrt{(r+1)(r-3)}]) \\
&= -(1 - (r+1)(r-3)) = -0.76
\end{aligned}$$

같은 방법으로 $\dfrac{d}{dx}f(f(x_1)) = -0.76$이다. 따라서 x_0과 x_1은 안정부동점이고, 0과 x_A는 불완전부동점이다. 논제 3의 결과를 바탕으로 초기값에 따른 수열 $\{x_n\}$이 어떻게 움직이는지 추정하면 아래와 같다.

· 출발점 c가 $c<0$또는 $c>1$일 때 x_n은 각각 $-\infty$와 ∞로 발산한다.
· $c = 0, 1$일 때 수열 $\{x_n\}$는 불안전부동점인 $x = 0$에 수렴
· $c = x_A$일 때 수열 $\{x_n\}$는 불안전부동점인 $x = x_A = \dfrac{2.4}{3.4}$에 수렴
· $c \in (0, x_A) \cup (x_A, 1)$일 때, $\{x_{2n-1}\}$와 $\{x_{2n}\}$는 수렴하고
짝수항이 x_1에 수렴하면 홀수항은 x_0에 수렴
짝수항이 x_0에 수렴하면 홀수항은 x_1에 수렴한다.

논제 4-2.
<u>미래 시점의 상태를 실질적으로 (정확히) 예측하기 불가능한 이유</u>
1. 자연현상에서 등장하는 미분방정식의 해는 유일하다. 그러므로 이론적으로 미래시점에서의 값은 정확히 구할 수 있다. (제시문 가)
2. 카오스 성질을 갖는다면 초기조건이 조금 변할때, 미래의 시점에서는 상당히 차이를 보인다. (제시문 라)
3. 미분방정식의 해를 구할 때 컴퓨터를 이용하고, 근사적인 해를 구한다.

2와 3의 사실로부터 카오스적 요소가 들어간 미분방정식의 해를 컴퓨터로 구할 때, 초기조건들의 값이 조금 변할 수 있다. 컴퓨터를 이용한 근사적인 해를 구하여 미래를 예측하게 되면 전혀 다른 결과를 얻을 수 있다. 즉, 미래를 예측하는 것은 실제적으로 불가능하다.

결정론적 세계관에 미치는 영향

1. 한 시점의 상태가 미래를 결정할 수 있지만, 카오스적 요소가 들어간 경우에 결정된 미래를 정확히 알 수 없다.
2. 결정되어 있는 미래를 현재의 상태로는 실질적으로 정확히 파악할 수는 없다.

<17> [해설]

(1)

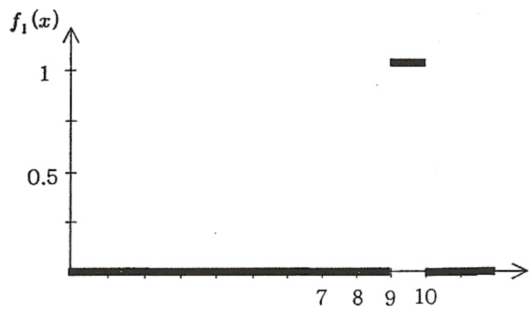
(a) 제시문의 모형은 기름의 확산을 설명하는 타당한 모형이다. 제시문의 모형은 시간이 지남에 따라 해안가에서 먼 거리에서 가까운 거리로 퍼져가는 것을 표현하고 있고 해안가에 축적되는 원유의 양도 잘 표현하고 있다.

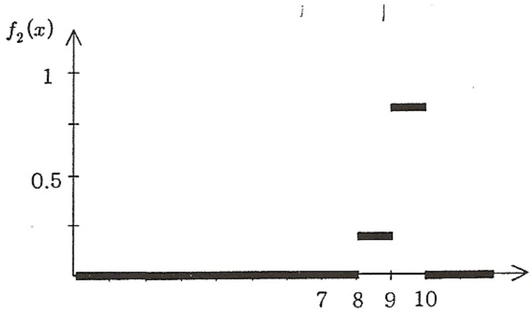
(b) 제시문 (나)의 ㉠과 주어진 $f_1(x)$를 이용해서 $f_2(x)$와 $f_3(x)$를 식으로 정리하면 다음과 같다.

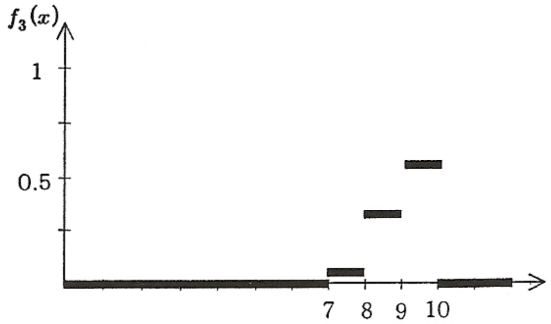
$$f_2(x)=\begin{cases}\frac{4}{5} & (9 \leqq x < 10) \\ \frac{1}{5} & (8 \leqq x < 9) \\ 0 & (0 \leqq x < 8\text{또는}x \geqq 10)\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\frac{16}{25} & (9 \leqq x < 10) \\ \frac{8}{25} & (8 \leqq x < 9) \\ \frac{1}{25} & (7 \leqq x < 8) \\ 0 & (0 \leqq x < 7\text{또는}x \geqq 10)\end{cases}$$

이를 그래프로 그려보면 다음과 같다.







$f_{n+1}(x)=\frac{4}{5}f_n(x)+\frac{1}{5}f_n(x+1)$에 $n=1$을 대입하면 다음이 성립한다.

$$f_2(x)=\frac{4}{5}f_1(x)+\frac{1}{5}f_1(x+1)$$

$$f_3(x)=\frac{4}{5}f_2(x)+\frac{1}{5}f_2(x+1)$$

$f_2(x)$를 $f_3(x)$식에 대입하면

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}f_1(x)+\frac{1}{5}f_1(x+1)\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}f_1(x+1)+\frac{1}{5}f_1(x+2)\right) \\ &= \frac{16}{25}f_1(x)+\frac{8}{25}f_1(x+1)+\frac{1}{25}f_1(x+2) \end{aligned}$$

이 성립한다.

제시문 (나)에서 $\int_0^x f_n(s)ds$는 사고 발생 후 $a\times n$ 시간 경과했을 때, 해안선으로부터 $x\,km$ 이내의 영역에 퍼져있는 원유의 총량을 나타낸다고 하였다. $\int_0^x f_n(s)ds$ 의 x에 대한 변화율이 $f_n(x)$이며 해안선으로부터의 거리에 따른 원유의 분포를 나타낸다.
위에서 구한 $f_n(x)$의 그래프는 시간이 지남에 따라 기름이 해안가 쪽으로 다가오고, 기름이 퍼져있는 범위가 시간의 흐름에 따라 1km씩 넓어지며 원래 기름이 퍼져있던 9 ~ 10km에는 기름의 양이 점점 줄어드는 것을 나타내고 있다.

[1-2]

9~10km에 퍼져있던 유출된 원유는 a시간 마다 해안선 쪽으로 1km씩 접근하는 것을 제시문 (나)의 모형을 통해서 알 수 있다. $a=1$ 일 때 0~1km범위까지 퍼지는데 9시간이 걸리며, 해안가에 원유가 처음으로 발견되는 시간은 10시간 후이다. 해안선에 원유가 축적되기 시작하는 시간은 그 이후가 된다.
(1)에서 $f_n(x)$를 구하는 방법에 따라 $f_l(x)$를 일반화하면 다음과 같다.

$$f_l(x)=\sum_{k=0}^{l-1} {}_{l-1}C_k\left(\frac{4}{5}\right)^{l-k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^k f_1(x+k)\ (l\geq 2)$$

$l=2$ 일 때 (1)에 따라 위 식은 성립한다.

$l=n$ 일 때 위 식이 성립한다면 $f_{n+1}(x)=\frac{4}{5}f_n(x)+\frac{1}{5}f_n(x+1)$에서

$$f_{n+1}(x) = \frac{4}{5}\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^k f_1(x+k) + \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^k f_1(x+k+1)$$

이 성립한다.

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^k f_1(x+k+1) = \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} f_1(x+k)$$

이 성립하므로

$$\begin{aligned} & f_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{5}\right)^k f_1(x+k) + \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{5}\right)^k f_1(x+k) \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^n f_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{ {}_{n-1}C_k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{5}\right)^k f_1(x+k) \right. \\ &\qquad\qquad \left. + {}_{n-1}C_{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{5}\right)^k f_1(x+k)\right\} + \left(\frac{1}{5}\right)^n f_1(x+n) \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^n f_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{5}\right)^k f_1(x+k) + \left(\frac{1}{5}\right)^n f_1(x+n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{5}\right)^k f_1(x+k) \end{aligned}$$

이 성립한다. 즉 $l=n+1$ 일 때도 위 식은 성립하며 수학적귀납법의 원리에 의해 모든 자연수 l에 대해 성립한다.

이를 활용하여 $f_{10}(x)$, $f_{11}(x)$를 구해보자.

$$f_{10}(x) = \begin{cases} {}_9C_0\left(\frac{1}{5}\right)^9 = \frac{1}{5^9} & (0 \leqq x < 1) \\ {}_9C_1\left(\frac{1}{5}\right)^8\left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{36}{5^9} & (1 \leqq x < 2) \\ \cdots \end{cases}$$

$$f_{11}(x) = \begin{cases} {}_{10}C_1\left(\frac{1}{5}\right)^9\left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{40}{5^{10}} & (0 \leqq x < 1) \\ {}_{10}C_2\left(\frac{1}{5}\right)^8\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{720}{5^{10}} & (1 \leqq x < 2) \\ \cdots \end{cases}$$

사건 발생 후 11시간 후까지의 해안가에 축적된 원유의 총량 S_{11}과 12시간 후까지의 원유 축적량 S_{12}를 제시문 (나)의 ㉡식과 $f_n(x)$식을 이용해서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_{11} = S_{10} + \frac{1}{5}\int_0^1 f_{10}(x)dx = 0 + \frac{1}{5}\times\frac{1}{5^9} = \frac{1}{5^{10}}$$

$$S_{12} = S_{11} + \frac{1}{5}\int_0^1 f_{11}(x)dx = \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{5}\times\frac{40}{5^{10}} = \frac{45}{5^{11}} = \frac{9}{5^{10}}$$

즉 해안선에서 처음 원유가 발견된 이후, 1시간 후와 2시간 후의 원유 축적량은 각각 $\frac{1}{5^{10}}$과 $\frac{9}{5^{10}}$로 추정할 수 있다.

[1-3]

$a=2$일 때는 $n=10$인 20시간 이후에 해안선에 처음 원유가 발견되며 $f_n(x)$는 $2n$시간 후의 원유 분포에 대한 그래프가 된다. 투입되는 자원봉사자의 인원 비율을 각 해안가에 축적되는 원유의 양과 비례해서 정하기로 한다면, 16시간부터 20시간까지는 원유가 해안선에 도착하지 않기 때문에 자원봉사자를 투입하지 않아도 된다.
$0 \leqq x < 1$ 에서 $f_{10}(x), f_{11}(x), f_{12}(x), f_{13}(x)$은 다음과 같다.

$$f_{10}(x) = (\frac{1}{5})^9, \qquad f_{11}(x) = {}_{10}C_1(\frac{1}{5})^9(\frac{4}{5})^1$$

$$f_{12}(x) = {}_{11}C_2(\frac{1}{5})^9(\frac{4}{5})^2, \quad f_{13}(x) = {}_{12}C_3(\frac{1}{5})^9(\frac{4}{5})^3$$

$S_1 = 0$, $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{5}\int_0^1 f_n(x)dx \ (n=1,2,3,\cdots)$에서 $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{5}\int_0^1 f_n(x)dx$ 이므로

$$S_{11} - S_{10} = \frac{1}{5}\int_0^1 f_{10}(x)dx = \frac{1}{5^{10}}, \ S_{12} - S_{11} = \frac{1}{5}\int_0^1 f_{11}(x)dx = \frac{8}{5^{10}}$$

$$S_{13} - S_{12} = \frac{1}{5}\int_0^1 f_{12}(x)dx = \frac{880}{5^{12}}, \ S_{14} - S_{13} = \frac{1}{5}\int_0^1 f_{13}(x)dx = \frac{2816}{5^{12}}$$

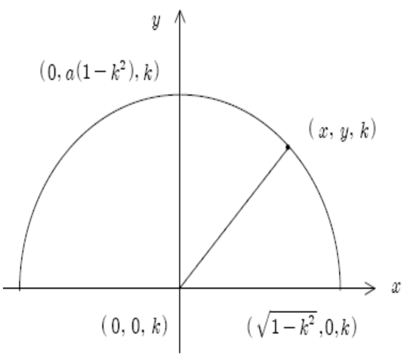
이 성립한다.
$S_{12} - S_{10} = \frac{9}{5^{10}}$, $S_{14} - S_{12} = \frac{3696}{5^{12}}$이므로 원유 유출 후 20시간 후부터 24시간까지와 24시간 후부터 28시간까지의 원유 축적량의 비율은 $9 : \frac{3696}{25} \approx 1 : 16$이 된다. 시간별 원유축적량의 비율에 비례하여 자원봉사자를 투입한다면 약 $1:16$의 비율로 자원봉사자를 투입하면 된다. 만약 20시간에서 24시간까지 축적되는 원유의 양이 이 비율로 구성된 자원봉사자가 다 처리할 수 없는 양이라면 그 양을 처리할 수 있는 인원의 자원봉사를 투입해 최대한 즉시 처리할 수 있도록 해야 한다.

<18>

(1) R_k 는 $z=k$ 평면 위에

$$0 \leqq y \leqq a(1-k^2-x^2)$$

을 만족하는 영역이다. $z=k$ 평면 위에서 x좌표와 y좌표를 나타내는 축을 기준으로 R_k를 도식화하면 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.

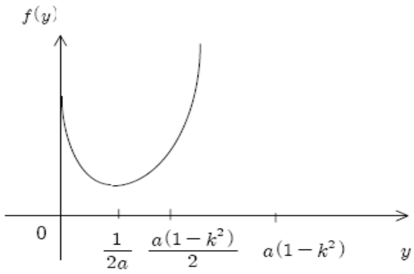


이 때 $(0,0,k)$로부터의 거리가 최대인 점은 포물선 $y=a(1-k^2-x^2)$ 위의 한 점이 된다. 이 포물선 위의 점을 (x,y,k)라 놓으면 $(0,0,k)$로부터의 거리 d는 $d = \sqrt{x^2+y^2}$ 이다.
$y=a(1-k^2-x^2)$에서 $x^2 = -\frac{y}{a} + 1 - k^2$ 이므로 $d = \sqrt{y^2 - \frac{y}{a} + 1 - k^2}$ 이다.
$f(y) = y^2 - \frac{y}{a} + 1 - k^2$ 라 할 때 $0 \leqq y \leqq a(1-k^2)$ 에서 $f(y)$의 최댓값을 구하면 d의 최

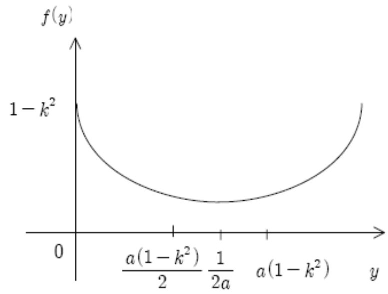
댓값을 구할 수 있다.

이차함수 $f(y)$의 축은 $y=\frac{1}{2a}$이다. 축의 위치에 따라 $0<\frac{1}{2a}<\frac{1}{2}a(1-k^2)$인 경우와 $\frac{1}{2}a(1-k^2)<\frac{1}{2a}$인 경우로 나누어 $f(y)$의 그래프를 생각하면 [그림A][그림B]와 같다.

[그림A]



[그림B]



$0\leqq y\leqq a(1-k^2)$에서 d 의 최댓값은 [그림A]와 같이 $y=a(1-k^2)$ 일 때 $d=a(1-k^2)$이거나 [그림B]와 같이 $y=0$ 일 때 $d=\sqrt{1-k^2}$ 이다.

따라서 d의 최댓값은 $\sqrt{1-k^2}\geqq a(1-k^2)$ 일 때는 $\sqrt{1-k^2}$ 이고 $\sqrt{1-k^2}<a(1-k^2)$ 일 때는 $a(1-k^2)$ 이다. 즉 d의 최댓값은 $\max\left\{\sqrt{1-k^2},\, a(1-k^2)\right\}$이다.

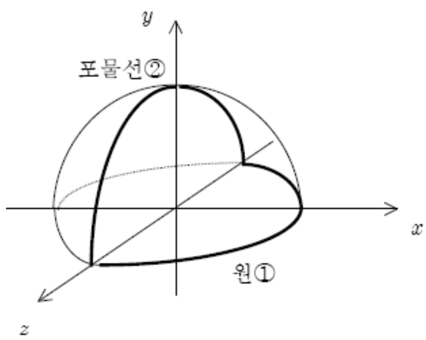
[참고: 좀 더 세밀한 분류]

$0<a\leqq 1$ 일 때 최댓값 $\sqrt{1-k^2}$

$a>1$ 인 경우 $|k|<\sqrt{1-(\frac{1}{a})^2}$ 일 때 최댓값 $a(1-k^2)$

$\sqrt{1-(\frac{1}{a})^2}\leqq|k|\leqq 1$ 일 때 최댓값 $\sqrt{1-k^2}$

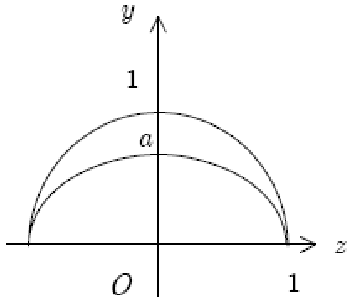
(2) $\max\{A, B\}<C$ 이기 위해서는 $C>A, C>B$ 가 성립해야 한다. 제시문 [그림3]의 입체의 회전체의 부피는 회전축 z로부터 거리가 최대인 점이 회전한 자취에 의해 결정된다. $z=k$ 평면 위에서 z로부터 거리가 최대인 점은 (1)에서 살펴본 원리에 의해 오른쪽 그림에서 xz 평면 위의 원① 위의 점이거나 또는 yz 평면 위의 포물선② 위의 점이다.



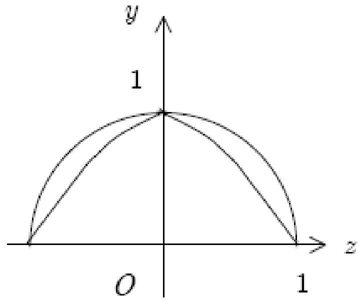
즉 원①과 포물선② 위의 점들이 z축을 중심으로 회전할 때 z축으로부터 거리가 큰 점이 회전한 자취에 의해 부피는 결정된다.

원①이 회전한 자취와 yz평면이 만나는 원을 원②라 하자. yz평면에서 포물선②와 원②를 비교하여 두 그래프 중 위쪽에 있는 곡선이 z축 둘레로 회전한 도형의 부피가 C 이다.

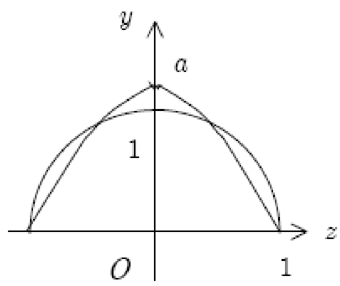
$0<a<1,\ a=1,\ a>1$ 일 때 포물선②와 원②를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림C] $0<a<1$일 때



[그림D] $a=1$일 때



[그림E] $a>1$일 때

$0<a<1$일 때와 $a=1$일 때는 원②가 포물선②보다 위쪽에 있으므로 원②가 입체의 회전체의 부피를 결정짓고 이 때 $C=A$ 이다.

$a>1$일 때는 포물선②와 원②가 교점을 가지면서 교차하는 [그림E]가 나온다.

그 이유는 다음과 같다.

원②의 식 $y^2+z^2=1\,(0\leqq y\leqq 1)$ 과 포물선①의 식 $y=a(1-z^2)\,(y\geqq 0)$을 연립하면

$$y=ay^2,\quad y(ay-1)=0$$

가 된다. 따라서 $y=0$ 또는 $y=\dfrac{1}{a}$이다. $a>1$ 일 때는 $0<\dfrac{1}{a}<1$ 이므로 $0\leqq y\leqq 1$ 를 만족하여 $y=\dfrac{1}{a}$은 두 그래프의 교점의 y 좌표가 된다. 이 때 두 곡선은 $0\leqq y\leqq 1$에서 네 개의 교점을 갖는다. 이에 비해 $0<a<1$ 일 때는 $\dfrac{1}{a}>1$ 이므로 $0\leqq y\leqq 1$ 을 만족하지 못하며 두 곡선은 [그림C]와 같이 $0\leqq y\leqq 1$에서 $y=0$ 에서의 두 개의 교점만 갖는다. $a=1$ 일 때는 [그림D]와 같이 세 개의 교점이 존재한다.

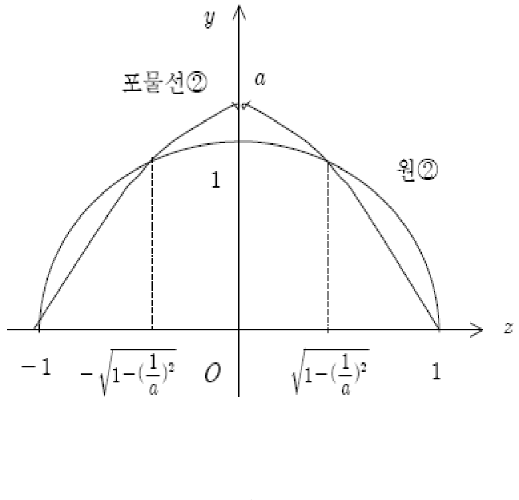
$a>1$ 일 때 그림을 다시 그려보자.

[그림F]에서 $a>1$ 인 경우 $C>A,\ C>B$가 성립함을 알 수 있다. 부피 C 는 A,B와 비교했을 때

$$C=A+2\pi\int_0^{\sqrt{1-(\frac{1}{a})^2}}[a^2(1-z^2)^2-(1-z^2)]\,dz$$

$$C=B+2\pi\int_{\sqrt{1-(\frac{1}{a})^2}}^{1}[(1-z^2)-a^2(1-z^2)^2]\,dz$$

가 된다.



[그림F]

$|z|\leqq\sqrt{1-(\dfrac{1}{a})^2}$ 일 때는 포물선②가 원②보다 위 쪽에 있으므로 $a^2(1-z^2)^2>(1-z^2)$가 성립하고 $\sqrt{1-(\dfrac{1}{a})^2}\leqq|z|\leqq 1$ 일 때는 원②가 포물선②보다 위쪽에 있으므로 $(1-z^2)>a^2(1-z^2)^2$ 이 성립한다. 따라서 $a>1$ 일 때

$C > A$, $C > B$가 성립하여 $\max\{A, B\} < C$가 성립한다.

<19>

(1) 주어진 조건에서 $A\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 이므로 다음이 성립한다.

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

따라서 $A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad A^n\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^n}\\\frac{1}{2^n}\\0\end{pmatrix},\quad A^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^n}\\\frac{1}{3^n}\\\frac{1}{3^n}\end{pmatrix}$ 이 성립한다.

$\overrightarrow{OP_n}=x_n\overrightarrow{OR}+y_n\overrightarrow{OS}+z_n\overrightarrow{OT}$ 에서 벡터의 성분을 3×1행렬로 나타내면 다음이 성립한다.

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=x_n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y_n\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z_n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

이 때 $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}7\\5\\3\end{pmatrix}=A^n\left\{2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{1}{2^n}\\\frac{1}{2^n}\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}\frac{1}{3^n}\\\frac{1}{3^n}\\\frac{1}{3^n}\end{pmatrix}$

$$=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

그러므로 $x_n=2,\ y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ z_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이다.

(2)

$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=x_n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y_n\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z_n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 에서 $a_n=x_n+y_n+z_n,\ b_n=y_n+z_n,\ c_n=z_n$ 이다.

그러므로 $a_n=2+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},\quad b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},\ c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이다.

따라서 점 $P_n(a_n,\ b_n,\ c_n)$과 $P_{n+1}(a_{n+1},\ b_{n+1},\ c_{n+1})$은 $n\to\infty$일 때 모두 $(2, 0, 0)$으로 수렴한다. 이 때 선분 OP_n, 선분 OP_{n+1}의 길이는 각각 2에 수렴하고 선분 P_nP_{n+1}의 길이는 0에 수렴하므로 $\triangle OP_nP_{n+1}$의 둘레의 길이는 4에 수렴한다. 즉 $\lim_{n\to\infty} l_n=4$ 이다.

(3)

$$B\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$를 만족하는 행렬 B는 $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 이다.

$B^n\begin{pmatrix}7\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_n\\e_n\\f_n\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}d_1\\e_1\\f_1\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}7\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-3\\5\end{pmatrix}$이다.

$\begin{pmatrix}d_{n+1}\\e_{n+1}\\f_{n+1}\end{pmatrix}=B^{n+1}\begin{pmatrix}7\\5\\3\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}d_n\\e_n\\f_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_n\\e_n\\f_n\end{pmatrix}$이므로 다음이 성립한다.

$$d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n,\ d_1=\frac{7}{2}$$
$$e_{n+1}=-f_n,\ f_{n+1}=e_n,\ e_1=-3,\ f_1=5$$

따라서 점 $Q_n(d_n,\ e_n,\ f_n)$에서 $d_n=7(\frac{1}{2})^n$ 이고 $(e_n,\ f_n)$은

$$(-3,5),(-5,-3),(3,-5),(5,3)$$

이 반복된다. $n\to\infty$ 일 때 $P_n(a_n,\ b_n,\ c_n)$은 $(2,0,0)$으로 수렴하고 $Q_n(d_n,\ e_n,\ f_n)$의 d_n은 0에 수렴한다. 따라서 n이 충분히 클 때 $Q_n(d_n,\ e_n,\ f_n)$은

$$(0,-3,5),(0,-5,-3),(0,3,-5),(0,5,3)$$

이 반복되는 것으로 볼 수 있다. yz평면에서 꼭짓점의 좌표가 $(y,z)=(0,0),(-3,5),(-5,-3)$인 삼각형의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}|y_1z_2-y_2z_1|$$

을 이용하면 $S=17$ 이다. 마찬가지로 생각하면 삼각형 OQ_nQ_{n+1}의 넓이는 17로 일정하다. 사면체 $OP_nQ_nQ_{n+1}$에서 삼각형 OQ_nQ_{n+1}을 밑면으로 보면 $n\to\infty$일 때 밑면의 넓이는 17에 수렴하고 높이는 2에 수렴하므로 부피는 $\frac{1}{3}\times17\times2=\frac{34}{3}$에 수렴한다.

즉 $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=\frac{34}{3}$이다.

<20> [예시답안]

[정리1]의 대우는 다음과 같다. 어떤 명제의 대우를 증명하면 그 명제는 참이므로 다음 명제를 증명하는 것이 주어진 정리를 증명하는 것이다.

[대우] $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$가 l의 약수가 아니면 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}>\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}$ 을 만족하는 S에 속하는 점 R이 존재한다.

Q의 좌표를 (a,b,c)라 하면 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 값은 $al+bm+cn$ 이 된다. 이 값을 d 라 하자. 이 때 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각이 직각보다 작으므로 d는 양의 정수가 된다. 만약 d가 l의 약수가 아니면 정수 q,r 에 대하여

$$l = dq + r(\ 0 < r < d\ )$$

인 r이 존재한다. 그런데

$$\begin{aligned} r &= l - dq \\ &= l - (al+bm+cn)q \\ &= (1-aq)l + (-bq)m + (-cq)n \end{aligned}$$

이므로 r은 점 $R(1-aq,-bq,-cq)$에 대하여 $r = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR}$ 이다. $r<d$ 이므로

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} > \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR}$$

이 된다. 또한 $r>0$ 이므로 R은 S에 속하는 점이다. 즉 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} > \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR}$ 을 만족하는 S에 속하는 점 R이 존재한다. 대우명제가 증명되었으므로 주어진 정리는 증명되었다.

[정리1]에서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$는 l의 약수이고 마찬가지 원리에 의해 m과 n의 약수이다. 즉 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$는 l, m, n의 공약수이다.

한편 l, m, n의 임의의 공약수를 f라 하면 $al+bm+cn$는 f의 배수이다. 즉 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$는 l, m, n의 임의의 공약수 f의 배수이다.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$는 l, m, n의 공약수이면서 l, m, n의 임의의 공약수의 배수이므로 l, m, n의 최대공약수이다.

<21> 출제의도 및 문항분석

[문제 1]

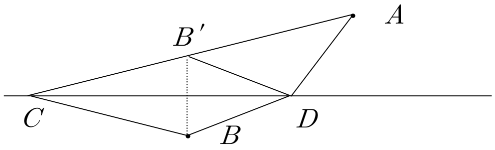
■ 이차곡선의 광학적 성질을 주제로 최적화 문제, 빛의 반사 등 다양한 생각들을 접목하였다.

■ 문항 (1) : 기하학적인 논리전개를 통하여 최적화 문제를 논리적으로 해결할 수 있는 능력을 측정하고자 한다.

■ 문항 (2) : 문항(1)에서 다루었던 최적화 문제를 창의적으로 해석하여 이차곡선의 광학적 성질을 논리적으로 추론하는 능력을 측정하고자 한다. 특히, 계산 위주의 해석학적인 도구를 사용하지 않고 추상적인 논리과정을 통하여 이들 곡선이 가지고 있는 좀 더 근원적인 기하학적인 성질을 유도하는 능력을 보고자 한다.

(예시답안)

(1) 아래 그림과 같이 직선 L에 대하여 거울대칭인 점 B'을 생각하자. 직선 AB'과 직선 L이 만나는 점을 C라 하면 직선 L위의 모든 점 $D(D \neq C)$에 대하여 $|\overline{AC} - \overline{BC}| > |\overline{AD} - \overline{BD}|$ 가 성립함을 보일 수 있다. 따라서 점 C는 문제에서 요구하는 거리의 차를 최대로 하는 점이 된다.



$\mid \overline{AC}-\overline{BC} \mid > \mid \overline{AD}-\overline{BD} \mid$ 의 증명

B와 B'은 직선 L에 대하여 대칭점이므로 삼각형 CBB'은 이등변 삼각형이 된다. 따라서 $\mid \overline{AC}-\overline{BC} \mid = \mid \overline{AC}-\overline{B'C} \mid = \overline{AB'}$가 성립한다. 삼각형의 두변의 길이의 차는 다른 한 변보다 작으므로 삼각형 $AB'D$에서 $\overline{AB'} > \mid \overline{AD}-\overline{B'D} \mid$가 성립한다. 또한 삼각형 DBB'은 이등변 삼각형이므로 $\overline{B'D}=\overline{BD}$이다. 그러므로 직선 L위의 모든 점 $D(D \neq C)$에 대하여, $\mid \overline{AC}-\overline{BC} \mid > \mid \overline{AD}-\overline{BD} \mid$가 성립한다.

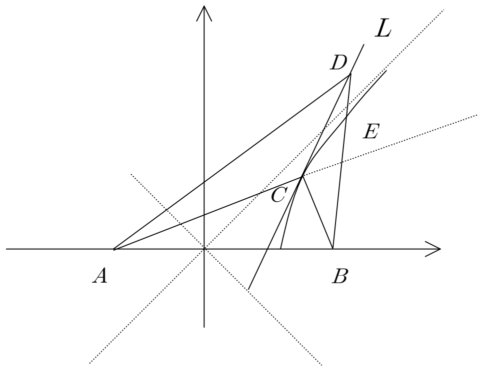
(2) 쌍곡선위의 점 C에서의 접선을 L이라고 하면, 쌍곡선은 이차곡선이므로 쌍곡선과 직선 L은 C에서만 만난다. 또한 C를 제외한 직선 L상의 임의의 점 D는 밖에 있다. 이때, 초점 A,B로부터 D까지 거리의 차가 초점 A,B로부터 C까지 거리의 차 보다 큼을 알 수 있다. 즉, 선분 $\overline{DB}$와 쌍곡선과의 교점을 E라고 하면, 삼각형 $\triangle ADE$의 두변의 길이 합($\mid \overline{AD}-\overline{DE} \mid$)은 다른 한 변의 길이($\mid \overline{AE} \mid$)보다 작으므로

$$\overline{AD}-\overline{DB}=\overline{AD}-\overline{DE}-\overline{EB}<\overline{AE}-\overline{EB}$$

가 성립한다. 또한 E는 쌍곡선위의 점이므로, 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{AE}-\overline{EB}=\overline{AC}-\overline{CB}$이고, 따라서

$$\overline{AD}-\overline{DB}<\overline{AC}-\overline{CB}$$

이다.



또한 문제 (1)에서 거리의 차를 최소로 하는 점 C는 점 B를 직선 L에 대칭인 점이므로 직선 BC와 L의 사잇각은 직선 AC와 L의 사이각은 같다. 따라서 초점 B에서 불을 지피면 쌍곡면에 반사되어 반대쪽 초점 A에서 불빛이 나오는 것처럼 보인다.

<22> [학교발표 출제의도와 문제해설]

(1) 이 논제는 주어진 조건을 만족하는 도형에 대한 성질을 묻고 있다. 이에 좋은 평가를 얻고자 하면 주어진 조건을 수학적으로 기술하고 기술된 식을 간단히 하여 자취의 방정식으

로 나타내며, 자취의 방정식을 체계적으로 분석할 수 있어야 한다. 단순히 방정식만을 찾고 아무런 기하학적 설명이 없는 경우는 감점의 요인이 되며 올바른 방정식을 찾았더라도 설명이 잘못되면 또한 감점이 된다. 주어진 조건에서 $a>\frac{1}{2}$인 경우와 $a<\frac{1}{2}$인 경우 그리고 $a=\frac{1}{2}$인 경우로 나누어 생각하여야 하지만 예를 들어 $a<\frac{1}{2}$인 경우만을 생각해보자. 먼저 A가 y축에 그리고 B가 x축에 있는 경우 A를 $(0,c)$라 하고 B를 $(d,0)$이라 할 수 있다. 선분의 길이가 1이므로 $c^2+d^2=1$을 만족하고 점 P를 (x,y)라 하면 $x=(1-a)d$ 그리고 $y=ac$를 만족한다. 따라서 (x,y)는 $\frac{x^2}{(1-a)^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$을 만족한다. 그러므로 일단 그림 1에서와 같이 원점 근방에서 타원의 일부가 생성된다. 이후에 P는 y축을 따라서 이동하다가 A가 (0,3)을 지난 이후에 그림 1에서와 같은 타원의 일부를 그리며 같은 방법으로 나머지 자취도 구할 수 있다. 여기서 물론 그림 1에서와 같은 타원의 방정식을 각각 구할 수 있지만 기하학적인 패턴을 이용하여 첫 번째 타원의 방정식을 구한 후에 나머지 타원의 방정식을 추정하는 방법이 효율적일 것이다. 그리고 타원의 일부들의 끝점을 잇는 선분들도 자취에 포함시키는 것을 잊지 말아야 할 것이다. $a>\frac{1}{2}$인 경우와 $a=\frac{1}{2}$인 경우도 같은 방법을 적용할 수 있으나 $a>\frac{1}{2}$인 경우는 장축과 단축이 뒤바뀌고 $a=\frac{1}{2}$인 경우는 원을 얻는다.

본 예시문제는 학생들이 느끼는 난이도를 측정하기 위하여 다소 어렵게 출제하였고 지난해 논술고사를 치를 대학생을 대상으로 모의시험을 실시하여 이해도 및 문제 해결능력을 측정하여 보았다.

오답의 예) 모의시험결과 많은 학생들이 자취의 방정식을 얻는 데는 성공하였지만 얻은 자취의 방정식을 올바르게 설명하는데 어려움을 겪었으며 많은 오답에서 그림 2에서와 같이 잘못된 설명이 있었다.

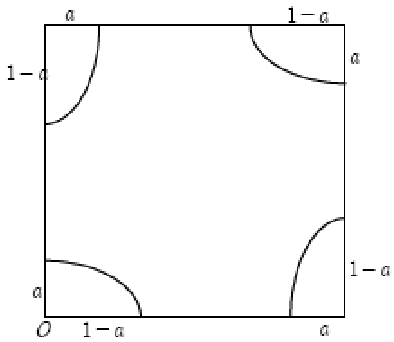


그림 1

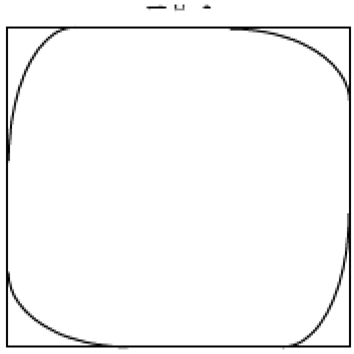


그림 2

(2) 이 논제는 위에서 얻어진 도형을 x축으로 회전시켰을 때 얻어지는 회전체의 부피를 묻고 있다. 회전체의 체적과 적분에 관한 학생들의 기본적인 계산력과 도형의 대칭성을 통한 상쇄의 효과를 이용할 수 있는가가 평가의 대상이다. 먼저 그림 1의 도형을 x축으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피와 그림 3과 4의 빗금 친 도형을 x축으로 회전시켜 얻은 회전체의

부피의 합은 일치한다. 따라서 회전체의 부피는

$$\int_0^{1-a}\pi a^2\left(1-\frac{x^2}{(1-a)^2}\right)dx+\int_0^{1-a}\pi\left(3^2-\left(3-a\sqrt{1-\frac{x^2}{(1-a)^2}}\right)^2\right)dx$$

$$+\int_0^{a}\pi(1-a)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx+\int_0^{a}\pi(3^2-(3-(1-a)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2)dx$$

이다.

서로 상쇄되는 부분을 고려하여 간단히 하면 부피 $f(a)$는

$$\int_0^{1-a}6\pi\frac{a}{1-a}\sqrt{(1-a)^2-x^2}\,dx+\int_0^{a}6\pi\frac{1-a}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=3\pi a^2(1-a)$$

가 된다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{n}\right)=3\pi^2$이다.

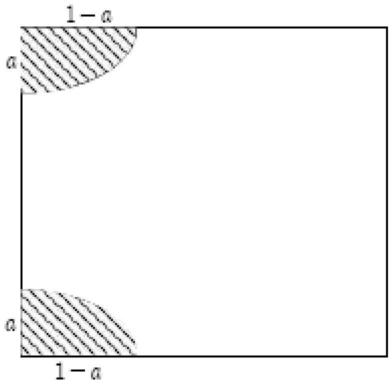


그림 3

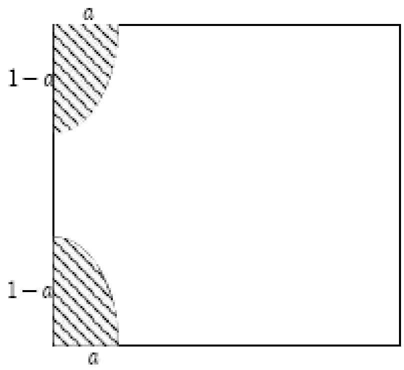


그림 4

오답의 예) 많은 학생들이 위의 상쇄효과를 이용하지 않아서 복잡한 적분의 계산을 하였으며 복잡한 계산의 과정에서 실수를 범하였거나 계산을 다 끝내지 못하였다.

(3) 이 논제는 논제 (a)의 확장으로 두 반직선이 각 θ를 이루며 만날 때, 중점이 이루는 자취에 관한 문제이다. $\theta=\frac{\pi}{2}$가 아니라고 하자. 그림 5에서 점 A를 $(c, c\tan\theta)$라 놓고 점 B를 $(d,0)$이라 놓으면 점 P의 좌표는 $(x,y)=(\frac{c+d}{2},\frac{c\tan\theta}{2})$가 된다. 점 A와 점 B 사이의 거리가 1이므로 $(c-d)^2+c^2\tan^2\theta=1$을 만족한다. 따라서 위의 정보를 이용하여 x,y가 이루는 방정식을 만들면 $\left(\frac{4y}{\tan\theta}-2x\right)^2+4y^2=1$이 된다. 따라서 P의 자취는 앞의 식을 만족시키는 2차 곡선의 일부가 되며 이 이차곡선은 사실상 타원을 회전한 곡선이 된다.

오답의 예) 자취의 방정식을 세우는 과정에서 c와 d는 중간과정에서 택한 변수이므로 자취의 방정식에는 두 변수가 없어야 하는데 일부의 답안에서 두 변수가 포함되어 있는 방정식이 있었다. 그리고 자취의 방정식을 세우고 곡선이 어떤 모양이 되는지 설명을 하지 않은 경우도 있었다.

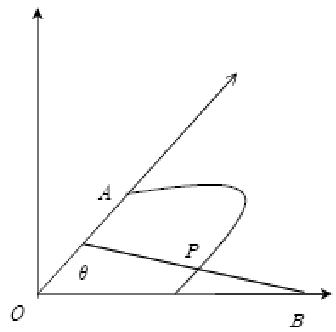


그림 5

<23>

출제의도
고등학교 자연계 수학교과과정에서 핵심적인 내용을 구성하고 있는 수열, 극한, 미분과 적분 그리고 벡터의 기본개념을 잘 이해하고 있는지 능력을 측정하고자 하였다.

곡선과 직선에 의해 둘러싸인 도형의 넓이를 적분을 사용하여 구하고, 직선의 기울기와 접선의 기울기가 같은 점의 위치를 미분을 사용하여 찾아내고 그것을 바탕으로 삼각형의 넓이를 등비수열의 개념을 사용하여 구하는 문제를 출제하였다.

또한 x값의 변화에 따른 직선의 기울기의 변화에 대한 극한값도 계산하고, 두 직선 사이의 각도를 이등분하는 점의 위치를 내적을 사용하여 찾는 문제를 출제하여, 고등학교 과정의 기본개념을 기하학적으로 이해하고 활용하는 능력과 계산능력을 측정하는 것에 역점을 두고 출제하였다.

(a) 답 : $\dfrac{1}{12}(a_2-a_1)^3$ (b) 답 : $a_1+(a_1^2+1)\left[2a_1+\sqrt{1+4a^2}\,\right]$ (c) $\dfrac{1}{8^n}(a_2-a_1)^3$ (d) $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+4a^2}$

(a) 점 P_1, P_2에서의 접선의 방정식을 각각 구하면

$$y=2a_ix-a_i^2+1 \qquad (i=1,2)\cdots\cdots ①$$

이다. 두 접선의 방정식의 교점 P을 구하면, $P\left(\dfrac{a_1+a_2}{2},\ a_1a_2+1\right)$

직선 P_1P_2의 방정식을 구하면 $y=(a_1+a_2)x-a_1a_2+1$ $\cdots\cdots$ ②이므로

그림 1의 빗금친 부분의 넓이 S는

$$S=(\triangle P_1P_2P\text{의 넓이})-\int_{a_1}^{a_2}\left\{(a_1+a_2)x-a_1a_2+1-(x^2+1)\right\}dx=\frac{1}{12}(a_2-a_1)^3$$

이다.

(b) ①에서 Q_1의 좌표를 구하면, $Q_1\left(\frac{a_1^2-1}{2a_1},0\right)$이다. $T_1(x,0)$라 놓고, 점 T_1에서 직선 P_1Q_1에 내린 수선의 발을 H라 하자. 제시문의 T_1의 정의로부터

$$\frac{\overrightarrow{P_1R_1}\cdot\overrightarrow{P_1T_1}}{|\overrightarrow{P_1R_1}|}=\frac{\overrightarrow{P_1H_1}\cdot\overrightarrow{P_1T_1}}{|\overrightarrow{P_1H_1}|}=\frac{\overrightarrow{P_1Q_1}\cdot\overrightarrow{P_1T_1}}{|\overrightarrow{P_1Q_1}|}$$

이 성립한다. $\frac{\overrightarrow{P_1R_1}\cdot\overrightarrow{P_1T_1}}{|\overrightarrow{P_1R_1}|}=a^2+1$이고,

$\overrightarrow{P_1T_1}=(x-a_1,-a_1^2-1)$, $\overrightarrow{P_1Q_1}=\left(-\frac{a_1^2+1}{2a_1},-(a_1^2+1)\right)$이므로

$\frac{\overrightarrow{P_1Q_1}\cdot\overrightarrow{P_1T_1}}{|\overrightarrow{P_1Q_1}|}=\frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}(x-a_1,\ -2a_1(a_1^2+1))$이다. 따라서

$$\frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}(x-a_1-2a_1(a_1^2+1))=a_1^2+1$$

이 성립한다. 그러므로 T_1의 x좌표는

$$x=a_1+(a_1^2+1)\left\{2a_1+\sqrt{1+4a_1^2}\right\}$$

이다.

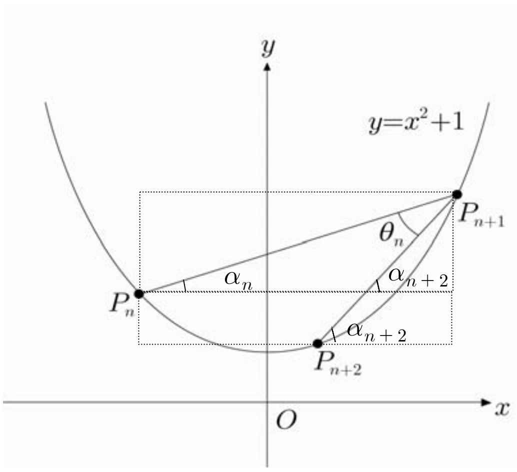
(c) 점 $P_3(a_3,a_3^2+1)$에서의 미분계수와 직선 P_1P_2의 기울기가 같으므로 $2a_3=a_1+a_2$, $a_3=\frac{a_1+a_2}{2}$가 성립한다. 세 점 $P_1(a_1,a_1^2+1)$, $P_2(a_2,a_2^2+1)$, $P_3(a_3,a_3^2+1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형의 넓이 A_1을 계산하면 $\frac{(a_2-a_1)^3}{8}\cdots$ ③이다.

A_n의 넓이를 같은 방법으로 계산하면 $\frac{|a_{n+1}-a_n|^2}{8}$이고, $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2}$가 성립한다.

따라서 $A_{n+1}=\frac{|a_{n+2}-a_{n+1}|^3}{8}=\frac{|(a_{n+1}-a_n)/2|^3}{3}=\frac{A_n}{8}\cdots$ ④이다. ③, ④에서

$A_n=\frac{(a_2-a_1)^3}{8^n}$이다.

(d)



그림과 같이 α_n, α_{n+2}를 정의하면, $\tan\alpha_n = a_n + a_{n+1}$, $\tan\alpha_{n+2} = a_n + a_{n+2}$이 성립한다.

$$\tan\theta_n = \tan(\alpha_{n+2} - \alpha_n) = \frac{\tan\alpha_{n+2} - \tan\alpha_n}{1 + \tan\alpha_{n+2}\tan\alpha_n}$$

$$= \frac{a_{n+2} - a_n}{1 + (a_{n+2} + a_n)(a_{n+1} + a_n)} = \frac{1}{2}\frac{a_{n+1} - a_n}{1 + (a_{n+2} + a_n)(a_{n+1} + a_n)}$$

이다. 따라서, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tan\theta_n}{a_{n+1} - a_n}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + 4a^2}$이다.

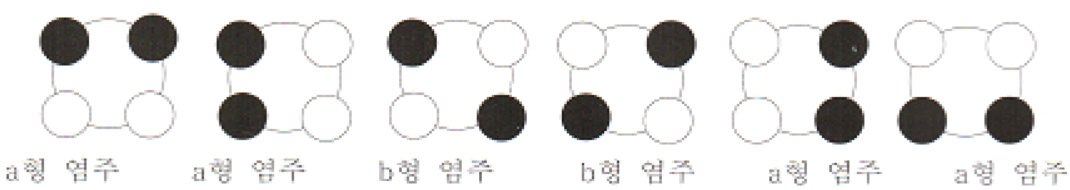
<24> [학교발표자료]

제시문 (가)에 대하여

제시문 (가)에서 a형 염주가 만들어질 가능성과 b형 염주가 만들어질 가능성이 같지 않으므로 $P(A) = \frac{1}{2}$이라 할 수 없다. 그 이유는 수학적 확률을 적용할 수 있도록 근원사건들을 새롭게 고쳐서 a형 염주가 만들어질 올바른 확률을 구하는 다음 과정에서 명확히 알 수 있다.

a형 염주가 만들어질 올바른 확률을 올바르게 구하기 위해 각 근원사건들이 같은 정도로 기대되도록 근원사건들과 표본공간을 새롭게 구성하는 방법은 여러 가지가 있을 수 있다. 다음은 많은 학생들이 선택한 올바른 방법 중 하나이다.

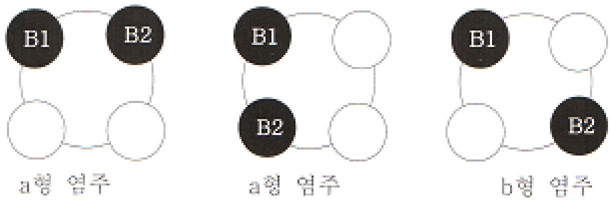
우선 염주에서 구슬 배치의 회전 및 대칭성을 고려하지 않도록 한다. 두 개의 검은 구슬과 두 개의 흰 구슬을 네 곳에 배치하는 방법의 수는 ${}_4C_2 = 6$가지이다.



이들 6가지 중 a형 염주가 되는 경우의 수는 4가지이다. 따라서 $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$이다.

다음 예와 같이 a형 염주가 만들어질 확률이 $P(A)=\frac{2}{3}$임을 설명하는 방법은 여러 가지 다른 방법이 있을 수 있다. 바르게 서술하면 모두 올바른 답안이 될 수 있다.

(예 1) 검은 구슬을 각각 $B1$, $B2$라 하면, $B1$의 위치를 기준으로 $B2$의 가능한 위치는 3 가지이다.



이들 세 가지의 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되고 a형 염주가 일어날 경우가 두 가지이므로 $P(A)=\frac{2}{3}$이다.

(예 2) 검은 구슬을 각각 $B1$, $B2$라 하고 흰 구슬을 각각 $W1$, $W2$라 하자. 염주에서 구슬이 배치될 네 곳을 정해서 $P1$, $P2$, $P3$, $P4$ 라 하자.

- 네 개의 구슬을 배치할 수 있는 방법의 수는 $4!=24$가지이다.
- 이들 중 a형 염주가 만들어지는 경우의 수는 다음과 같다.

$B1$의 위치 선택 방법 (4가지)
× $B1$의 위치가 결정된 후 $B2$의 위치 선택 방법 (2가지)
× $B1$, $B2$의 위치가 결정된 후 $W1$의 위치 선택 방법 (2가지)
× $B1$, $B2$, $W1$의 위치가 결정된 후 $W1$의 위치 선택 방법 (1가지)
$=4\times2\times2\times1\ =16$가지

따라서 $P(A)=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$ 이다.

제시문 (나)에 대하여

제시문 (나)의 경우는 조건부확률을 잘못 적용하여 잘못된 결과가 유도되었다. 조건부확률에서와 같이 여러 가지 사건들을 다루어야할 경우에는 먼저 사건들을 명확히 정의하는 과정을 거쳐야 한다.

한 정의 알약을 임의로 선택하여 검사했을 때, 사건 $A_{모조}$, $A_{진품}$, $B_{모조}$, $B_{진품}$을 다음과 같이 정의하자.

$A_{모조}=$ 선택한 알약이 모조품일 사건,
$A_{진품}=$ 선택한 알약이 진품일 사건,
$B_{모조}=$ 선택한 알약의 검사 결과가 모조품으로 판정될 사건,
$B_{진품}=$ 선택한 알약의 검사 결과가 진품으로 판정될 사건

임의의 알약 한 정을 검사한 결과 모조품이라는 판정이 나왔을 때, 그 알약이 모조품일 확률을 위에서 정의한 사건들을 이용하여 나타내면 이 확률은 조건부 확률$P(A_{모조}|\ B_{모조})$

임을 알 수 있다.

$$P(A_{모조}|\ B_{모조}) = \frac{P(A_{모조} \cap B_{모조})}{P(B_{모조})}$$

이고 $P(A_{모조} \cap B_{모조}) = P(A_{모조})P(B_{모조}|\ A_{모조}) = 10^{-4} \times 0.9 = 9 \times 10^{-5}$

$$P(B_{모조}) = P(A_{모조} \cap B_{모조}) + P(A_{진품} \cap B_{모조})$$

$$= P(A_{모조})P(B_{모조}|\ A_{모조}) + P(A_{진품})P(B_{모조}|\ A_{진품})$$

$$= 10^{-4} \times 0.9 + (1 - 10^{-4}) \times 0.1 \approx 0.1$$

이므로 $P(A_{모조}|\ B_{모조}) \approx \dfrac{9 \times 10^{-5}}{0.1} = 9 \times 10^{-4}$

이다. 따라서 임의의 알약 한 정을 검사한 결과 모조품이라는 판정이 나왔을 때, 그 알약이 모조품일 확률은 약 9×10^{-4}이다.

< 학교발표자료에 대한 보충 >

제시문 (가)에 대해서는 수학적 확률은 근원사건이 동일한 정도로 기대될 때 정의된다는 점, 제시문에서는 동일한 정도로 기대되지 않는 두 사건을 근원사건으로 보고 수학적 확률을 정의하였기 때문에 잘못되었다는 점을 지적하는 것이 필요하다. 그 다음 올바른 근원사건의 구성방법을 제시하고 A의 확률을 제시하면 된다. 이 논제는 수학적 확률의 정확한 개념에 대한 이해를 묻는 문제이다.

제시문 (나)에 대한 논술에서 학교 측에서는 근삿값을 제시하는 답안을 발표하였다. $P(A_{모조}|\ B_{모조})$의 정확한 값은 $\dfrac{1}{1112}$ 이다.

<25>

[2-1] [학교 발표 평가 기준]

새로운 개념을 이해하고 이 개념을 응용하는 데 필요한 현실적이고 측정 가능한 지표를 도출하는 능력을 측정하고자 하였다. 임의의 숫자를 순서대로 정리하는 두 알고리즘의근본적인 성격을 파악하고 이를 컴퓨팅효율과 연계하여 판단지표를 제시하고 이 판단지표의 합리성을 적절히 표현하였는가 여부를 평가하였다. 우수답안으로 채택된 답안들에 대한 총평은 다음과 같다.

[답안1]

제시문과 같은 상황에서 알고리즘을 사용하는 이유는 보다 빠르게 항을 정리하기 위해서 이다. 따라서 알고리즘 1과 알고리즘 2 가운데 어느 것이 더 효율적인지는 새로운 항이 추가되었을 때 정렬에 걸리는 시간을 비교하여 알 수 있을 것이다. 그런데, 새로 집어넣는 항의 크기에 따라 정렬하는 데에 걸리는 시간은 크게 달라진다.(새로운 항의 크기가 작을수록 알고리즘 1이, 새로운 항의 크기가 클수록 알고리즘 2가 효율적이다) 따라서 특정한 경우를 고려하기보다는 전체적인 경우, 즉 어떠한 항이 추가되었을 때 각각의 알고리즘에서 그 항

의 위치를 찾기 위해 평균적으로 시도하는 크기비교 횟수를 비교하는 것이 옳다고 생각된다. 자세한 과정은 (2)에 서술되어 있다.

<평가>

알고리즘의 우수성은 컴퓨터 처리속도로 판단할 수 있다는 점을 제시하였다. 그리고 두 개의 알고리즘 각각이 두 수의 대소를 체계적으로 비교하는 것이므로 처리속도는 하나의 자료가 추가되었을 때 추가적으로 필요한 비교횟수가 중요함을 강조하였다. 또한 이 수치는 자료에 따라 그 수치가 달라지므로 평균을 내어 이를 평가지표로 사용하라고 제시하고 있다.

[답안2]
알고리즘의 우수성은 “얼마나 적게 시간이 걸리는가.”에 따라 좌우된다고 할 수 있다. 알고리즘의 성능을 측정하기 위한 지표로는 세 가지를 들 수 있다. 편의를 위해 한 번의 단위 연산(비교, 배치 등)을 수행하는 데 걸리는 시간을 단위 시간이라고 정의하자.
첫째로, n개의 숫자가 주어졌을 때 각각의 알고리즘을 수행하는 데 걸리는 최대시간($T_{\max}$)과 최소 시간($T_{\min}$), 혹은 그의 평균($T_{avg}=\dfrac{T_{\max}+T_{\min}}{2}$)을 구해 봄으로써 성능을 비교할 수 있다.
둘째로, n개의 숫자가 주어졌을 때 각각의 알고리즘이 수행하는 단위 연산의 평균 수행횟수를 통해 알고리즘의 성능을 비교할 수 있다.
셋째로, 알고리즘의 수행 시간을 구하기 어려운 경우, 각 알고리즘의 수행시간의 최대 차수만을 비교하는 방법이 있다.
위 세 가지 방법 중에 가장 정확하다 할 수 있는 방법은 두 번째 방법이다. 하지만 수행횟수를 완벽하게 구하기 매우 어려울 경우, 첫 번째 방법을 이용해 비교할 수 있다. 이마저도 난해해 수행 시간을 구하기 매우 어려운 경우 세 번째 방법을 이용해 비교할 수 있다.
단, 이 경우 완벽한 비교는 되지 않으며, 입력크기 n이 매우 큰 궁극적인 경우, 즉 $n\to\infty$인 경우의 비교이므로 다른 방법에 비해 정확하다 할 수 없다.

<평가>

알고리즘의 우수성은 컴퓨터 처리속도로 판단할 수 있다는 점을 제시하였다. 그리고 두 개의 알고리즘 각각이 두 수의 대소를 체계적으로 비교하는 것이므로 처리속도는 주어진 자료를 정리하는데 필요한 평균적인 비교횟수로 측정하라고 제시하고 있다. 이외에도 다양한 지표를 제시하고 있다. 좀 더 체계적이고 논리적일 수 있도록 글을 다듬을 필요가 있다.

[2-2] [학교발표 평가 기준]

현실을 적절히 모사하는 적합한 모델링을 통하여 합리적인 판단을 유추하는 능력을측정하고자 하였다. 적절한 논리를 바탕으로 현상을 모델링하고 이와 관련된 적합한 계산과논리를 통하여 자신의 판단을 효율적으로 표현하였는가 여부를 평가하였다. 우수답안으로 채택된 답안들에 대한 총평은 다음과 같다.

[답안1]

첫 번째 경우 : 알고리즘 1.
새로운 항의 범위가 $a_{k+1} < b_k$일 경우 크기 비교는 1번만 해도 된다.
새로운 항의 범위가 $b_1 < a_{k+1} < b_2$일 경우 크기 비교는 b_1, b_2와 각각 1번씩, 2번을 해야 한다.
새로운 항의 범위가 $b_2 < a_{k+1} < b_3$일 경우 크기 비교는 3번을 해야 한다.
새로운 항의 범위가 $b_{k-1} < a_{k+1} < b_k$일 경우 크기 비교는 k번을 해야 한다.
각각의 항의 범위에서 비교하는 횟수를 모두 더하면 $\frac{k(k+1)}{2}$ 이며, 새로운 항이 들어갈 수 있는 범위는 모두 k가지이므로 평균적으로 행하는 크기비교의 횟수는 $\frac{k+1}{2}$이다.

두 번째 경우 : 알고리즘 2.
알고리즘 2에서 항이 속할 수 있는 범위는 모두 k가지이다. 결국 2로 n번 나누어서 얻어내는 범위는 k가지의 범위들 중 하나이며, 따라서 $\frac{1}{k} = \frac{1}{2^n}$ 이라는 식이 성립한다. 이 식은 곧 $k = 2^n$과 같으며, $n = \log_2 k$ 이다. 만일 n이 정수가 아니라 소수라면, 소수부분을 버린 [n]번의 나누기는 완전한 범위를 얻어낼 수 없으므로 n을 올림해서 크기비교 횟수를 얻어낸다.(예 : n=6.8인 경우 7번 크기비교를 해야 한다.) 따라서, (평균적으로) 행하는 크기비교의 횟수는 k가 2^x꼴일 경우 n번, k가 2^x꼴이 아닐 경우 $[n]+1$번이다.
n(혹은 $[n]+1$)과 $\frac{k+1}{2}$의 크기를 비교하면, $\frac{k+1}{2}$의 크기가 더 크다. 이는 곧 알고리즘 1이 항의 정렬을 위해 평균적으로 행하는 크기비교의 횟수가 알고리즘 2가 항의 정렬을 위해 평균적으로 행하는 크기비교의 횟수에 비해 더 많다는 것을 의미한다. 따라서 알고리즘 1의 경우가 항의 정렬을 위해 평균적으로 소비하는 시간이 더 길며, 효율성은 알고리즘 2에 비해 떨어지게 된다.

<평가>

각각의 알고리즘에 대하여 하나의 자료가 추가되었을 때 추가적으로 필요한 평균비교횟수를 구하였다. 이를 이용해 두 번째 알고리즘이 우수하다고 판단하였다.

[답안2]

알고리즘 1에서 a_1부터 a_n까지를 배열하기 위한 비교횟수는 $\frac{1}{4}n(n+1)-1$회로 n^2에 비례하여 증가한다.
알고리즘2에서 a_1부터 a_n까지를 배열하기 위한 비교횟수는 $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$일 때 $(k-1)2^k + 2(k-3) + k(n+1-2^k)$회로 $n\log_2 n$에 비례하여 증가한다.

n^2와 $n\log_2 n$를 비교하면 (n≥2)범위에서 n^2이 $nlog_2 n$보다 항상 크다. 따라서 알고리즘1은 n이 커질수록 비교횟수가 더 많이 증가한다. 따라서 배열해야하는 수의 개수가 많아질수록 알고리즘2가 우수하다. 다만, 배열해야하는 수의 개수가 적을 때는 알고리즘1이 더 우수할 수도 있다.

[평가] 각각의 알고리즘에 대하여 주어진 자료를 처리할 때 필요한 평균비교횟수를 구하였다. 이를 이용해 두 번째 알고리즘이 우수하다고 판단하였다.