랑데뷰 수학

수능을 완성하다!-수학I

유형 1 거듭제곱근의 뜻과 성질

출제유형 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제를 해결한다.

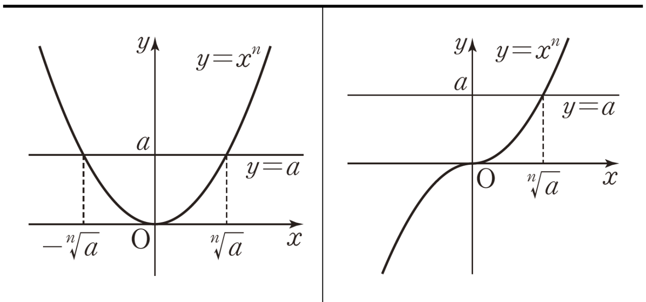
(1) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 $x^n=a$를 만족시키는 실수 x, 즉 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

① n이 짝수인 경우

- $a>0$일 때 : $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ 로 2개다.
- $a=0$일 때 : 0으로 1개다.
- $a<0$일 때 : 없다.

② n이 홀수인 경우

$\sqrt[n]{a}$로 1개뿐이다.



<n이 짝수일 때> <n이 홀수일 때>

(2) $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

1)

등식 $\sqrt[5]{-288}+\sqrt[5]{a}\times\sqrt[5]{b^2}=0$을 만족시키는 두 자연수 a, b에 대하여 $a-b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

2)

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt[3]{(a-2)x^2+2(a-2)x-6}$이 음의 실수가 되도록 하는 정수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, M^2+m^2의 값을 구하면?

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

68)

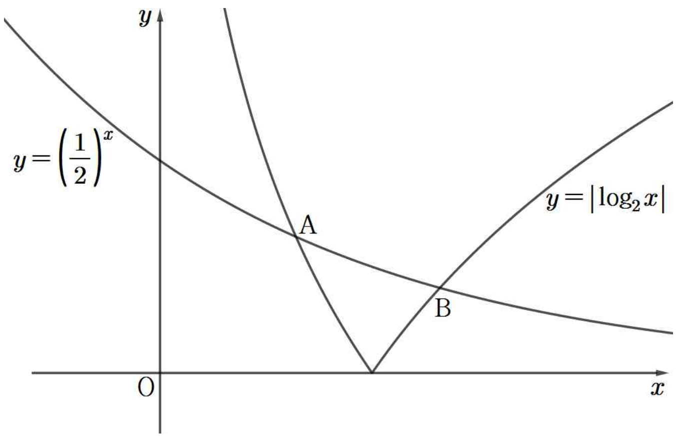
그림과 같이 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$와 $y=|\log_2 x|$의 두 교점을 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 할 때, 다음 중 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$)

| 보 기 |

ㄱ. $\frac{1}{2} < y_1 < \frac{2}{3}$

ㄴ. $-2 < \frac{x_1}{x_1 - 1} < -1$

ㄷ. $x_2 - y_2 < 1$



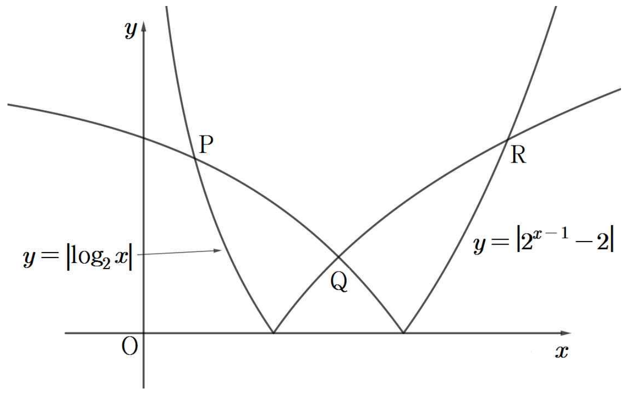
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

69)

그림과 같이 두 곡선 $y=|\log_2 x|$, $y=|2^{x-1}-2|$가 만나는 세 점을 각각

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$

라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



| 보 기 |

ㄱ. $y_2(x_3-1) < y_3(x_2-1)$

ㄴ. $y_1(2-x_2) < y_2(2-x_1)$

ㄷ. $(x_2-1)(y_1-1) < (1-x_1)(1-y_2)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

지&로함수 단원평가

77)

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{2^{2018}}+1)=2^a-1$$

을 만족하는 정수 a에 대하여 $\log_2 a$의 값은?

① 2018　② 2019　③ 2020

④ 2^{2019}　⑤ $\log_2(2^{2019}-1)$

78)

-25의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 a, $\sqrt{23}$ 의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

79)

$(\sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{8}})^n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

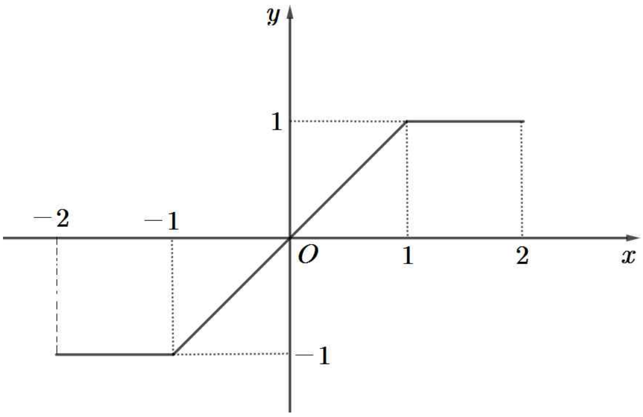
80)

$x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$일 때,

$(5-x^{\frac{2}{3}})(5-x^{-\frac{2}{3}})+(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})^2$의 값을 구하시오.

112)

함수 $y=f(x)\ (-2 \le x \le 2)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수 $g(x)=a^{f(x)}\,(a>0,\ a\neq 1)$에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?



| 보 기 |

ㄱ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값의 곱은 1이다.
ㄷ. 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 2일 때, 가능한 a의 값들의 합은 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

113) 킬러

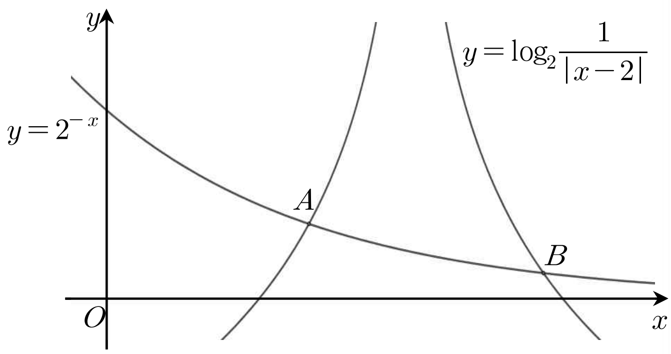
그림과 같이 곡선 $y=2^{-x}$이 곡선 $y=\log_2\dfrac{1}{|x-2|}$와 만나는 점을 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $x_1 < 2-2^{-\frac{1}{2}}$

ㄴ. $x_2 > 2+2^{-\frac{1}{8}}$

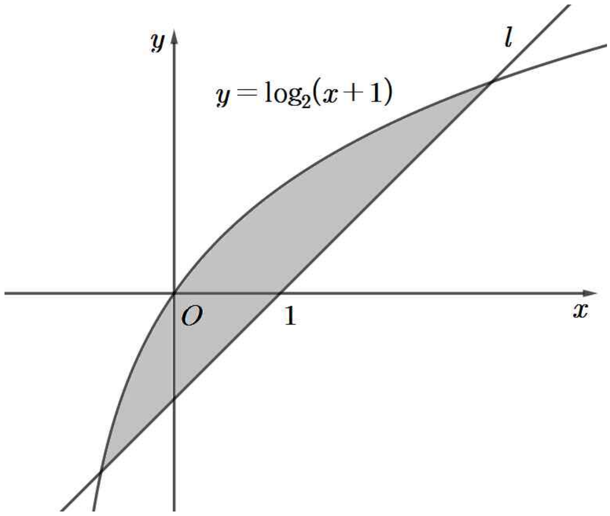
ㄷ. $\dfrac{y_1}{y_2} > 2^{\sqrt{2}}$



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

114) 킬러

그림과 같이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 점 $(1, 0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<0<\beta)$라 하자. 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

154)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\sin\frac{\pi}{3}x\ (0\le x\le 3)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f\left(x-\frac{3}{2}\right)$이다.

자연수 n에 대하여 구간 $[0, 3n]$에서 방정식 $nf(x)=\frac{x}{3}$의 모든 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.

155)

두 실수 a와 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=3\cos(ax)+b$가 있다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{4}, k\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{9}{4}\pi, k\right)$을 지나고 $f\left(\frac{5}{2}\pi\right)=2$일 때, k의 값과 같은 것은? (단, $0<a<\frac{8}{9}$이고 k는 상수이다.)

① $3\cos\frac{\pi}{5}+1$ ② $3\cos\frac{\pi}{5}-1$
③ $3\cos\frac{2\pi}{5}+1$ ④ $3\cos\frac{2\pi}{5}-1$
⑤ $3\cos\frac{2\pi}{5}+2$

156) 킬러

자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k=\left\{\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi \,\middle|\, m\text{은 자연수}\right\}$$

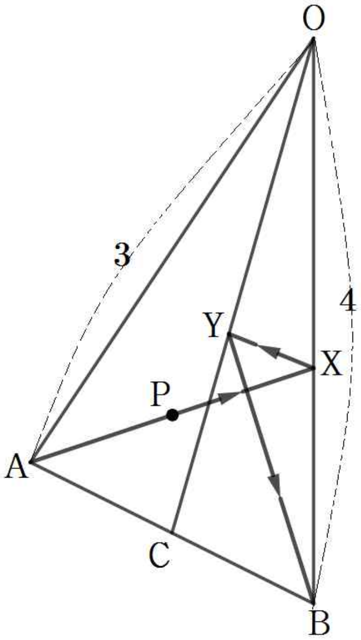
라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보 기
ㄱ. 집합 A_5의 1이 아닌 모든 원소의 합을 p라 할 때, $p<0$이다.
ㄴ. 집합 A_k의 모든 원소의 곱이 0이 되도록 하는 100이하의 k의 개수는 25이다.
ㄷ. $n(A_k)=15$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 57이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

164)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=3$, $\overline{\mathrm{OB}}=4$인 삼각형 OAB가 있다. $\angle\mathrm{AOB}$의 이등분선이 $\overline{\mathrm{AB}}$와 만나는 점을 C라 하자. 움직이는 점 P가 점 A에서 출발하여 변 OB와 선분 OC 위의 두 점 X, Y를 차례대로 거쳐 점 B까지 도달한다. 점 P가 이동한 거리의 최솟값이 5일 때, 변 AB의 길이를 l이라 하자. l^2의 값은?



① $25-12\sqrt{3}$ ② $25-12\sqrt{2}$

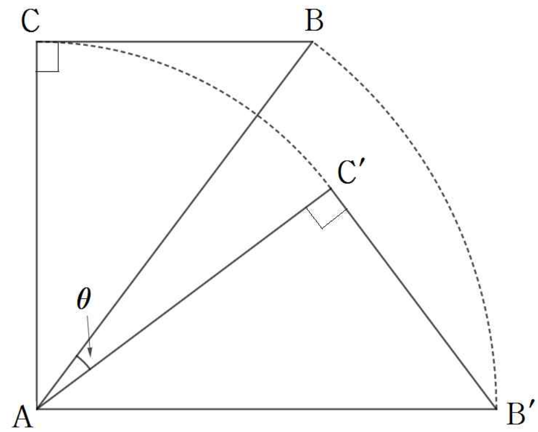
③ $25-9\sqrt{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

165)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC를 꼭짓점 A를 중심으로 시계방향으로 회전한 삼각형 AB′C′에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}}$와 $\overline{\mathrm{AB'}}$가 평행할 때, $\angle\mathrm{BAC'}=\theta$라 하자. $\sin\theta$의 값은?

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

① $\frac{7}{25}$ ② $\frac{8}{25}$ ③ $\frac{9}{25}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{11}{25}$

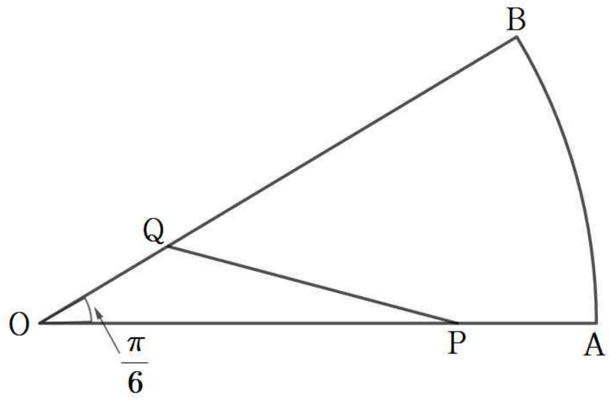


182)

그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 부채꼴 AOB에서 선분 OA위의 점 P와 선분 OB위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OP}\times\overline{OQ}=\overline{AP}\times\overline{BQ}$
(나) 부채꼴 AOB의 넓이와 삼각형 POQ의 넓이의 비는 $16\pi : 9$이다.

선분 OQ의 길이를 x, 선분 OP의 길이를 y, 삼각형 POQ의 넓이를 z라 할 때, x, y, z는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $x+y+z$의 값을 구하시오. (단, $x<y$)

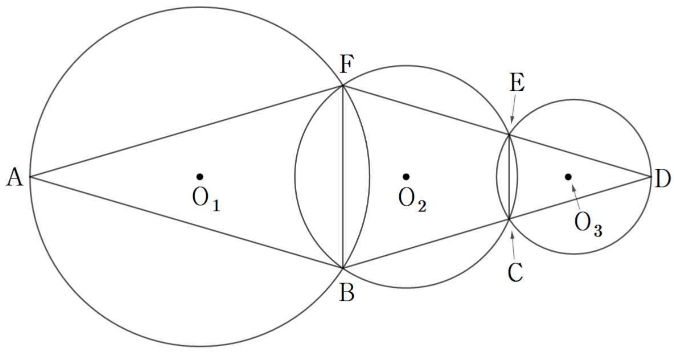


183)

그림과 같이 한 평면 위에 있는 삼각형 ABF의 외심을 O_1, 사각형 FBCE의 외접원의 중심을 O_2, 삼각형 ECD의 외심을 O_3라 하고 $\angle FAB=\angle FDB=\alpha$, $\angle FEB=\beta$, $\angle EBC=\gamma$라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{3}{2},\quad \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\ \overline{O_1O_2}=\sqrt{17}$$

이 성립한다. 삼각형 ABF의 외접원의 넓이와 삼각형 ECD의 외접원의 넓이의 합이 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 세 점 B, C, D와 세 점 D, E, F는 한 직선 위에 있고 p와 q는 서로소인 자연수이다.)



255)

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=4$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2}=a_n-3$ $(n=1,\ 2,\ 3)$ (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+5}=a_n$ 이다.

$\sum_{k=1}^{102} a_k=209$일 때, a_2의 값을 구하시오.

256)

수열 a_n에서 $a_1=-20$, $a_{n+1}=a_n+2$ 이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$일 때, $\sum_{k=m}^{m+5} S_k$ 값이 최소가 되는 m의 값을 a, $a_k=0$을 만족하는 k의 값을 b라고 하자.

$a+b$의 값은?

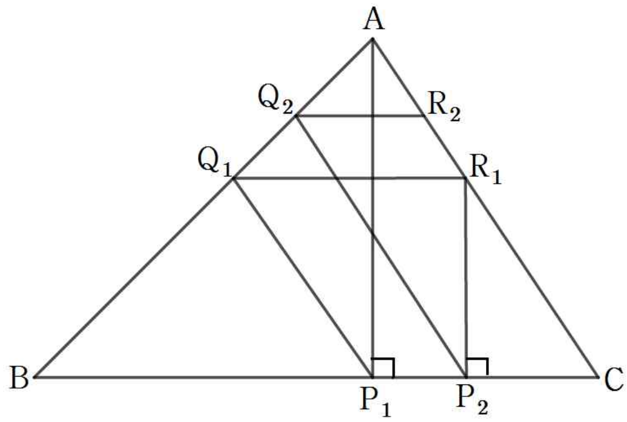
① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

257)

그림과 같이 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P_1이라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}_1}=1$이고, P_1은 선분 BC를 3: 2로 내분하는 점이다.

자연수 n에 대하여 세 점 Q_n, R_n, P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 선분 BC위의 점 P_n을 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 Q_n이라 한다. (나) 선분 AB위의 점 Q_n을 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 R_n이라 한다. (다) 점 R_n에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P_{n+1}이라 한다.



선분 $\mathrm{R}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 l_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$l_{n+1}=pl_n+q$

가 성립한다. $5(l_1+p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)

320)

첫째항이 음의 정수이고 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오.

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=43$

(나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=103$

(다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=119$

5) 정답 45

$a_n = \sqrt[n]{n^2-19n+60} = \sqrt[n]{(n-4)(n-15)}$

이고 n이 홀수 이고 $(n-4)(n-15)<0$일 때,

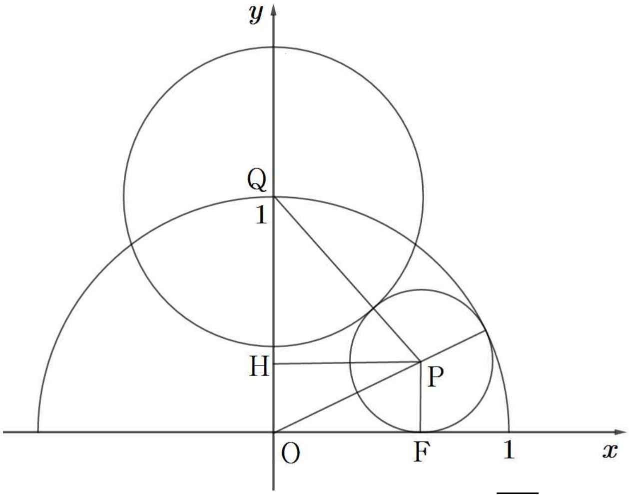
$a_n<0$이다.

따라서 $4<n<15$의 홀수는 $5, 7, 9, 11, 13$이므로

모든 n의 합은 $5+7+9+11+13=45$이다.

6) 정답 ②

반원 A의 중심을 원점 O, 원 C의 중심을 점 P, 원 B의 중심을 점 Q라 하자.



원 C의 반지름의 길이를 r이라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=1-r$이다.

점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 F, H라 하면

직각삼각형 POF에서

$\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{(1-r)^2+r^2}=\sqrt{1-2r}$

원 B와 원 C의 접점을 점 R이라 하면

$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $\overline{\mathrm{PR}}=r$, $\overline{\mathrm{QH}}=1-r$,

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{1-2r}$이다.

직각삼각형 QHP에서

$$(1-r)^2+\left(\sqrt{1-2r}\right)^2=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+r\right)^2$$

$$r^2-4r+2=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}r+r^2$$

$$\left(4+2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)r=2-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

에서 $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=a$라 두면

$$(4+2a)r=2-a^2$$

$$r=\frac{2-a^2}{4+2a}$$

따라서 $l=2\pi\frac{2-a^2}{2a+4}=\pi\frac{2-a^2}{a+2}$

$25l+6S$

$$=\pi\left(\frac{50-25a^2}{a+2}+6a^2\right)$$

$$=\pi\left(\frac{50-25a^2+6a^3+12a^2}{a+2}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{52-13a^2}{a+2}\right)\ \left(\because a^3=\frac{1}{3}\right)$$

$$=13\pi\left(\frac{4-a^2}{a+2}\right)=13\pi(2-a)$$

$$=13\pi\left(2-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$$

[다른 풀이]

직각삼각형 QHP에서

$$(1-r)^2+\left(\sqrt{1-2r}\right)^2=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+r\right)^2$$

$$r^2-4r+2=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}r+r^2$$

$$\left(4+2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)r=2-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

따라서

$$r=\frac{1}{2}\times\frac{2-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}{2+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$$

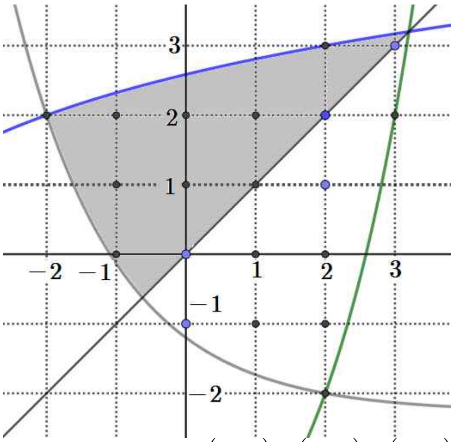
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\left(2-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)\left(4-2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)}{2^3+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{3}{50}\left(8-4\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-4\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=\frac{3}{50}\left(\frac{26}{3}-\frac{13}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-2\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$$

$$=\frac{13}{25}-\frac{13}{50}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-\frac{3}{25}\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

다음 그림과 같이 $x < y \leq \log_2(x+6)$에 속하는 격자점의 개수는 8개다.



$y=x$위의 점은 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$으로 4개다.
따라서 그림의 색칠된 부분의 격자점의 개수는 $8\times2+4=20$이다.(거짓)
ㄷ. 선분 AB위에 원점 O가 있고 $\overline{AB}\perp\overline{OC}$이므로
$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}$이다.
$\overline{AB}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$이고 $C(t, t)$라 할 때
$\overline{OC}=t\sqrt{2}$이다.
따라서 $S=4t$
$y=2^x-6$과
$y=x$에서 $h(x)=x-(2^x-6)=(x+6)-2^x$라 할 때
색칠된 부분은 $h(x)>0$에 속한다.
$h\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{19}{2}-2^{\frac{7}{2}}$에서 $19<2^{\frac{9}{2}}$이므로 $h\left(\dfrac{7}{2}\right)<0$이다.
따라서 $\dfrac{7}{2}<2^{\frac{7}{2}}-6$이므로 $t<\dfrac{7}{2}$이다.
따라서 $3<t<\dfrac{7}{2}$이므로
$12<S=4t<14$이다.(참)

[랑데뷰팁]-Pick's Theorem
픽(George Pick)은 격자평면에서 모든 꼭짓점이 격자점 위에 놓인 다각형과 이의 넓이와의 관계를 발견하여 다음 식을 증명하였다.

$$S=\alpha+\frac{\beta}{2}-1$$

(S:다각형의 넓이, α:내부의 격자점의 개수, β:경계 위의 격자점의 개수)
ㄴ.을 이용하여 ㄷ.에 적용해보면
점 C 바로 아래에 점 $D(3, 3)$라 하고
$\triangle ABD$의 넓이를 S'라 하면 $S'<S$이다.
S'의 넓이를 픽의 정리로 구해보자.
α(내부의 격자점의 개수) : 10
β(경계 위의 격자점의 개수) : 6
따라서 $S'=10+\dfrac{6}{2}-1=12$
점 C 바로 위의 점 $E(4, 4)$라 하고 $\triangle ABE$의 넓이를 S''라 하면 $S<S''$이다.
S''의 넓이를 픽의 정리로 구해보자.
α(내부의 격자점의 개수) : 13
α(경계 위의 격자점의 개수) : 6
따라서 $S''=13+\dfrac{6}{2}-1=15$
$12<S<15$임을 알 수 있다.

241) 정답 7

점 $(2n-1, -\log_2 2n)$과 점 $(2n, 0)$을 연결한 선분을 대각선으로 갖고 가로는 x축과 평행한 직사각형은 가로의 길이가 1이고 세로의 길이가 $\log_2 2n$이므로 넓이는 $\log_2 2n$이다.

점 $(2n+1, -\log_2(2n+2))$와 점 $(2n, 0)$을 연결한 선분을 대각선으로 갖고 가로는 x축과 평행한 직사각형은 가로의 길이가 1이고 세로의 길이가 $\log_2(2n+2)$이므로 넓이는 $\log_2(2n+2)$이다.

따라서 두 직사각형의 넓이의 차 a_n은

$$a_n = \log_2(2n+2) - \log_2 2n = \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{127} a_n = \sum_{n=1}^{127} \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log_2 128 = 7$$

242) 정답 ④

$A\left(n, \frac{4}{n}\right)$, $B\left(n, -\frac{2}{n}\right)$, $C(n+1, 0)$로 이루어진 삼각형의 넓이는

$$a_n = \left(\frac{4}{n} - \left(-\frac{2}{n}\right)\right) \times 1 \div 2 = \frac{3}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{9}{a_n a_{n+1}} = \sum_{k=1}^{10} n(n+1) = \frac{10 \times 11 \times 12}{3} = 440$$

243) 정답 ②

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2$으로부터 $a_1 = 1$이고

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1 \, (n \geq 2)$$

$$\therefore a_n = 2n-1 \, (n \geq 1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{2p+1}\right\} = \frac{21}{43}$$

$$1 - \frac{1}{2p+1} = \frac{42}{43}$$

$$\frac{1}{2p+1} = \frac{1}{43}$$

$$2p+1 = 43$$

$$\therefore \ p = 21$$

244) 정답 65

$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left\{x - \frac{1}{k(k+1)}\right\}^2$ 에서

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left\{x^2 - \frac{2}{k(k+1)}x + \frac{1}{k^2(k+1)^2}\right\}$$

$$= nx^2 - 2x\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

이때, 이차함수 $f(x)$에서 x^2의 계수 n이 자연수, 즉 양수이므로 $x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$일 때 $f(x)$는 최솟값을 가지므로 $g(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$이다.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{g(n)} = \sum_{n=1}^{10} (n+1) = \frac{10(2+11)}{2} = 65$$

320) 정답 210

(가)와 (나) 식을 변변 빼면 $\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=60\cdots$㉠

(나)와 (다) 식을 변변 빼면 $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|-a_n)=16\cdots$㉡

등비수열 $\{b_n\}$은 첫째항 b_1이 양수, 공비 r이 음수이므로

$b_n>0$이면 $|b_n|=b_n$, $b_n<0$이면 $|b_n|=-b_n$이다.

따라서 $b_1>0,\ b_2<0,\ b_3>0,\ b_4<0,\ b_5>0$ 이므로

㉠에서 $-2b_2-2b_4=60$

$\therefore\ b_1r(1+r^2)=-30$

만족하는 b_1과 r은 $b_1=15,\ r=-1$(i) 또는

$b_1=3,\ r=-2$(iii) 또는 $b_1=1,\ r=-3$(ii) 이다.

(i) $b_1=15,\ r=-1$일 때

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{15(1-(-1)^5)}{2}=15$이므로

(가)에서 $\sum_{n=1}^{5}a_n=28$이다.

그런데 $\sum_{n=1}^{5}a_n=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=17$에서 $a_1,\ a_5$가 모두 정수이므로 $a_1+a_5=\frac{56}{5}$는 모순이다.

(ii) $b_1=1,\ r=-3$일 때

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{1(1-(-3)^5)}{2}=122$이므로

(가)에서 $\sum_{n=1}^{5}a_n=-79$이다.

그런데 $\sum_{n=1}^{5}a_n=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=-79$에서 $a_1,\ a_5$가 모두 정수이므로 $a_1+a_5=-\frac{158}{5}$는 모순이다.

(iii) $b_1=3,\ r=-2$일 때

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{3(1-(-2)^5)}{3}=33$이므로

(가)에서 $\sum_{n=1}^{5}a_n=10$이다.

그런데 $\sum_{n=1}^{5}a_n=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=10$에서 $a_1+a_5=4$이다.

한편, ㉡에서 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=26$이므로

$\{a_n\}$의 첫째항 a_1은 음의 정수이고 공차 d는 자연수이므로 $2a_1+4d=4$에서 $a_1+2d=2$을 만족하는 a_1과 d를 정한 뒤 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|$을 구해보면

$d=1$일 때 $a_1=0$⇨모순

$d=2$일 때 $a_1=-2$

⇨$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=|-2|+0+2+4+6=14$

$d=3$일 때 $a_1=-4$

⇨$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=|-4|+|-1|+2+5+8=20$

$d=4$일 때 $a_1=-6$

⇨$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=|-6|+|-2|+2+6+10=26$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-6,\ d=4$이다.

따라서 $a_n=4n-10$, $b_n=3\times(-2)^{n-1}$

$a_7=18,\ b_7=192$

따라서 $a_7+b_7=210$