# 02_수학가_문항지

2020년 7월 22일 수요일 오전 10:41

제 2 교시

# 수학 영역 (가형)

5지선다형

1. $4^{\log_2 3}$의 값은? [2점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$4=2^2$

$\Rightarrow$ (준식)$=3^2$

2. $\tan\frac{4}{3}\pi$의 값은? [2점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-1$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

tan 주기$=\pi$

; $\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\frac{1}{3}\pi=\sqrt{3}$

3. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\frac{3n-1}{n^2+1}<a_n<\frac{3n+2}{n^2+1}$$ ; $a_n \to \frac{3}{n}$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

4. 두 사건 $A$와 $B$는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, $A^C$은 $A$의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{16}{25}$ ② $\frac{17}{25}$ ③ $\frac{18}{25}$ ④ $\frac{19}{25}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

$A+B-A\cap B$

$=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-\frac{6}{25}$

$1-(A^c\cap B^c)$

$=1-\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$

5. 두 양수 $a$, $b$에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx+3$이 있다. 함수 $f(x)$는 주기가 $4\pi$이고 최솟값이 $-1$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

진폭=4

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

$a=4$ $(>0)$
$b=\frac{1}{2}$ $(>0)$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{\ln(x^2+x+1)}$ 의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\frac{x^2+4x}{x^2+x} \to 4$

7. $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{7}$ 인 예각삼각형 ABC 의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이다. $\angle A=\theta$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은? [3점]

$=(\sin\theta)'=\cos\theta$

① $\frac{\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

$\sqrt{7}\sin\theta=\sqrt{6}$
$\sin\theta=\sqrt{\frac{6}{7}}$
$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{7}}$

8. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = 2n+1$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{12} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right)$

9. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수일 때, 나온 두 눈의 수의 합이 짝수일 확률은? [3점]

A B

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

$P(A) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

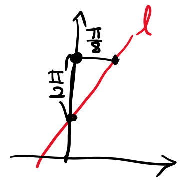
└> 2개다 짝수

10. 함수 $f(x) = \tan 2x + \frac{\pi}{2}$의 그래프 위의 점 $P\left(\frac{\pi}{8}, f\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$에서의 접선의 $y$절편은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{2}+1$

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4$



11. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n \le 1) \\ \log_{a_n}\sqrt{2} & (a_n > 1) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_{12}\times a_{13}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

$a_1=1$ $=a_{13}$
$a_2=2$
$a_3=\frac{1}{2}$
$a_4=\sqrt{2}$ $=a_{12}$
$a_5=1$

12. $x>1$인 모든 실수 $x$의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\sqrt{x-1}\,f'(x)=3x-4$$

를 만족시킬 때, $f(5)-f(2)$의 값은? [3점]
$\int_2^5 f'$

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$f'(x)=3\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$\int_2^5 f'(x)\,dx=\int_1^4\left(3\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$

$=\left[2t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4-\left[2\sqrt{t}\right]_1^4$

$=2\cdot 7-2\cdot 1$

13. 두 함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=2^{x+1}$의 그래프가 점 P에서 만난다. 서로 다른 두 실수 $a$, $b$에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ g(b))$의 중점이 P일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

$P: 2^x+1=2\cdot 2^x,\ 2^x=1,\ x=0$

$;P(0,2)$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \ ;\ 2^b=\frac{1}{2^a} \\ 2^a+1+2\cdot 2^b=4 \end{cases}$

$2^a=t;\ t+1+\frac{2}{t}=4,\ t^2-3t+2=0;\ t=1 \text{ or } 2$

여기까지됨

$\Rightarrow A(1,3)$
$B(-1,1)$

14. 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$, 확률변수 $Y$는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ \sigma^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X\le 8)+\mathrm{P}(Y\le 8)=1$$

을 만족시키는 $m$과 $\sigma$에 대하여 $\mathrm{P}(Y\le m+4)=0.3085$일 때, $\mathrm{P}(X\le \sigma)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

| $z$ | $\mathrm{P}(0\le Z\le z)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0.1915 |
| 1.0 | 0.3413 |
| 1.5 | 0.4332 |
| 2.0 | 0.4772 |

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1359 ④ 0.1587 ⑤ 0.2857

Let $8=m+2k$

$\Rightarrow 8=2m-k\cdot\sigma,$

$m-4=0.5\sigma;\ \sigma=2m-8,\ k=1,\ m=6$

$\Rightarrow \sigma=4$

15. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고 $g(x)$가 증가함수일 때, 함수 $h(x)$를

$\hookrightarrow g'(x) \geq 0$

$$h(x) = (f \circ g)(x)$$

라 하자. 점 $(2, 2)$가 곡선 $y = g(x)$의 변곡점이고 $\dfrac{h''(2)}{f''(2)} = 4$이다. $f'(2) = 4$일 때, $h'(2)$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$h'(x) = f'(g) \cdot g'$

$h''(x) = f''(g(x)) \cdot \{g'(x)\}^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$

$\cdot\ g(2) = 2,\ g''(2) = 0$

$\Rightarrow \{g'(2)\}^2 = 4,\ g'(2) = 2\ (>0)$

$h'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2)$

$= f'(2) \cdot g'(2)$

$= 8$

16. 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 $a$, $b$, $c$라 하자. $a+b+c$의 값을 확률변수 $X$라 할 때, 다음은 확률변수 $X$의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

$= 10.5$ 같지…

$3 \leq a+b+c \leq 18$이므로 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 $3, 4, 5, \cdots, 18$이다.
$a$, $b$, $c$가 각각 6 이하의 자연수이므로
$7-a$, $7-b$, $7-c$는 각각 6 이하의 자연수이다.
$3 \leq k \leq 18$인 자연수 $k$에 대하여
$a+b+c=k$일 확률 $\mathrm{P}(X=k)$와
$(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$일 확률 $\Rightarrow 21-X=k$
$\mathrm{P}(X = 3 \times \boxed{(가)} - k)$는 서로 같다. $X = 7 \times 3 - k$

$\hookrightarrow 7$

그러므로 확률변수 $X$의 평균 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=3}^{18} \{k \times \mathrm{P}(X=k)\}$$
$$= 3 \times \mathrm{P}(X=3) + 4 \times \mathrm{P}(X=4) + 5 \times \mathrm{P}(X=5) + \cdots + 17 \times \mathrm{P}(X=17) + 18 \times \mathrm{P}(X=18)$$
$$= \boxed{(나)} \times \sum_{k=3}^{10} \mathrm{P}(X=k)$$ (대칭성 이용)

21

이때, 확률질량함수의 성질에 의하여 $\sum_{k=3}^{18} \mathrm{P}(X=k) = 1$이므로

$\frac{1}{2}$

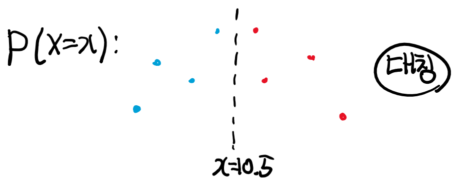
$$\sum_{k=3}^{10} \mathrm{P}(X=k) = \boxed{(다)}$$이다.

따라서 $\mathrm{E}(X) = \boxed{(나)} \times \boxed{(다)}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p$, $q$, $r$라 할 때, $\dfrac{p+q}{r}$의 값은? [4점]

① 49 ② $\dfrac{105}{2}$ ③ 56 ④ $\dfrac{119}{2}$ ⑤ 63

$2(7+21) = 56$



17. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, $S_n$, $T_n$은 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $S_7 = T_7$ $=42$ |
| (나) 6 이상의 모든 자연수 $n$에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다. |

$T_{15}$의 값은? [4점]

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

$S_n + T_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + |a_k|)$

∴ $n \geq 6$에서 $S+T$ 일정

⇒ $n \geq 7$서 $a+|a|=0$,

$S_7 = T_7$ ; $a_1 \sim a_7$은 0 이상,

$a_7 + |a_7| = 0$

⇒ $a_7 = 0$,

$a_n = d(7-n)$,

$S_7 = d \cdot (1+2+3+4+5+6)$

$= 21d = 42$

∴ $d=2$, $a_n = 2(7-n)$

$T_{15} = 2 \times (6+5+\cdots+1)$

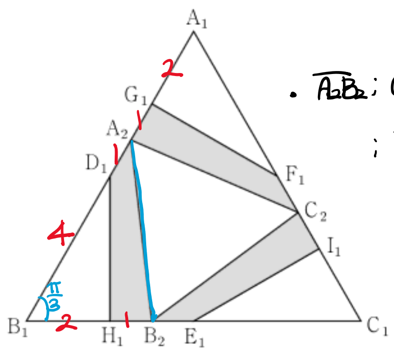
$+ 0$

$+ 2 \times (1+2+\cdots+8)$

$= 42 + 0 + 72$

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 선분 $A_1B_1$, $B_1C_1$, $C_1A_1$의 중점을 각각 $D_1$, $E_1$, $F_1$이라 하고, 세 선분 $A_1D_1$, $B_1E_1$, $C_1F_1$의 중점을 각각 $G_1$, $H_1$, $I_1$이라 하고, 세 선분 $G_1D_1$, $H_1E_1$, $I_1F_1$의 중점을 각각 $A_2$, $B_2$, $C_2$라 하자. 세 사각형 $A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 $R_1$이라 하자.
그림 $R_1$에서 삼각형 $A_2B_2C_2$에 그림 $R_1$을 얻은 것과 같은 방법으로 세 사각형 $A_3C_3F_2G_2$, $B_3A_3D_2H_2$, $C_3B_3E_2I_2$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 $R_2$라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 그림 $R_n$에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

$R_1$

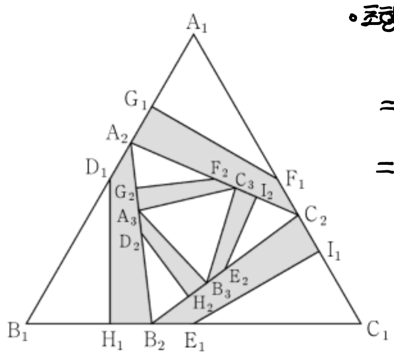



• $\overline{A_2B_2}$ ; cos 정리

; $\overline{A_2B_2}^2 = 5^2+3^2-5\cdot3$

$= 19$, $r = \frac{19}{8^2}$

$R_2$




• 초항: $(\triangle A_2B_1B_2 - \triangle D_1B_1H_1)$ $\times 3$

$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (15-8)$

$= \frac{21}{4}\sqrt{3}$

⋮ ⋮

① $\frac{109\sqrt{3}}{15}$ ② $\frac{112\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{23\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{118\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{121\sqrt{3}}{15}$

∴ $\frac{21}{4}\sqrt{3} \times \frac{64}{45} = \frac{112}{15}\sqrt{3}$

19. 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$ 이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$ 가

$$g(x)=\int_0^x \ln f(t)dt$$ ; $g(0)=0$, $g'(x)=\ln f(x)$

일 때, 함수 $g(x)$ 와 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$g'(1)=0$, $g(1)=2$

| |
|---|
| (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극값 2를 갖는다. |
| (나) 모든 실수 $x$ 에 대하여 $g'(-x)=g'(x)$ 이다. |

→ $\ln f$는 우함수
$g$는 기함수

$\int_{-1}^{1} \frac{xf'(x)}{f(x)}dx$ 의 값은? [4점]

① $-4$ ② $-2$ ③ $0$ ④ $2$ ⑤ $4$

$\int_{-1}^{1} xg''(x)dx$

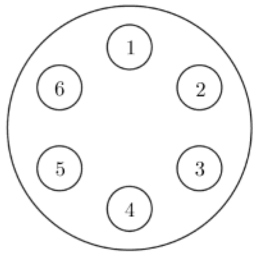
$=[xg'(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} g'(x)dx$ 부분적분

$g'(1)=g'(-1)=0$

$=0-(g(1)-g(-1))$

$=-4$ ← $g$는 기

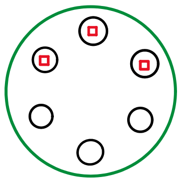
20. 그림과 같이 원탁 위에 1부터 6까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 접시가 놓여 있고 같은 종류의 쿠키 9개를 접시 위에 담으려고 한다. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 적혀 있는 접시와 그 접시에 이웃하는 양 옆의 접시 위에 3개의 쿠키를 각각 1개씩 담는 시행을 한다. 예를 들어, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1인 경우 6, 1, 2가 적혀 있는 접시 위에 쿠키를 각각 1개씩 담는다. 이 시행을 3번 반복하여 9개의 쿠키를 모두 접시 위에 담을 때, 6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있을 확률은? [4점]



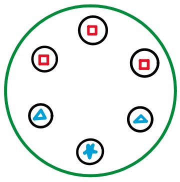
① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{17}{36}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{23}{36}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

Dice roll = 6개 中 1개 선택

1번째 아무거나 ⇒



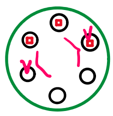
3개 clear



• 여사건 구하기
: 일단 ✱는 안골라

i) □ 만 2번 고름
; $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

ii) □, △ 1번씩
;



이렇게만 안하면 됨
; $\frac{2\times2\times2}{36}=\frac{2}{9}$ (△고르기, □고르기, 순서)

iii) △ 2번
; 같은 △ 골라야 함
⇒ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

$\therefore 1-\frac{1}{4}-\frac{2}{9}-\frac{1}{18}$

$=\frac{17}{36}$

21. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$ 에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)\ (0<x<4)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

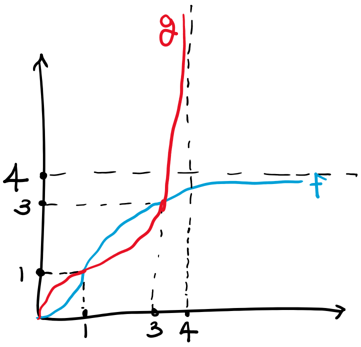
<보 기>

ㄱ. $h(1)=0$

ㄴ. 두 양수 $a$, $b\ (a<b<4)$에 대하여 $\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대일 때, $b-a=2$이다. (3-1)

ㄷ. $h(x)$의 도함수 $h'(x)$의 최댓값은 $\dfrac{7}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ




· f(x)가 증가; f(x)=g(x) ⇔ f(x)=x, 
x=1 or 3

$f(x)=4-\dfrac{12}{x^2+3}$

$f'(x)=\dfrac{24x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=24\cdot\dfrac{(x^2+3)^2-4x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$

$=24\cdot\dfrac{(x^2+3)(3x^2-3)}{(x^2+3)^4}=\dfrac{72(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$

⇒ $x>0$서 $f'(1)=\frac{3}{2}$이 최대,
$g'(1)=\frac{2}{3}$가 최소,
$h'(1)=\frac{5}{6}$가 최대

단답형

22. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_2=6$, $a_5=48$이다. $a_6$의 값을 구하시오. [3점]

$r^3=8$, $r=2$

$\boxed{96}$

23. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 $x^6$의 계수를 구하시오. [3점]

⇒ $(x^2)^4\times\left(\frac{2}{x}\right)^2$

$2^2\times{}_6C_2=\boxed{60}$

24. 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다. $\mathrm{E}(2X-a)=\mathrm{V}(2X-a)$를 만족시키는 상수 $a$의 값을 구하시오. [3점]

$E(X)=24$

$V(X)=8$

$\Rightarrow 48-a=2^2\cdot 8,$

$\boxed{a=16}$

25. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=3t-\frac{2}{\pi}\cos\pi t,\quad y=6\ln t-\frac{2}{\pi}\sin\pi t$$

이다. 시각 $t=\frac{1}{2}$에서 점 P의 속력을 구하시오. [3점]

$\vec{v}=\left(3+2\sin\pi t,\ \frac{6}{t}-2\cos\pi t\right)$

$\to (5, 12)$

$\boxed{13}$

26. 삼각형 ABC에 대하여 $\angle\mathrm{A}=\alpha,\ \angle\mathrm{B}=\beta,\ \angle\mathrm{C}=\gamma$라 할 때, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $\cos\alpha,\ 2\cos\beta,\ 8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\tan\alpha\tan\gamma$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta<\gamma$) [4점]

$\alpha,\ \boxed{\beta},\ \gamma$ ⇒ 합이 $\pi$

$\beta \to \frac{\pi}{3}$

$\to \cos\alpha\cdot 8\cos\gamma = 1^2,$

$\cos\alpha\cos\gamma=\frac{1}{8},\quad \alpha+\gamma=\frac{2}{3}\pi$

한편, $\tan\alpha\tan\gamma=\dfrac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}.$

$\sin\alpha\sin\gamma$를 구하자

; $\cos(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma$

$=-\frac{1}{2}.$

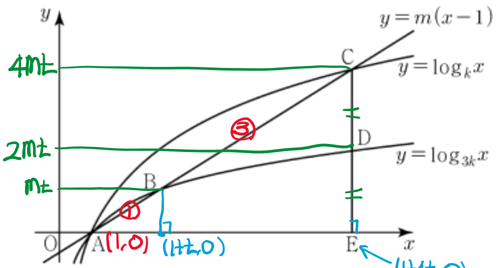
$\sin\alpha\sin\gamma=\frac{5}{8},\quad \tan\alpha\tan\gamma=\dfrac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}$

$=\underline{5}$

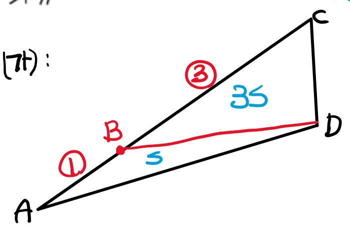
27. $k>1$인 실수 $k$에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 $m$에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 $y$축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, $x$축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.
(나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오. [4점]




(가):




(나): $\triangle BDC = \frac{3}{4}\triangle AED$

$\underbrace{\triangle BDC + \triangle ABD}_{\triangle ACD} = \frac{4}{3}\triangle BDC = \triangle AED$

$\Rightarrow \overline{CD} = \overline{DE}$, $\log_{3k}x = \frac{1}{2}\log_k x$, $k=3$

$2\log_{3k}(1+t) = \log_{3k}(1+4t)$ $(t>-\frac{1}{4})$

; $t^2+2t+1 = 4t+1$, $t=2$

진수조건 꼭확인!

• $t=2$, $mt = \log_9 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{4}$

$\boxed{\therefore \frac{k}{m} = 4\times3 = 12}$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 $f$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(3)\times f(6)$은 3의 배수이다.
(나) 집합 $X$의 임의의 두 원소 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.

→ 중복조합 느낌

i) $f(3)=3$; $f(1), f(2)$ : ${}_3H_2$, $f(4)\sim f(6)$ : ${}_4H_3$ → 120

ii) $f(3)=6$ ; $f(1), f(2)$ : ${}_6H_2$, $f(4)\sim f(6)$ : 1 ⇒ 21

iii) $f(6)=3$, $\frac{f(3)}{3}$ ≠정수

⇒ 전체 ${}_3H_5$, $f(3)=3$; $f(1), f(2)$ : ${}_3H_2$, $f(4), f(5)$ : 1

⇒ ${}_3H_5 - {}_3H_2 = 15$

iv) $f(6)=6$, $\frac{f(3)}{3}$ ≠정수

⇒ 전체 ${}_6H_5$, $= {}_{10}C_5 = 252$

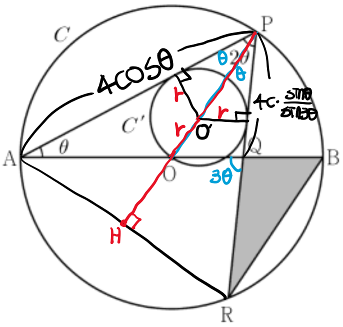
$f(3)=3$: $f(1), f(2)$ : ${}_3H_2$, $f(4), f(5)$ : ${}_4H_2$ → 60

$f(3)=6$: $f(1), f(2)$ : ${}_6H_2$, $f(4), f(5)$ : 1 → 21

⇒ $252-81=171$

$\boxed{\therefore 120+21+15+171 = 327}$

**29.** 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 $C$가 있다. 원 $C$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle APQ=2\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 $C$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 $C'$이라 하자. 원 $C'$이 점 O를 지날 때, 원 $C'$의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{r(\theta)}=a$일 때, $45a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]



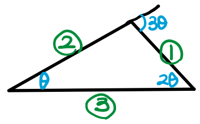

• $\overline{POH}$ 일직선, $\overline{AP}=\overline{PR}=4\cos\theta$

• $\overline{OP}=\overline{OO'}+\overline{O'P}$

$\Rightarrow 2=r+\dfrac{r}{\sin\theta}$, $r(\theta)=\dfrac{2\sin\theta}{\sin\theta+1}\to 2\theta$

• $\sin\angle BQR \to 3\theta$ 이므로 차수 OK, 근사 진행

$\theta\to 0+$:




$\Rightarrow \overline{AQ}\to\frac{8}{3}$, $\overline{BQ}\to\frac{4}{3}$

$\overline{PQ}\to\frac{4}{3}$, $\overline{RQ}=4\cos\theta-\overline{PQ}\to\frac{8}{3}$

$\therefore \dfrac{S(\theta)}{r(\theta)}\to\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 3\theta\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{3}}{2\theta}$

$=\frac{8}{3}$

$\boxed{120}$

**30.** 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 $a$, $b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\ (0<x<12)$$ ; 3주기

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 $\alpha$를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_m$ ($m$은 자연수)라 할 때, $m$ 이하의 자연수 $n$에 대하여 $\alpha_n$은 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $n$이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다. |
| (나) $n$이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다. |

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 $e^3+e^{-3}$일 때, $m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=pe^3+qe$이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 정수이다.) [4점]

$g'(x)=(ae^{af(x)}+b)\cdot f'(x)$

$=(ae^{a\sin\frac{\pi}{2}x}+b)\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$ $\to$ $x=$홀수만 O

$\alpha_1=1$ : $(0,1)$서 $ae^{a\sin\frac{\pi}{2}x}+b\neq 0$

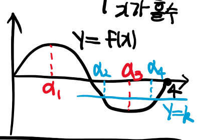
$g(\alpha_2)=g'(\alpha_2)=0$ ; $\begin{cases} e^{af(\alpha_2)}=-bf(\alpha_2) \\ ae^{af(\alpha_2)}=-b \end{cases}$ $\Rightarrow a=\dfrac{1}{f(\alpha_2)}$, $-bf(\alpha_2)=e$

Let $f(\alpha_2)=k$

$\Rightarrow g(x)=e^{\frac{f(x)}{k}}-\dfrac{e}{k}f(x)$,

$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{k}\left\{e^{\frac{f(x)}{k}}-e\right\}\Rightarrow g'(x)=0 \begin{cases} f(x)=k \\ x\text{가 홀수} \end{cases}$

$\Rightarrow$




• $g(0)=e^0+0=1=g(4)$

$g(\alpha_1)=e^{\frac{1}{k}}-\frac{e}{k}$ $(-1<k<0)$ $\to e$ ; 극대

$g(\alpha_2)=0$ ; 극소

$g(\alpha_3)=e^{-\frac{1}{k}}+\frac{e}{k}$ $\to 0$ ; 극대

$g(\alpha_4)=0$ ; 극소

$\Rightarrow e^3+e^{-3}=e^{\frac{1}{k}}+e^{-\frac{1}{k}}$, $k=-\frac{1}{3}$,

$m=4\times(3주기)=12$

$\therefore 12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$

$=24\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\{e^{af(x)}+bf(x)\}f'(x)dx$

$=24\int_{f(\alpha_3)}^{f(\alpha_4)} e^{-3t}+3et\,dt$

$=\left[-8e^{-3t}\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}+\left[36et^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}$

$=8e^3-8e-32e$

$=8e^3-40e$

$\boxed{\therefore 48}$

| |
|---|
| * 확인 사항<br>○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. |