[호외!] 지수, 로그, 삼각함수의 적분

2020.11.28

심 상범

지수, 로그, 삼각함수의 적분

미적분 (자연계)

우리가 지수·로그·삼각함수를 적분할 수 있는 방법은 크게 3가지이다.

① 그냥 적분 ex) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

② 치환적분 → 미분된 것이 있어야 가능

③ 부분적분 → 지수, 로그, 삼각, 다항함수가 곱해져있을 때

① 그냥 적분 특정 상황에서만

지수에서는 k^{ax+b}, 로그에서는 $\ln x$, 삼각함수에서는 $\sin x, \cos x, \tan x$ 와 같이 기본적인 형태는 그냥 미분해주면 된다.

ex) $\int 2^{x+2} dx = \frac{1}{\ln 2} 2^{x+2} + C$, $\int e^{4x+2} dx = \frac{1}{4} e^{4x+2} + C$

$\int \log_2 x\, dx = \int \frac{\ln x}{\ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2}\int \ln x\, dx = \frac{1}{\ln 2}(x\ln x - x + C)$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, $\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

기억하면 좋을 그냥 적분

(1) $\int 1 \times \ln x\, dx = x\ln x - x + C$ → 앞에 있는 1을 쪼개서 부분적분

(2) $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx$

(3) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ | 배각 공식

(4) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

→ 이 셋은 꼭 이렇게 적분합시다. (치환, 부분적분 힘듦...)

② 치환적분

$\int \underbrace{f'(x) \cdot f(x)}_{} \cdots dx$ ↗ 어떤 식과 미분된 식이 보이면

$f(x) = t$ 라고 하자.

$f'(x) = \frac{dt}{dx}$ t를 x에 대해 미분

$f'(x)dx = dt$ 대체 가능하구나. 이제부터는 t를 미지수로

$\int f'(x) f(x) \cdots dx = \int \underbrace{f(x)}_{t} \cdot \underbrace{f'(x) \cdots dx}_{dt}$

$= \int t \cdots dt = \frac{1}{2}t^2 + \cdots + C = \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 + \cdots + C$

ex) $\int \sin^2 x \cos x\, dx$

$\sin x = t$ $\cos x = \frac{dt}{dx}$ $\cos x\, dx = dt$

$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

③ 부분적분

$\int \underbrace{u'}_{\text{적분하기 쉬운 친구}} \cdot \underbrace{v}_{\text{미분하기 쉬운 함수}} dx = \underbrace{uv}_{\text{'이 없는 애들}} - \int \underbrace{uv'}_{\text{밑에 있는 친구}} dx$

$u \quad v'$

log	x, x^2	$\cos x, \sin x, \tan x$	$2^x, e^x$
로그함수	다항함수	삼각함수	지수함수

← →

미분하기 쉽다. v가 되어야 한다. ←→ 적분하기 쉽다. u'이 되어야 한다.

ex) $\int \ln x\, dx = \int 1 \times \ln x\, dx$

↳ 희망이 없을 때 생각해내자.

$\int \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln x}_{v} dx = \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{\ln x}_{v} - \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx + C = x\ln x - x + C$

$u = x$ $v' = \frac{1}{x}$

활용 · $\int \ln(ax+b)\, dx = \underbrace{\frac{1}{a}}_{\text{속미분}}(ax+b)\ln(ax+b) - \underbrace{x}_{\text{여기는 바뀌지 X}} + C$

· $\int \log_a x\, dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} dx = \frac{1}{\ln a}\int \ln x\, dx = \frac{1}{\ln a}(x\ln x - x) + C$

ex) $\int \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v} dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx$

$u = \frac{1}{2}x^2$ $v' = e^x$