25 이화여자대학교(자연계열Ⅰ) 모의25)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수학적 귀납법, 미분법의 활용, 증가함수, 감소함수, 함수의 극한, 벡터, 평면의 방정식, 구의 방정식, 적분법, 정사영, 이면각, 삼각함수의 덧셈정리, 벡터의 내적	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 3개 영역 등급 합 6 이내, 의예과는 4개 영역 등급 합 5이내 [탐구영역]응시한 과목 중 상위 1과목의 등급으로 반영	수학 3문항	100분

[문항1] [35점]

(1) 수학적 귀납법을 이용하여 n이 자연수이고 x가 -1보다 같거나 큰 실수이면 다음의 부등식이 성립함을 보여라.

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

(2) n이 1보다 큰 홀수이고 $x \geq -2$이면 다음이 성립함을 보여라.

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

(3) $x > -1$이면 다음이 성립함을 보여라.

$$0<r<1 \text{ 이면 } (1+x)^r \leq 1+rx$$

$$r<0 \text{ 또는 } r>1 \text{ 이면 } (1+x)^r \geq 1+rx$$

[문항2] 좌표공간에 중심이 $\mathrm{C}(0,0,10)$이고 반지름이 1인 구를 S라고 하자. 점 C의 위치벡터를 $\vec{c}$라 하고, 점 C를 지나고 단위벡터 $\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$와 평행한 직선을 l이라 하자. 실수 t에 대하여 벡터 $\vec{c}+t\vec{n}$을 위치벡터로 갖는 점 A_t를 지나고 l에 수직인 평면을 P_t라고 하자. [35점]

(1) 평면 P_t와 구 S가 한 개보다 많은 점에서 만나도록 하는 t의 범위를 구하고, 이 범위 안의 실수 t에 대하여, S와 P_t가 만나서 생기는 원 W_t의 반지름의 길이를 $f(t)$라고 할 때, $f(t)$를 구하여라.

(2) 문제(1)에서 구한 범위 안의 실수 t에 대하여, 구 S로 둘러싸인 영역을 평면 P_t가

25) 이화여자대학교 홈페이지

두 부분으로 나눈다. 이 두 부분의 부피를 구하여 t에 관한 식으로 표현하여라.

(3) $f(t)$가 $t=t_0$에서 최대라 할 때 평면 P_{t_0}로 나누어진 구 S의 조각 중 점 $(0,0,11)$을 포함하는 조각을 xy평면으로 정사영하여 얻어지는 도형의 넓이를 구하여라. (단, 이 조각은 원 W_{t_0}를 포함하는 것으로 생각함.)

[문항3] 좌표평면에 길이 10인 선분을 $I=\{(x,0)\mid -5\le x<5\}$로 정하고 선분 밖에 있는 점 P와 선분 I의 두 점 A, B가 이루는 각을 $\angle\mathrm{APB}=\theta$ $(0\le\theta<\pi)$라고 할 때 다음 물음에 답하여라. [30점]

(1) 선분 밖의 점 P가 y축의 점이고 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 선분 I의 두 점 A, B를 선택할 수 있을 때, 점 P의 집합을 J라 하자. 집합 $J\cup\{(0,0)\}$이 나타내는 그림의 길이를 구하여라.

(2) 선분 I의 양 끝점 $(-5,0)$, $(5,0)$와 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$가 되는 선분 밖의 점 P의 집합을 S라 하자. 집합 $S\cup\{(-5,0),(5,0)\}$이 나타내는 그림의 길이를 구하여라.

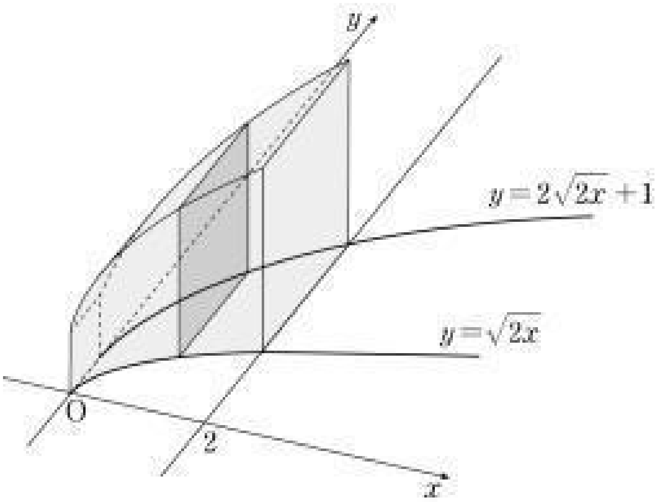
(3) 선분 밖의 점 P가 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 선분 I의 두 점 A, B를 선택할 수 있을 때 점 P를 집합 V의 원소라 하자. 집합 $V\cup I$를 나타내는 그림의 넓이를 구하여라.

풀어보기

문제1. 함수 $f(x)=\sin(x+\alpha)+2\cos(x+\alpha)$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$일 때, $\tan\alpha$의 값은? (단, α는 상수이다.) [3점] (2019. 6월 평가원)

① $-\frac{5}{6}$　② $-\frac{2}{3}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

문제2. 그림과 같이 두 곡선 $y=2\sqrt{2x}+1$, $y=\sqrt{2x}$와 y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 V라 하자. $30V$의 값을 구하시오. [4점] (2019. 3월 전국연합)



문제3. 좌표공간에서 두 점 A(3, -3, 3), B(-2, 7, -2)에 대하여 선분 AB를 포함하고 구 $x^2+y^2+z^2=1$에 접하는 두 평면을 α, β 라 하자. 두 평면 α , β 와 구 $x^2+y^2+z^2=1$의 접점을 각각 C, D라 할 때, 사면체 ABCD의 부피는 $\frac{q\sqrt{3}}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점] (2019. 대수능)

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ④

$f'(x)=\cos(x+\alpha)-2\sin(x+\alpha)$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=0$$

즉, $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$에서 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1}{2},\ \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{2}$$

$2(1+\tan\alpha)=1-\tan\alpha$ 이므로 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$이다.

풀어보기(문제2) 정답 340

입체도형을 직선 $x=t\,(0\le t\le 2)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $(2\sqrt{2t}+1)-\sqrt{2t}=\sqrt{2t}+1$인 정사각형이므로 단면의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=(\sqrt{2t}+1)^2=2t+2\sqrt{2t}+1$$

구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^2(2t+2\sqrt{2t}+1)\,dt=\left[t^2+\frac{4\sqrt{2}}{3}t\sqrt{t}+t\right]_0^2=\left(4+\frac{16}{3}+2\right)-0=\frac{34}{3}$$

따라서 $30V=340$

풀어보기(문제3) 정답 29

구의 중심 $\mathrm{O}(0,0,0)$에서 선분 AB로 내린 수선의 발을 H라 하자.

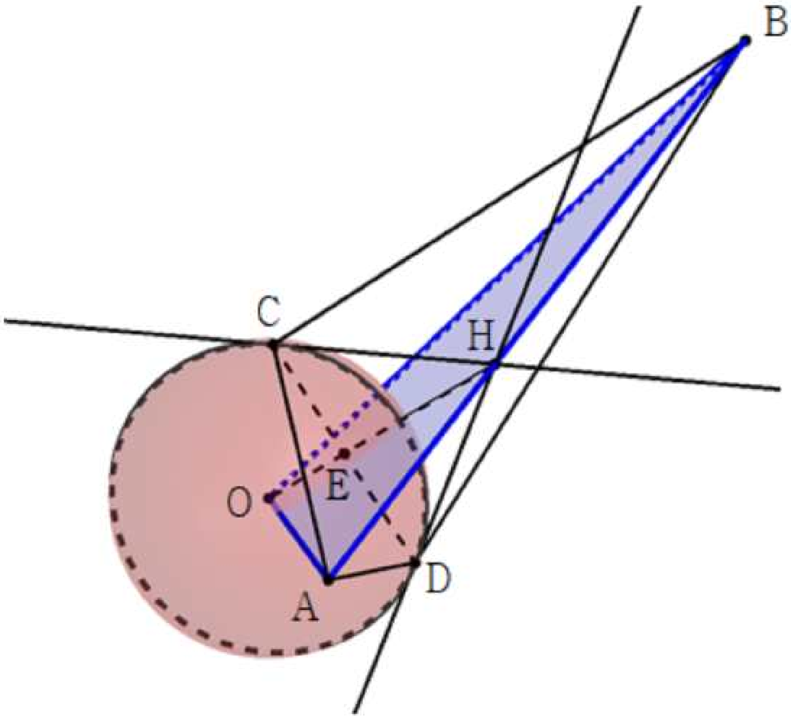
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(5,\ -10,\ 5)=5(1,\ -2,\ 1)$과 평행하고 점 $\mathrm{A}(3,\ -3,\ 3)$을 지나는 직선이므로

$$x-3=\frac{y+3}{-2}=z-3$$

이다. 이 직선 위의 점 $\mathrm{H}(3+t,\ -3-2t,\ 3+t)$는 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3+t,\ -3-2t,\ 3+t)\cdot(1,\ -2,\ 1)=6t+12=0$$

따라서 $t=-2$이므로 $\mathrm{H}(1,1,1)$이다.



평면 ABO와 선분 $\overline{CD}$의 교점을 E라 하자. 사면체 ABCD는 ABE를 밑면으로 하는 삼각뿔 C−ABE와 D−ABE로 나눌 수 있고 그 $\overline{CE}=\overline{DE}$이므로 부피는 같다.

$\overline{OH}=\sqrt{3}$이고 $\overline{OC}=1$이므로 $\overline{CH}=\sqrt{2}$, $\overline{CE}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이며

$\overline{HE}=\sqrt{\overline{CH}^2-\overline{CE}^2}=\sqrt{2-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{AB}=5\sqrt{6}$이므로 구하는 부피는

$\dfrac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{ABE}$ 의 넓이$)\times\overline{CD}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{6}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$

따라서 $p+q=20+9=29$이다.

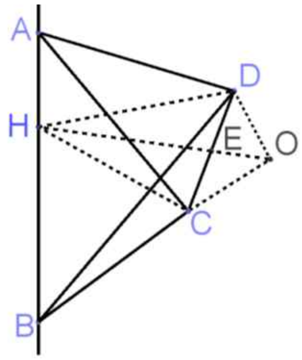
(다른 풀이) 구의 중심 $\mathrm{O}(0,0,0)$에서 선분 $\overline{AB}$로 내린 수선의 발을 H라 하자.
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $\overrightarrow{BA}=(5,-10,5)=5(1,-2,1)$과 평행하고 점 $\mathrm{A}(3,-3,3)$을 지나는 직선이므로

$$x-3=\frac{y+3}{-2}=z-3$$

이다. 이 직선 위의 점 $\mathrm{H}(3+t,\ -3-2t,\ 3+t)$는 $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$이므로

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(3+t,\ -3-2t,\ 3+t)\cdot(1,\ -2,\ 1)=6t+12=0$$

따라서 $t=-2$이므로 $\mathrm{H}(1,1,1)$이다.



평면 ABO 와 선분 $\overline{\mathrm{CD}}$ 의 교점을 E 라 하자. 사면체 ABCD 는 HCD 를 밑면으로 하는 삼각뿔 A－HCD 와 B－HCD 로 나눌 수 있다.

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{OC}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{CE}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$\overline{\mathrm{HE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CH}}^2-\overline{\mathrm{CE}}^2}=\sqrt{2-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{AB}}=5\sqrt{6}$ 이므로 구하는 부피는

$$\frac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{HCD}\text{ 의 넓이})\times\overline{\mathrm{AH}}+\frac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{HCD}\text{ 의 넓이})\times\overline{\mathrm{BH}}$$

$$=\frac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{HCD}\text{ 의 넓이})\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\times5\sqrt{6}=\frac{20\sqrt{3}}{9}$$

따라서 $p+q=20+9=29$이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

(1) n이 1일 때 위의 부등식이 자명하게 성립한다.

위의 부등식이 $n=k$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\ \ge\ (1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2\ \ge\ 1+(k+1)x$$

따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n과 $x\ge-1$에 대하여 $(1+x)^n\ge 1+nx$가 성립한다. 참고로, 위의 전개식에서, 첫 번째 부등식이 성립하는 이유는 $n=k$일 때 $(1+x)^k\ge 1+kx$라고 가정하였고 $1+x\ge 0$이기 때문이며, 두 번째 부등식이 성립하는 이유는 모든 자연수 k와 실수 x에 대하여 $kx^2\ge 0$이기 때문이다.

(나침반 다른 풀이)

i) $n=1$일 때

(좌변)$=1+x$, (우변)$=1+x$

이므로 성립한다.

ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$(1+x)^k\ge 1+kx$

이다.

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x)\\ &\ge (1+kx)(1+x) = 1+(1+k)x+kx^2\\ &\ge 1+(1+k)x \quad (kx^2>0\text{이므로})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때 성립한다.

ⅰ), ⅱ)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

(2) 함수 $f(x)=(1+x)^n-nx-1$에 대하여, $x \ge -2$이면 $f(x) \ge 0$임을 보이면 된다.

$f(x)$가 미분가능한 함수이고 $f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n=0$이 성립하는 x는 -2와 0이다. 구간 $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, \infty)$에서 $f'(x)$의 부호를 계산하면, $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값을 가지고 $x=0$에서 극솟값을 가짐을 알 수 있다. 그리고 $x \ge -2$에서 $f'(x)$의 부호를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 확인하면, 구간 $(-2,0)$에서 $f(x)$가 감소하고 구간 $(0,\infty)$에서 증가함을 알 수 있다. 따라서 $x \ge -2$일 때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=0$이므로 $f(x)=(1+x)^n-nx-1 \ge 0$이 성립한다.

그러므로 $x \ge -2$일 때, 부등식 $(1+x)^n \ge 1+nx$가 성립한다.

(별해) 수학적 귀납법으로 위의 부등식을 보일 수 있다.

(1)에 의하여 $x \ge -1$이면 $(1+x)^n \ge 1+nx$가 성립하기 때문에, 우리는 n이 1보다 큰 홀수이고 $-2 \le x \le -1$일 때, $(1+x)^n \ge 1+nx$가 성립함을 보이면 된다.

n이 1보다 큰 홀수이고 $-2 \le x \le -1$일 때, $(1+x)^n \ge 1+nx$가 성립한다고 가정한 다음에 $(1+x)^{n+2} \ge 1+(n+2)x$가 성립함을 보이자.

$(1+x)^{n+2}$을 전개시키면 아래의 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} &= (1+x)^n(1+x)^2 \ge (1+nx)(1+x)^2 = (1+nx)(1+2x+x^2)\\ &= 1+(n+2)x+(2n+1)x^2+nx^3\end{aligned}$$

여기에서 $-2 \le x \le -1$일 때, $(2n+1)x^2+nx^3 \ge 0$임을 보이면 된다.

$(2n+1)x^2+nx^3=x^2(2n+1+nx)$이고 x^2은 $-2 \le x \le -1$에서 양수이므로,

$(2n+1)x^2+nx^3=x^2(2n+1+nx)$의 부호는 $2n+1+nx$에 의해 결정된다.

$-2 \le x \le -1$일 때 $(2n+1+nx)$의 최솟값은 $x=-2$일 때의 1이므로

$(2n+1)x^2+nx^3=x^2(2n+1+nx) \ge x^2 \cdot 1 \ge 0$이 성립한다.

그러므로 $-2 \le x \le -1$에서

$(1+x)^{n+2} \ge 1+(n+2)x+(2n+1)x^2+nx^3 \ge 1+(n+2)x$가 성립하고, 수학적 귀납법에 의하여 1보다 큰 홀수 n과 $x \ge -2$에 대하여 $(1+x)^n \ge 1+nx$가 성립한다.

(3) r이 0또는 1이 아닌 실수일 때, 함수 $f(x)=(1+x)^r-rx-1$는 $x>-1$에서 미분가능하고, 그 도함수는 $f'(x)=r(1+x)^{r-1}-r$ 이며, $x>-1$에서 $f'(x)=0$가 성립하는 x는

0밖에 없음은 자명하다.

$0<r<1$의 경우: 먼저 $r-1<0$이므로 $g(t)=t^{r-1}$은 $t\in(0,\infty)$에 대하여 감소함수이다.

구간 $(-1,0)$에서 $0<1+x<1$이므로 $1^{r-1}=1<(1+x)^{r-1}$이 성립하고

$r>0$이기 때문에 $-1<x<0$에 대하여 $f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\}>0$이다.

그리고 구간 $(0,\infty)$에서는 $1<1+x$이므로 $(1+x)^{r-1}<1$이고 $f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\}<0$이 성립한다. 따라서 함수 $f(x)=(1+x)^r-rx-1$는 $x=0$에서 극대이고 최대이다.

그러므로 $x>-1$인 모든 실수에 대하여 $f(x)=(1+x)^r-rx-1\le f(0)=0$이고 부등식 $(1+x)^r\le 1+rx$가 성립한다.

$r<0$인 경우: $0<r<1$인 경우와 마찬가지로 $r-1<-1<0$이기 때문에 $g(t)=t^{r-1}$은 $t\in(0,\infty)$에 대하여 감소함수이다. 그러므로 구간 $(-1,0)$에서 $1^{r-1}=1<(1+x)^{r-1}$이 성립하고, $r<0$이므로 $f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\}<0$이다.

또한 구간 $(0,\infty)$에서 $(1+x)^{r-1}<1$이 성립하고 $f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\}>0$이다.

따라서 함수 $f(x)=(1+x)^r-rx-1$은 $x=0$에서 극소이고 최소이다.

그러므로 $x>-1$인 모든 실수에 대하여 $f(x)=(1+x)^r-rx-1\ge f(0)=0$이고 부등식 $(1+x)^r\ge 1+rx$ 가 성립한다.

$r>1$인 경우: $r-1>0$이기 때문에 $g(t)=t^{r-1}$은 $t\in(0,\infty)$에 대하여 증가함수이다.

구간 $(-1,0)$에서 $0<1+x<1$이므로 $(1+x)^{r-1}<1=1^{r-1}$이 성립하고,

$r>0$이기 때문에 $-1<x<0$에 대하여 $f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\}<0$이다.

그리고 구간 $(0,\infty)$에서는 $1<1+x$이므로 $1<(1+x)^{r-1}$이고

$f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\}>0$이 성립한다.

따라서 함수 $f(x)=(1+x)^r-rx-1$은 $x=0$에서 극소이고 최소이다.

그러므로 $x>-1$인 모든 실수에 대하여 $f(x)=(1+x)^r-rx-1\ge f(0)=0$이고

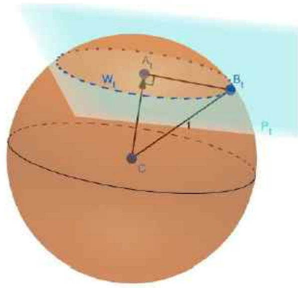
부등식 $(1+x)^r\ge 1+rx$가 성립한다.

[문항2] 대학발표 예시답안

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}_t}=(\vec{c}+t\vec{n})-\vec{c}=t\vec{n}$으로, $t\neq0$의 경우는 이 벡터가 평면 P_t와 수직이고, 따라서 A_t는 C에서 P_t에 내린 수선의 발이다.

따라서 C와 평면 P_t와의 거리는 $\overline{\mathrm{CA}_t}=|t\vec{n}|=|t|$이다. ($\vec{n}$은 단위벡터이므로 길이가 1)

$t=0$인 경우, $\mathrm{C}=\mathrm{A_t}$이므로 C와 P_t의 거리는 $0=|t|$이다.



한편, 구 S상의 임의의 점과 C와의 거리는 1이다. 따라서 $|t|=1$일 때 구와 평면은 접하여 한 개의 점에서 만나고, $|t|>1$일 때 구와 평면은 만나지 않으며, $|t|<1$일 때 구와 평면은 원에서 만난다. 따라서 구하는 범위는 $-1<t<1$이다.

S와 P_t가 만나 이루는 교선을 W_t라 하고, B_t를 W_t상의 임의의 점이라고 하자. 선분 CA_t는 P_t에 수직이므로, 선분 $\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t$와도 수직이다. 또한 B_t는 구 S상의 점이므로 $\overline{\mathrm{CB}_t}=1$이다.

$\angle \mathrm{CA}_t\mathrm{B}_t=\dfrac{\pi}{2}$이므로, 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t}^2=\overline{\mathrm{CB}_t}^2-\overline{\mathrm{CA}_t}^2=1^2-|t|^2=1-t^2$

이다. 즉, A_t에서 W_t의 임의의 점까지의 거리가 $\sqrt{1-t^2}$으로 일정하므로, 원 W_t의 중심은 A_t이고 반지름은 $\sqrt{1-t^2}$이다. 따라서 답은 $f(t)=\sqrt{1-t^2}$이다.

(2) 직선 l을 축으로 생각하자. 점 A_t는 점 C로부터 단위벡터 $\vec{n}$방향으로 길이 t만큼 간 곳에 위치해 있다. (이 때, t가 음수이면 $-\vec{n}$방향으로 길이 $|t|$만큼 갔다고 여기면 된다.) l상의 이 점 A_t에서 우리가 부피를 구하고자 하는 영역의 수직 단면은 반지름 $f(t)$인 원이므로, 넓이가 $\pi\cdot f(t)^2=\pi(1-t^2)$이다. 따라서 영역의 부피는 이 넓이의 식을 범위에 맞게 적분하면 된다.

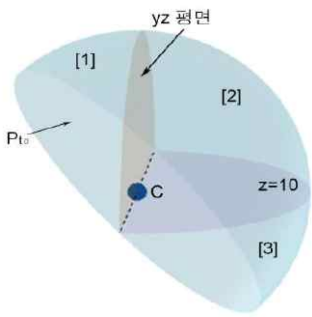
편의를 위하여 t 대신 s를 쓰자. 즉 l상에서 $\vec{n}$방향으로 길이 s만큼 간 곳에서의 단면의 넓이는 $\pi(1-s^2)$이다.

첫째 영역은 s가 t에서 1까지 움직일 때이므로 부피가 $\int_t^1 \pi(1-s^2)ds$이고, 계산하면 $\left[\pi\left(s-\dfrac{s^3}{3}\right)\right]_t^1=\pi\left(\dfrac{2}{3}-t+\dfrac{t^3}{3}\right)$이다. 나머지 영역은 s가 -1에서 t까지 움직이므로, 부피는 $\int_{-1}^t \pi(1-s^2)ds=\left[\pi\left(s-\dfrac{s^3}{3}\right)\right]_{-1}^t=\pi\left(\dfrac{2}{3}+t-\dfrac{t^3}{3}\right)$이다. (혹은 구의 부피 $\dfrac{4}{3}\pi$에서 첫 번째 부피를 빼도 된다.)

따라서 부피는 각각 $\pi\left(\dfrac{2}{3}-t+\dfrac{t^3}{3}\right)$와 $\pi\left(\dfrac{2}{3}+t-\dfrac{t^3}{3}\right)$이다.

(3) $f(t)=\sqrt{1-t^2}$, $-1<t<1$. 이때 $t^2\geq 0$이 항상 성립하여 $1-t^2\leq 1$이고, 등호가 $t=0$일 때만 성립하므로, 우리의 범위 내에서 $f(t)$는 $t=0$일 때 최댓값 1을 갖는다. 따라서 $t_0=0$이다. $t=t_0=0$일 때 평면 P_{t_0}는 구의 중심인 $\mathrm{C}=\mathrm{A}$를 지나므로 P_{t_0}가 구 S를 두 반구로 나눔을 알 수 있고, 점 $(0,0,11)$은 두 반구 중 P_{t_0}의 위쪽에 위치한 반구임을 알 수 있다.

이 위쪽 반구는 $z=10$인 평면과 yz평면에 의해 그림과 같이 세 부분 [1], [2], [3]으로 나뉜다. (여기서 $z=10$ 평면은 C를 지나며 xy평면에 평행하고, yz평면은 C를 지나며 xy평면 및 $z=10$평면에 수직이다.) 그림의 [2]부분의 xy 평면으로의 정사영은 [2]의 밑면에 해당하는 반원꼴 도형을 xy평면으로 정사영한 것과 같고, 이 밑면은 xy평면과 평행한 $z=10$ 평면상의 도형이므로, xy평면으로의 정사영의 넓이는 이 밑면의 넓이 그대로이다. 이 밑면은 $z=10$ 평면 내에서 반지름이 1인 원의 반원 부분이므로, 넓이가 $\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$이다.



[3]의 정사영은 [2]의 정사영에 포함되므로 고려하지 않아도 된다. [1]의 정사영은 [1]의 밑면의 정사영과 같다. [1]의 밑면은 평면 P_{t_0} 상의 반지름 1인 원의 반원 부분이므로, 넓이가 $\frac{\pi}{2}$이다. 평면 P_{t_0}의 법선벡터 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$과 xy평면의 법선벡터 $(0,0,1)$을 이용하여 평면 P_{t_0}와 xy평면 사이의 이면각 θ를 구하면

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\cdot(0,0,1)}{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right|\left|(0,0,1)\right|}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+1^2}\ \sqrt{1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

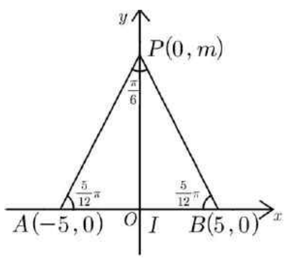
따라서 [1]의 밑면의 xy평면으로의 정사영의 넓이는 [1]의 밑면의 넓이와 $\cos\theta$의 곱인 $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

따라서 문제의 반구의 xy평면으로의 정사영의 넓이는 $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\pi$이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

(1)

(i) 선분 I의 양 끝 점을 두 점 A, B로 각각 선택하고, $\theta=\frac{\pi}{6}$가 되도록 y축의 점 $\mathrm{P}(0,\pm m)$ $(m>0)$을 잡으면 m은 밑변의 길이가 10이고 두 밑각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 이등변삼각형의 높이이다.

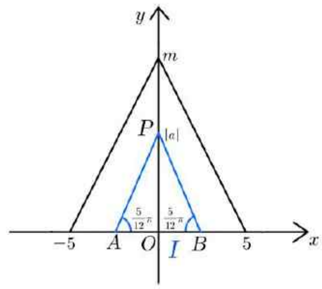


따라서 꼭짓점 $(0,m)$은 $\tan\frac{5\pi}{12}=\frac{m}{5}$을 만족하므로 삼각함수의 덧셈정리에 따라

$$m=5\tan\frac{5\pi}{12}=5\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=5\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=5\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

(ii) y축의 점 $\mathrm{P}(0, a)\left(|a|>5\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)\right)$을 선택하면 선분 I의 양 끝 점을 두 점 A, B로 각각 선택하였을 때 θ의 크기가 가장 크다. 이때 $\triangle\mathrm{PAB}$는 두 밑각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$보다 큰 이등변삼각형이므로 $\theta<\frac{\pi}{6}$이다. 따라서 이때 점 P는 집합 J의 원소가 아니다.

(iii) y축의 점 $\mathrm{P}(0, a)\left(0<|a|<5\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)\right)$을 선택하면 닮은꼴의 성질을 활용하여 $\triangle\mathrm{PAB}$가 높이가 $|a|$이고 두 밑각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 이등변삼각형이 되도록 선분 I의 두 점 A, B를 잡을 수 있다.



$5:5\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)=x:|a|$에서 $x=\frac{|a|(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}$이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

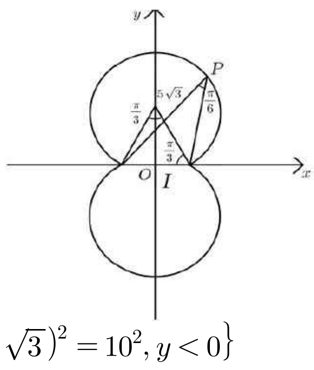
$$\mathrm{A}\left(\frac{-|a|(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}, 0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{|a|(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}, 0\right)$$

이다.

따라서 구하는 집합 J는 $J=\left\{(0, y) \mid 0<|y| \le 5\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)\right\}$

(i)~(iii)에서 $J\cup\{(0,0)\}$이 나타내는 그림의 길이는 $10\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$이다.

(2) 선분 I의 양 끝점을 선택하여 $\theta=\frac{\pi}{6}$가 되도록 하는 좌표평면의 점들을 찾으면 이 점들은 원주각의 성질에 의하여 선분 I를 현으로 하고 원주각이 $\frac{\pi}{6}$가 되는 원위의 점들이다. 이때 원의 중심은 $(0, \pm5\sqrt{3})$이고, 반지름의 길이는 10이므로 구하는 점 P의 집합은



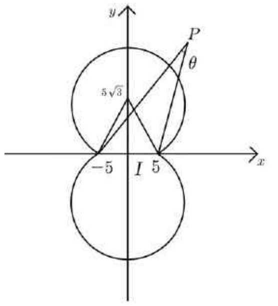
$$S=\left\{(x, y) \mid x^2+(y-5\sqrt{3})^2=10^2, y>0\right\}\cup\left\{(x, y) \mid x^2+(y+5\sqrt{3})^2=10^2, y<0\right\}$$

따라서 집합 $S\cup\{(-5,0),(5,0)\}$이 나타내는 그림은 반지름의 길이가 10이고 중심각

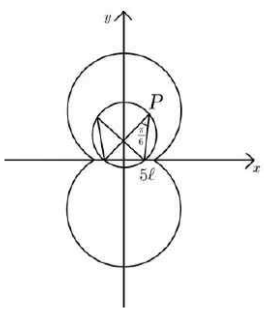
이 $\dfrac{5\pi}{3}$ 인 호 두 개가 붙어 있는 형태이므로 구하는 길이는 $2\left(10\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{100\pi}{3}$ 이다.

(3) 문제(2)에서 구한 $S\cup\{(-5,0),(5,0)\}$ 의 내부 중 선분 I 밖에 있는 점들의 집합은
$B=\left\{(x,y)|x^2+\left(y-5\sqrt{3}\right)^2<10^2, y>0\right\}\cup\left\{(x,y)|x^2+\left(y+5\sqrt{3}\right)^2<10^2, y<0\right\}$
이다.

(i) 집합 $S\cup\{(-5,0),(5,0)\}$ 외부의 점 P를 잡으면 선분 I의 양 끝점을 두 점 A, B로 잡을 때 θ의 크기가 가장 크다. 이때 점 P는 집합 $S\cup\{(-5,0),(5,0)\}$ 의 밖에 있으므로 원주각의 성질에 따라 $\theta<\dfrac{\pi}{6}$ 이다. 따라서 이들 점 P는 집합 V의 원소가 아니다.

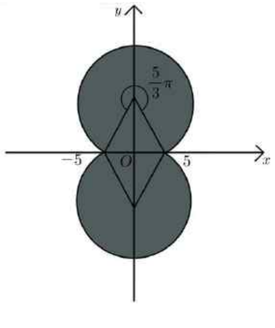


(ii) 이제 집합 B의 임의의 한 점 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$, $(\beta>0)$가 집합 V의 원소인 것을 다음과 같이 보인다. 문제(2)와 닮음꼴의 성질을 활용하면 이 점이 반지름의 길이가 $10l$이고 중심이 $\left(0,5\sqrt{3}\,l\right)$인 원위의 점이고, 선분 I의 두 점 $(-5l,0)$, $(5l,0)$을 현의 끝점으로 할 때 원주각이 $\dfrac{\pi}{6}$가 됨을 알 수 있다.



주어진 조건의 l이 $0<l<1$인 것을 확인하기 위하여
원의 방정식 $\alpha^2+\left(\beta-5\sqrt{3}\,l\right)^2=(10l)^2$ 을 정리하면
$25l^2+10\sqrt{3}\,\beta l-\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0$이다.
$f(l)=25l^2+10\sqrt{3}\,\beta l-\left(\alpha^2+\beta^2\right)$ 으로 두고 방정식 $f(l)$ 이 $0<l<1$인 근을 가지는 것을 보이기로 한다.
$f(0)=-\left(\alpha^2+\beta^2\right)<0$ 이고 $(\alpha,\beta)\,(\beta>0)$이 집합 B의 원소이므로
$f(1)=25+10\sqrt{3}\,\beta-\left(\alpha^2+\beta^2\right)=10^2-\alpha^2-\left(\beta-5\sqrt{3}\right)^2>0$ 이다.
따라서 $0<l<1$인 근이 존재한다.
같은 이유로 B의 점 $(\alpha,\beta)\,(\beta<0)$도 V의 원소이다.

따라서 구하는 집합 V는 집합 $B\cup S$이고 $V\cup I$는 오른쪽 그림처럼 나타나며 반지름 10이고 원주각 $\dfrac{5\pi}{3}$ 인 부채꼴 두 개와 한 변의 길이가 10인 정삼각형이 두 개 있는 모양으로 분해할 수 있다.



따라서 $2\left(\dfrac{1}{2}10^2\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}10^2\right)=100\left(\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이다.

26 이화여자대학교(자연계열Ⅱ) 모의[26)]

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수학적 귀납법, 미분법의 활용, 증가함수, 감소함수, 함수의 극한, 벡터, 평면의 방정식, 구의 방정식, 적분법, 정사영, 이면각, 삼각함수의 덧셈정리, 벡터의 내적	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 3개 영역 등급 합 6 이내, 의예과는 4개 영역 등급 합 5이내 [탐구영역]응시한 과목 중 상위 1과목의 등급으로 반영	수학 3문항	100분

[문항1] [35점]

(1) 수학적 귀납법을 이용하여 n이 자연수이고 x가 -1보다 같거나 큰 실수이면 다음의 부등식이 성립함을 보여라.

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

(2) n이 임의의 자연수일 때, 위의 부등식을 이용하여 다음이 성립함을 보여라.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(3) 임의의 두 자연수 m과 n에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

(4) n이 임의의 자연수일 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

26) 이화여자대학교 홈페이지

[문항2] 좌표공간에 중심이 $\mathrm{C}(0,0,10)$이고 반지름이 1인 구를 S라고 하자. 점 C의 위치벡터를 $\vec{c}$라 하고, 점 C를 지나고 벡터 $\vec{v}=(1,1,1)$과 평행한 직선을 l이라 하자. 실수 t에 대하여 벡터 $\vec{c}+t\vec{v}$를 위치벡터로 갖는 점 A_t를 지나고 l에 수직인 평면을 P_t라고 하자. [35점]

(1) 평면 P_t와 구 S가 한 개보다 많은 점에서 만나도록 하는 t의 범위를 구하고, 이 범위 안의 실수 t에 대하여, S와 P_t가 만나서 생기는 원 W_t의 반지름의 길이를 $f(t)$라고 할 때, $f(t)$를 구하여라.

(2) 문제(1)에서 구한 범위 안의 실수 t에 대하여, 구 S로 둘러싸인 영역을 평면 P_t가 두 부분으로 나눈다. 이 두 부분의 부피를 구하여 t에 관한 식으로 표현하여라.

(3) $f(t_0)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$인 양수 t_0에 대하여 평면 P_{t_0}로 나누어진 구 S의 조각 중 평면 P_{t_0}에서 벡터 $\vec{v}$ 방향에 위치한 조각을 xy평면으로 정사영하여 얻어지는 도형의 넓이를 구하여라. (단, 이 조각은 원 W_{t_0}를 포함하는 것으로 생각함.)

[문항3] 좌표공간에 길이 10인 선분을 $I=\{(x,0,0)\,|\,-5\le x<5\}$로 정하고 선분 밖에 있는 점 P와 선분 I의 두 점 A, B가 이루는 각을 $\angle\mathrm{APB}=\theta\ (0\le\theta<\pi)$라고 할 때 다음 물음에 답하여라. [30점]

(1) 선분 밖의 점 P가 y축의 점이고 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 선분 I의 두 점 A, B를 선택할 수 있을 때, 점 P의 집합을 J라 하자. 집합 $J\cup\{(0,0,0)\}$이 나타내는 그림의 길이를 구하여라.

(2) 선분 밖의 점 P가 yz평면에 있고 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 선분 I위의 두 점 A, B를 선택할 수 있을 때 점 P의 집합을 S라 하자. 집합 $S\cup\{(0,0,0)\}$이 나타내는 그림의 넓이를 구하여라.

(3) 선분 밖의 점 P가 xy평면에 있고 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 선분 I위의 두 점 A, B를 선택할 수 있을 때 점 P의 집합을 U라 하자. 집합 $U\cup I$이 나타내는 그림의 넓이를 구하여라.

풀어보기

문제1. 일반항이 $a_n = n^2$ 인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하자.
다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$(n+1)S_n - \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} k^3 \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=2S_1 - S_1 = 1$, (우변)$=1$이므로
> $(*)$이 성립한다.
>
> (ii) $n=m$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면
>
> $(m+1)S_m - \sum_{k=1}^{m} S_k = \sum_{k=1}^{m} k^3$ 이다.
>
> $n=m+1$일 때 $(*)$이 성립함을 보이자.
>
> $(m+2)S_{m+1} - \sum_{k=1}^{m+1} S_k$
>
> $= \boxed{(가)}\, S_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} S_k$
>
> $= \boxed{(가)}\, S_m + \boxed{(나)} - \sum_{k=1}^{m} S_k$
>
> $= \sum_{k=1}^{m+1} k^3$ 이다.
>
> 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 식은 모든 자연수 n에 대하
> 여
> 성립한다.

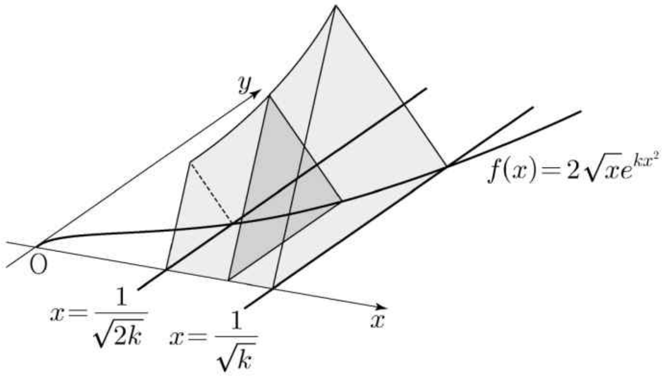
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(2)+g(1)$의 값은?
(2019. 9월 고2 전국연합)

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

문제2. 그림과 같이 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=2\sqrt{x}\,e^{kx^2}$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피가 $\sqrt{3}(e^2-e)$일 때, k의 값은?

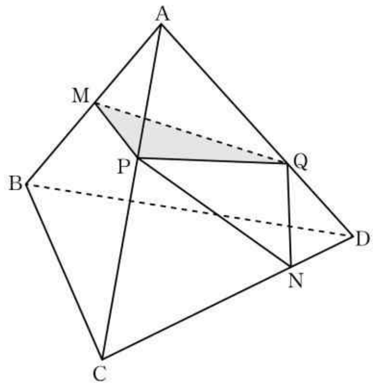
(2019. 9월 평가원)

① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$



문제3. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정사면체 ABCD에서 선분 AB의 중점을 M, 선분 CD를 3:1로 내분하는 점을 N이라 하자. 선분 AC 위에 $\overline{\mathrm{MP}}+\overline{\mathrm{PN}}$의 값이 최소가 되도록 점 P를 잡고, 선분 AD 위에 $\overline{\mathrm{MQ}}+\overline{\mathrm{QN}}$의 값이 최소가 되도록 점 Q를 잡는다. 삼각형 MPQ의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는?

[4점] (2019. 10월 전국연합)



① $\dfrac{\sqrt{3}}{30}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$ ④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ⑤

일반항이 $a_n = n^2$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.
다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$(n+1)S_n - \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} k^3 \ \cdots\cdots\ (\ast)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,
(좌변)$=2S_1 - S_1 = 1$, (우변)$=1$ 이므로
$(\ast)$ 이 성립한다.
(ii) $n=m$ 일 때 $(\ast)$ 이 성립한다고 가정하면

$$(m+1)S_m - \sum_{k=1}^{m} S_k = \sum_{k=1}^{m} k^3$$ 이다.

$n=m+1$ 일 때 $(\ast)$ 이 성립함을 보이자.

$$(m+2)S_{m+1} - \sum_{k=1}^{m+1} S_k$$
$$= (m+2)S_{m+1} - \left(\sum_{k=1}^{m} S_k + S_{m+1}\right)$$
$$= \boxed{(m+1)}\, S_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} S_k$$
$$= (m+1)(S_m + a_{m+1}) - \sum_{k=1}^{m} S_k$$
$$= \boxed{(m+1)}\, S_m + \boxed{(m+1)^3} - \sum_{k=1}^{m} S_k$$
$$= \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3$$
$$= \sum_{k=1}^{m+1} k^3$$ 이다.

따라서 $n=m+1$ 일 때도 $(\ast)$ 이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$f(m) = m+1$, $g(m) = (m+1)^3$

$f(2) + g(1) = 11$

풀어보기(문제2) 정답 ③

$\frac{1}{\sqrt{2k}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{k}}$ 인 실수 x에 대하여

$f(x) = 2\sqrt{x}\,e^{kx^2}$ 이고 이 값을 한 변의 길이로 갖는 정삼각형의 넓이는

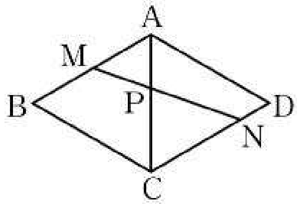
$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{x}\,e^{kx^2}\right)^2 = \sqrt{3}\,xe^{2kx^2}$ 이다.

따라서 입체 도형의 부피는

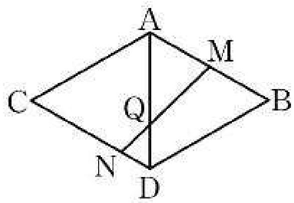
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \sqrt{3}\,xe^{2kx^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{4k}\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} 4kx \cdot e^{2kx^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{4k}\left[e^{2kx^2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{\sqrt{3}}{4k}(e^2-e) = \sqrt{3}\,(e^2-e)$$

그러므로 $k = \frac{1}{4}$ 이다.

풀어보기(문제3) 정답 ②



[그림 1]



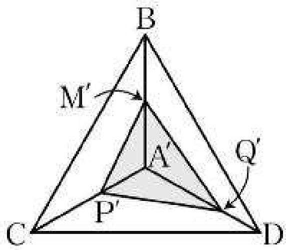
[그림 2]

[그림 1]과 같이 네 점 A, B, C, D가 한 평면에 있도록 전개하면 조건을 만족하는 점 P는 선분 AC와 선분 MN이 만나는 점이다.

사각형 ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{AB} // \overline{CD}$ 이다.

따라서 삼각형 AMP와 삼각형 CNP는 닮음이고 $\overline{AM} = \frac{1}{2}$, $\overline{CN} = \frac{3}{4}$ 이므로 점 P는 선분 AC를 $2:3$으로 내분하는 점이다.

같은 방법으로 [그림 2]에서 점 Q는 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점임을 알 수 있다.



네 점 A, M, P, Q의 평면 BCD 위로의 정사영을 각각 A′, M′, P′, Q′이라 하면 점

M'은 선분 $\mathrm{A'B}$의 중점이고, 점 P'은 선분 $\mathrm{A'C}$를 $2:3$으로 내분하는 점이고, 점 Q'은 선분 $\mathrm{A'D}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.

이때 점 A'은 정삼각형 BCD의 무게중심이므로

$$\overline{\mathrm{A'B}}=\overline{\mathrm{A'C}}=\overline{\mathrm{A'D}}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{이고, }\overline{\mathrm{A'M'}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A'B}}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\overline{\mathrm{A'P'}}=\frac{2}{5}\overline{\mathrm{A'C}}=\frac{2\sqrt{3}}{15},\ \overline{\mathrm{A'Q'}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{A'D}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 $\mathrm{M'P'Q'}$의 넓이 S는 세 삼각형 $\mathrm{A'M'P'}$, $\mathrm{A'P'Q'}$, $\mathrm{A'Q'M'}$의 넓이의 합이므로

$$S=\frac{1}{2}\times\sin\frac{2}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{2\sqrt{3}}{15}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\times\frac{2\sqrt{3}}{9}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{15}$$

[문항1] 대학발표 예시답안

(1) n이 1일 때 위의 부등식이 자명하게 성립한다.

위의 부등식이 $n=k$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\ \geq\ (1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2\ \geq\ 1+(k+1)x$$

따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n과 $x\geq-1$에 대하여 $(1+x)^n\geq 1+nx$가 성립한다. 참고로, 위의 전개식에서, 첫 번째 부등식이 성립하는 이유는 $n=k$일 때 $(1+x)^k\geq 1+kx$라고 가정하였고 $1+x\geq 0$이기 때문이며, 두 번째 부등식이 성립하는 이유는 모든 자연수 k와 실수 x에 대하여 $kx^2\geq 0$이기 때문이다.

(2) 임의의 자연수 n에 대하여 $1\leq\dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$을 보이자.

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\text{ 이고,}$$

$x=-\dfrac{1}{(n+1)^2}>-1$에 대하여 (1)의 부등식에 의하여

$\left(1+\dfrac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\geq 1+(n+1)\cdot\dfrac{-1}{(n+1)^2}=1-\dfrac{1}{n+1}$ 이 성립한다. 그러므로

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\left(1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\geq\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=1$$

이 참이고, 부등식 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 이 성립한다.

(별해) x가 양의 실수일 때 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ 가 증가함수임을 보인다.

$f(x)$ 를 미분하면 $f'(x)=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}$ 이고

양의 실수 x에 대하여 $e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>0$ 이므로 $f(x)$ 가 증가함수임을 보이려면

$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\geq 0$ 을 보이면 된다.

$g(x)$ 를 미분하면 양의 실수 x에 대하여

$g'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x(1+x)}=-\frac{1}{x(1+x)^2}<0$ 이므로 $g(x)$ 는 감소함수이다.

그리고 $\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$ 이다.

따라서 임의의 양수 x에 대하여 $g(x)\geq\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ 이 성립한다.

그러므로 $f(x)$ 는 증가함수이고 임의의 자연수 n에 대하여

$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=f(n+1)$ 이 참이다.

(3) $n=m$인 경우: $1<1+\frac{1}{m}$ 이므로

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ 이 성립한다.

$n<m$인 경우: $m=n+k$이면 (2)의 부등식에 의하여

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\leq\cdots\leq\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ 이 참이고,

$1<1+\frac{1}{m}$ 이므로 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ 이 성립한다.

$n>m$인 경우: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ 에 대하여 (2)의 풀이를 그대로 반복하면

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) \text{ 이고,}$$

$x=\frac{1}{n^2-1}>-1$에 대하여 (1)의 부등식에 의하여

$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1}=1+\frac{1}{n-1}=\frac{n}{n-1}$ 이 성립하고

$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\geq \frac{n}{n-1}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ 이다.

그러므로 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 이 성립함을 알 수 있다.

한편 $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}=\frac{1}{\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}$ 이므로 위의 부등식에

의하여 $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}} \leq \frac{1}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m}}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}$ 이 참이다.

그러므로 $n>m$이어서 $n=m+k$로 주어진다면,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{m+k}\right)^{m+k+1} \leq \left(1+\frac{1}{m+k-1}\right)^{m+k}$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{m+k-2}\right)^{m+k-1} \leq \cdots \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

이 성립한다.

(4) (2)에 의하여 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$은 증가하는 수열이고 x_n의 극한이 자연상수 e이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $2=x_1 \leq x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq e<3$이 성립한다.

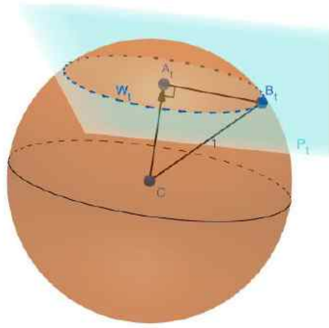
(별해) (2)에 의하여 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$은 증가하는 수열이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $2=x_1 \leq x_n$이 성립한다.

그리고 (3)의 부등식에서 $m=5$를 계산하면 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{5}\right)^{6}=2.985984<3$을 알 수 있다.

[문제2]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}_t}=(\vec{c}+t\vec{v})-\vec{c}=t\vec{v}$ 으로, $t\neq 0$ 의 경우는 이 벡터가 평면 P_t 와 수직이고, 따라서 A_t 는 C 에서 P_t 에 내린 수선의 발이다. C 와 평면 P_t 와의 거리는



$|t\vec{v}|=|t||\vec{v}|=|t|\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\,|t|$ 이다.

$t=0$ 인 경우, $\mathrm{C}=\mathrm{A}_t$ 이므로 C 와 P_t 의 거리는 $0=\sqrt{3}\,|t|$ 이다.

한편, 구 S 상의 임의의 점과 C 와의 거리는 1 이다. 따라서 $\sqrt{3}\,|t|<1$ 일 때만 구와 평면은 원에서 만난다. 따라서 구하는 범위는 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

S 와 P_t 가 만나 이루는 교선을 W_t 라 하고, B_t 를 W_t 상의 임의의 점이라고 하자. 선분 CA_t 는 P_t 에 수직이므로, 선분 $\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t$ 와도 수직이다. 또한 B_t 는 구 S 상의 점이므로 $\overline{\mathrm{CB}_t}=1$ 이다. $\angle \mathrm{CA}_t\mathrm{B}_t=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로, 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t}^2=\overline{\mathrm{CB}_t}^2-\overline{\mathrm{CA}_t}^2=1^2-|\sqrt{3}t|^2=1-3t^2$ 이다. 즉, A_t 에서 W_t 의 임의의 점까지의 거리가 $\sqrt{1-3t^2}$ 로 일정하므로, 원 W_t 의 중심은 A_t 이고 반지름은 $\sqrt{1-3t^2}$ 이다. 따라서 답은 $f(t)=\sqrt{1-3t^2}$ 이다.

(2) 직선 l 을 축으로 생각하자. $t\geq 0$ 이면 점 A_t 는 점 C 로부터 벡터 $\vec{v}$ 방향으로 길이 $|t\vec{v}|=\sqrt{3}\,|t|$ 만큼 간 곳에 위치해 있고, $t<0$ 이면 $-\vec{v}$ 방향으로 길이 $\sqrt{3}\,|t|$ 만큼 간 곳에 있다. $s=\sqrt{3}\,t$ 라고 두자. 직선 l 상에서 C 로부터 $\vec{v}$ 방향으로 길이 s 만큼의 위치에 A_t 가 있다고 할 수 있다. s 가 음수이면 반대인 $-\vec{v}$ 방향으로 길이 $|s|$ 만큼 간 것으로 이해한다. 직선 l 상의 이 점 A_t 에서 우리가 부피를 구하고자 하는 영역의 수직 단면은 반지름 $f(t)$ 인 원이므로, 넓이가 $\pi\cdot f(t)^2=\pi(1-3t^2)=\pi(1-s^2)$ 이다. 영역의 부피는 이 넓이의 식을 범위에 맞게 적분하면 된다.

첫째 영역은 s 가 $\sqrt{3}t$ 에서 1 까지 움직일 때이므로 부피가 $\displaystyle\int_{\sqrt{3}t}^{1}\pi(1-s^2)ds$ 이고, 계산하면 $\left[\pi\left(s-\dfrac{s^3}{3}\right)\right]_{\sqrt{3}t}^{1}=\pi\left(\dfrac{2}{3}-\sqrt{3}t+\sqrt{3}t^3\right)$ 이다. 나머지 영역은 구의 부피 $\dfrac{4}{3}\pi$ 에서 첫번째 부피를 빼면 된다.

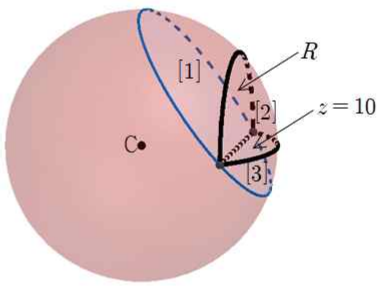
따라서 부피는 각각 $\pi\left(\dfrac{2}{3}-\sqrt{3}t+\sqrt{3}t^3\right)$ 과 $\pi\left(\dfrac{2}{3}+\sqrt{3}t-\sqrt{3}t^3\right)$ 이다.

(3) $f(t_0)=\sqrt{1-3t_0^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이면 $1-3t_0^2=\frac{6}{9}$ 이고 $t_0^2=\frac{1}{9}$ 이므로 $t_0=\frac{1}{3}$ 이다. $(t_0>0)$. C 와 P_{t_0} 의 거리는 $\overline{\mathrm{CA}_{t_0}}=\sqrt{3}\,|t_0|=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다. 편의상 $\mathrm{A}=\mathrm{A}_{t_0}$, $P=P_{t_0}$, $W=W_{t_0}$ 로 표기하자.

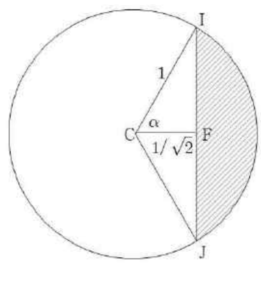
C 를 지나는 평면 $z=10$ 과 평면 P 의 교선을 m 이라 하고, 점 A 에서 m 에 내린 수선의 발을 F 라고 하자. 선분 AF 는 평면 P 에 속해 있으며 선분 CF 는 $z=10$ 평면에 속해 있고, 두 선분이 모두 m 에 수직이므로, 선분 AF 와 선분 CF 의 사잇각은 평면 P 와 $z=10$ 평면의 이면각 θ 와 같다. 평면 $z=10$ 의 법선벡터 $(0,0,1)$ 과 평면 P 의 법선벡터 $(1,1,1)$ 을 이용하면 $\cos\theta=\frac{(0,0,1)\cdot(1,1,1)}{|(0,0,1)||1,1,1|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 얻는다.

$\overline{\mathrm{CA}}$ 와 $\cos\theta$, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 를 이용하면 $\overline{\mathrm{CF}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{\mathrm{AF}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 을 얻는다. 구 S 와 평면 $z=10$ 의 교선은 C 를 중심으로 하고 반지름이 1 인 원 U 이고, $\overline{\mathrm{CF}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ 이므로, 그림과 같이 평면 $z=10$ 상에서 F 가 U 의 내부에 위치한다.

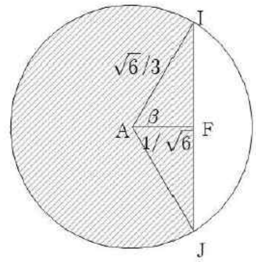
직선 m 을 포함하며 평면 $z=10$ 에 수직인 평면을 R 라 하자. xy 평면으로의 정사영의 넓이를 구하고자 하는 구의 조각은 평면 $z=10$ 과 평면 R 에 의해서 세 부분 [1], [2], [3]으로 그림과 같이 나뉜다. [3]의 정사영은 [2]의 정사영에 포함된다. [2]의 정사영은 [2]의 밑면에 해당하는 활꼴 도형의 정사영과 같으며, [1]의 정사영은 [1]의 밑면에 해당하는 활꼴 도형의 정사영과 같다.



[2] 부분의 밑면은 원 U 내부에서 그림의 빗금친 부분이다. 직선 m 과 이 원의 교점들을 I, J 라 하자. $\angle\mathrm{ICF}=\alpha$ 라고 두면, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 로부터 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 를 얻는다. 따라서 각 2α 에 해당하는 부채꼴 CIJ 의 넓이는 $\pi\cdot 1^2\cdot\frac{2\alpha}{2\pi}=\frac{\pi}{4}$ 이다. $\overline{\mathrm{FI}}=\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이며, $\angle\mathrm{JCF}=\alpha$ 이므로 $\overline{\mathrm{JF}}=\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. 따라서 삼각형 CIJ 의 넓이는 $\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 이고, 구하고자 하는 활꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ 이다. 한편 평면 $z=10$ 은 xy 평면과 평행이므로, [2]의 밑면의 xy 평면으로의 정사영의 넓이 역시 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ 이다.



[1]의 밑면은 원 W 의 내부에서 그림의 빗금친 부분이다.



$\angle\mathrm{IAF}=\angle\mathrm{JAF}=\beta$ 라고 두면, $\cos\beta=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 이다. 각도 $2\pi-2\beta$에 해당하는 부채꼴 AIJ의 넓이는

$\pi\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\cdot\dfrac{2\pi-2\cdot\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\dfrac{4}{9}\pi$ 이다. $\overline{\mathrm{IJ}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 AIJ

의 넓이는 $\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 이고, 따라서 빗금친 부분의 넓이는 $\dfrac{4}{9}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 이다. 평면 P와 xy평면의 이면각 θ에 대하여 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이 성립하므로,

([1]의 밑면의 xy평면으로의 정사영의 넓이)=([1]의 밑면의 넓이)$\cdot\cos\theta$

$$=\left(\frac{4}{9}\pi+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

답은 [2]의 정사영의 넓이와 [1]의 정사영의 넓이의 합인 $\pi\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\right)-\dfrac{1}{3}$ 이다.

[문제3]

(1) 먼저 y축의 점이고 선분 I의 양 끝점을 선택하여 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 하는 점 $(0,\ \pm m,\ 0)\,(m>0)$을 찾으면 m이 밑변의 길이가 10이고 두 밑각이 $\dfrac{5\pi}{12}$인 이등변 삼각형의 높이이다. 꼭짓점 $(0,m,0)$은 $\tan\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{m}{5}$ 을 만족한다. 탄젠트 함수의 덧셈 공식에 따라

$$m=5\tan\frac{5\pi}{12}=5\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=5\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}\right)=5\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

이다.

y축의 점 $(0,a,0)\left(|a|>5\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)\right)$을 선택하면 선분 I의 양 끝점을 선택하였을 때 θ가 가장 큰 각이 되고 점 $(0,a,0)$과 선분 I의 양 끝점이 두 밑각이 $\dfrac{5\pi}{12}$보다 큰 이등변 삼각형이 되므로 집합 J의 원소가 아니다.

y축의 점 $(0,a,0)\left(0<|a|<5\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)\right)$을 선택하면 닮음꼴의 성질을 활용하여 높이

가 $|a|$이고 두 밑각이 $\frac{5\pi}{12}$인 이등변 삼각형이 되는 선분의 두 점 $\left(\frac{-|a|(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}, 0, 0\right)$, $\left(\frac{|a|(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}, 0, 0\right)$을 선분 I에서 선택할 수 있다.

따라서 구하는 집합 J는 $J=\left\{(0, y, 0) \mid 0<|y| \leq 5\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)\right\}$이고

$J \cup \{(0,0,0)\}$의 나타내는 그림의 길이는 $10\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$이다.

(2) yz평면과 선분 I를 포함하는 x축이 수직이므로 yz평면의 한 점 $(0, a, b)$와 x축의 선분 I의 두 점에 대한 $\theta=\frac{\pi}{6}$에 관한 문제는 $(0, a, b)$를 x축을 중심으로 회전하여 y축의 점으로 옮겨서 문제(1)과 같이 풀 수 있다.

따라서 집합 $S=\left\{(0, a, b) \mid 0<a^2+b^2 \leq 25\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2\right\}$이다.

그러므로 $S \cup \{(0, 0, 0)\}$의 넓이는 $25\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2\pi$이다.

(3) 먼저 선분 I의 양 끝점을 선택하여 $\theta=\frac{\pi}{6}$가 되도록 하는 xy평면의 점들을 찾으면 원주각의 성질에 의하여 선분 I를 현으로 하고 원주각이 $\frac{\pi}{6}$가 되는 원위의 점들이다.

중심각이 $\frac{\pi}{3}$이므로 구하는 원은 반지름이 10이고 중심이 $\left(0, \pm 5\sqrt{3}, 0\right)$이다. 따라서 대응되는 점들의 집합은

$$B=\left\{(x, y, 0) \mid x^2+\left(y-5\sqrt{3}\right)^2=10^2, y>0\right\} \cup \left\{(x, y, 0) \mid x^2+\left(y+5\sqrt{3}\right)^2=10^2, y<0\right\}$$

이고 집합 B의 모든 원소가 U에 속한다.

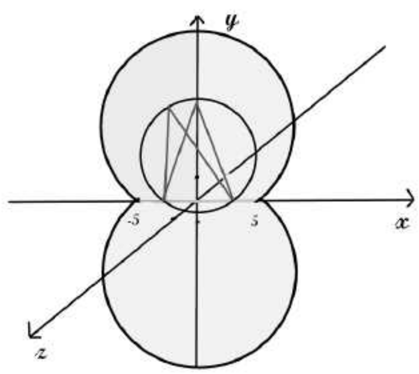
xy평면의 점 중에서 $B \cup \{(-5, 0, 0), (5, 0, 0)\}$ 외부의 한 점을 잡으면 선분 I의 양 끝점을 잡을 때 θ가 가장 크고 집합 $B \cup \{(-5, 0, 0), (5, 0, 0)\}$의 밖에 있으므로 원주각의 성질에 따라 $\theta<\frac{\pi}{6}$이다. 따라서 이들 점은 집합 U의 원소가 아니다.

xy평면의 점 중에서 $B \cup \{(-5, 0, 0), (5, 0, 0)\}$ 의 내부에 있고 선분 밖에 있는 점의 집합은

$$C=\left\{(x, y, 0) \mid x^2+\left(y-5\sqrt{3}\right)^2<10^2, y>0\right\} \cup \left\{(x, y, 0) \mid x^2+\left(y+5\sqrt{3}\right)^2<10^2, y<0\right\}$$

이다.

이제 집합 C의 임의의 한 점 $(\alpha, \beta, 0)\,(\beta>0)$이 집합 U의 원소인 것을 다음과 같이 보인다. 닮음꼴을 활용하면 이 점이 반지름이 $10l$이고 중심이 $\left(0, 5\sqrt{3}l, 0\right)$인 xy평면의 원의 점이고 선분 I의 두 점 $(-5l, 0, 0)$, $(5l, 0, 0)$을 현의 끝점으로 할 때 원주



각이 $\dfrac{\pi}{6}$가 됨을 알 수 있다. 주어진 조건의 l이 $0<l<1$인 것을 확인하기 위하여 원의 방정식 $\alpha^2+(\beta-5\sqrt{3}l)^2=(10l)^2$을 풀어서 $f(l)=25l^2+10\sqrt{3}\beta l-(\alpha^2+\beta^2)$가 $0<l<1$인 근을 가지는 것을 보이기로 한다.

$f(0)=-(\alpha^2+\beta^2)<0$이고 점 $(\alpha, \beta, 0)$ $(\beta>0)$가 집합 C의 원소이므로

$f(1)=25+10\sqrt{3}\beta-(\alpha^2+\beta^2)=10^2-\alpha^2-(\beta-5\sqrt{3})^2>0$이다.

따라서 $0<l<1$인 근이 존재한다. 같은 이유로 C의 한 점 $(\alpha, \beta, 0)(\beta<0)$도 U의 원소이다. 따라서 구하는 집합 U는 집합 $B\cup C$이다. 집합 $U\cup I$는 위 그림처럼 나타나며 반지름 10이고 원주각 $\dfrac{5\pi}{3}$인 부채꼴 두 개와 한 변의 길이가 10인 정삼각형이 두 개 있는 모양으로 분해할 수 있다. 따라서

$2\left(\dfrac{1}{2}10^2\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}10^2\right)=100\left(\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

27 이화여자대학교(자연계열 Ⅰ) 수시[27)]

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
극대, 최댓값, 미분, 적분, 지수함수, 삼각함수, 연속성, 합성함수, 일대일대응, 부정적분, 도함수, 원, 내분점	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 3개 영역 등급 합 6 이내 [탐구영역] 응시한 과목 중 상위 1과목의 등급으로 반영	수학 3문항	100분

[문항 1] 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = e^x \sin x$가 있다. $f(x)$가 $x = \theta$에서 최댓값 M을 가질 때 다음 물음에 답하시오.(35점)

[1-1] θ와 M의 값을 구하시오.

[1-2] $n \geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$f\left(\theta + \frac{1}{n}\pi\right) = Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)$$

[1-3] $n \geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx < M^n \pi$$

[1-4] $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$임을 보이시오.

(단, n은 4이상의 자연수 이고, $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$이다.)

27) 이화여자대학교 홈페이지

[문항 2] 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이며 일대일대응인 함수 $f(x)$가 모든 실수 a, b에 대하여 다음 등식을 만족시킨다.

$$f(a+f(b))=f(a)+b$$

다음 물음에 답하시오.(35점)

[2-1] $f(0)$의 값을 구하고, 모든 실수 b에 대하여 $f(f(b))=b$임을 보이시오.

[2-2] 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속일 때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 보이시오.

[2-3] 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능할 때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 보이고, 함수 $f(x)$를 모두 구하시오.

[문항 3] 좌표평면에서 두 집합 $A=\{(-3,\ t)\mid -3\le t\le 3\}$과 $B=\{(3\cos\theta+6,\ 3\sin\theta)\mid 0\le\theta<2\pi\}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.(30점)

[3-1] 좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 집합 B의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점을 원소로 하는 집합이 원을 나타냄을 보이고, 이 원의 중심을 a, b에 대한 식으로 나타내고 반지름의 길이를 구하시오.
(단, 점 P는 집합 B의 원소가 아니다.)

[3-2] 집합 A의 임의의 점 P와 점 $\mathrm{C}(6,0)$에 대하여 선분 PC를 $1:2$로 내분하는 점을 원소로 하는 집합을 구하시오.

[3-3] 집합 A의 임의의 점 P와 집합 B의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점이 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.

풀어보기

문제1. 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? (2013. 4월 전국연합)

① $-e^{2\pi}$ ② $-e^{\pi}$ ③ $\dfrac{1}{e^{3\pi}}$ ④ $\dfrac{1}{e^{2\pi}}$ ⑤ $\dfrac{1}{e^{\pi}}$

문제2. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} ax & (x < 1) \\ -3x+4 & (x \ge 1) \end{cases}$, $g(x) = 2^x + 2^{-x}$에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (2015. 6월 평가원)

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

문제3. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x) = (f \circ g)(x)$라 하자.

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)+1}{x-1} = 2, \quad \lim_{x \to 1} \frac{h(x)-2}{x-1} = 12$$

일 때, $f(-1) + f'(-1)$ 의 값은? (2019. 10월 전국연합)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

문제4. 함수 $f(x)$ 가 $x > -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$\ln(1+x) \le f(x) \le \dfrac{1}{2}\left(e^{2x} - 1\right)$ 을 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(3x)}{x}$ 의 값은? (2012. 6월 평가원)

① 1 ② e ③ 3 ④ 4 ⑤ $2e$

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ①

$f'(x)=2e^{x}\cos x=0\,(0<x<2\pi)$에서 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$이다.

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$e^{\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$	$\nearrow$	

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값 $M=e^{\frac{\pi}{2}}$, $x=\dfrac{3}{2}\pi$에서 극솟값 $m=-e^{\frac{3}{2}\pi}$을 갖는다.
따라서 $Mm=-e^{2\pi}$

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

$$(g\circ f)(1)=g(1)=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=g(1)=\frac{5}{2},\ \lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=g(a)=2^{a}+2^{-a}$$

$(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$(g\circ f)(1)=\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)$$

그러므로 $2^{a}+2^{-a}=\dfrac{5}{2}$이다.

$$2\cdot2^{2a}-5\cdot2^{a}+2=0$$
$$(2\cdot2^{a}-1)(2^{a}-2)=0$$
$$2^{a}=\frac{1}{2},\ 2$$
$$a=-1,\ 1$$

그러므로 모든 실수 a의 곱은 -1이다.

풀어보기(문제3) 정답 ⑤

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이면 (분자)$\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\{g(x)+1\}=g(1)+1=0,\ g(1)=-1,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=2$$

$\lim_{x\to1}\frac{h(x)-2}{x-1}=12$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이면 (분자)$\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\{h(x)-2\}=h(1)-2=0,\ h(1)=2,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{h(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)=12$$

$h(x)=(f\circ g)(x)$에서 $x=1$일 때 $h(1)=f(g(1))=f(-1)=2$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$에서 $x=1$일 때 $h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(-1)\times2=12$

즉 $f'(-1)=6$

따라서 $f(-1)+f'(-1)=2+6=8$

풀어보기(문제4) 정답 ③

$x>0$일 때

$$\frac{\ln(1+3x)}{x}\le\frac{f(3x)}{x}\le\frac{\frac{1}{2}\left(e^{6x}-1\right)}{x}$$

이고 $-1<x<0$일 때

$$\frac{\ln(1+3x)}{x}\ge\frac{f(3x)}{x}\ge\frac{\frac{1}{2}\left(e^{6x}-1\right)}{x}$$

이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}=3$$

[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] 함수 $f(x)=e^x \sin x$ 를 미분하면 $f'(x)=e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$ 이고, $x=\frac{3}{4}\pi$ 에서만 $f'(x)=0$ 이다. $x<\frac{3}{4}\pi$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 이 구간에서 $f(x)$ 가 증가하고 $x>\frac{3}{4}\pi$ 에서 $f'(x)<0$ 이므로 이 구간에서 $f(x)$ 가 감소한다. 그러므로 $f(x)$ 는 $x=\frac{3}{4}\pi$ 에서 최댓값 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=e^{\frac{3}{4}\pi}\sin\frac{3}{4}\pi=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 을 가진다.

따라서 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 이고 $M=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

[1-2] [1-1]에 의해 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 이고 $M=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 지수함수의 성질과 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 아래의 등식을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
f\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right)&=e^{\theta+\frac{1}{n}\pi}\sin\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right)\\
&=e^{\theta+\frac{1}{n}\pi}\left\{\sin\theta\cos\frac{1}{n}\pi+\cos\theta\sin\frac{1}{n}\pi\right\}\\
&=e^{\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{n}\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{n}\pi\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right\}\\
&=M\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right\}
\end{aligned}
$$

[1-3] $x\in[0,\ \pi]$ 에 대하여 $0\le f(x)\le M$ 이므로 $0\le\{f(x)\}^n\le M^n$ 이 성립하고 $f(x)$ 가 상수함수가 아니므로, 구간 $[0,\ \pi]$ 에서 적분하면

$$\int_0^\pi\{f(x)\}^n dx<\int_0^\pi M^n dx=M^n\pi$$

이다.

$n\ge 4$ 일 때, $\frac{3}{4}\pi<\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\le\pi$ 이고 $f(x)$ 가 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \pi\right]$ 에서 감소하므로 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right]$ 에 속한 x 에 대하여 $f(\pi)\le f\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right)\le f(x)$ 이다.

따라서

$$0 \le Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right) \le f(x)$$

가 성립한다. 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right]$ 에서

$$\left\{Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)\right\}^n = M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \le \{f(x)\}^n$$

이므로 위의 부등식을 적분하면

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi} M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n dx \le \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi} \{f(x)\}^n dx$$

가 성립한다. 그리고 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right]$ 가 $[0,\ \pi]$ 의 부분집합이고 $f(x) \ge 0$ 이므로

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi} \{f(x)\}^n dx < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx$$

가 성립한다. 위의 두 부등식으로부터

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx$$

를 얻는다. 그러므로 $n \ge 4$ 에 대하여

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx < M^n \pi$$

가 성립한다.

[별해]

$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n = \left\{f\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right)\right\}^n$ 이다.

$n \ge 4$ 에 대하여 $y = \{f(x)\}^n$ 의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x) \\ &= n\cdot e^{n\pi}\sin^n x + n\cdot e^{nx}\sin^{(n-1)}x\cos x \\ &= n\cdot e^{nx}\sin^{(n-1)}x(\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

이고, $y' = 0$ 이면 $x = 0,\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi$ 이다.

$0 \le x \le \pi$ 에서 $y = \{f(x)\}^n$ 의 증가, 감소를 알아보기 위해 y' 의 부호를 표로 만들면

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
y'	0	$+$	0	$-$	0
y	0	↗또는 증가	M^n	↘또는 감소	0

이므로 $y=\{f(x)\}^n$ 는 구간 $[0,\ \pi]$ 에서 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ 일 때 최댓값 M^n 을 가진다.

구간 $[0,\ \pi]$ 에서 $y=\{f(x)\}^n$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분은 밑변이 $[0,\ \pi]$ 이고 높이가 M^n 인 직사각형에 포함되므로

$$\int_0^\pi \{f(x)\}^n dx < \int_0^\pi M^n dx = M^n\pi$$

가 성립한다.

$M^n e^\pi\left(\cos\dfrac{1}{n}\pi-\sin\dfrac{1}{n}\pi\right)^n\dfrac{1}{n}\pi$ 는 밑변이 구간 $\left[\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{1}{n}\pi\right]$ 이고

높이가 $M^n e^\pi\left(\cos\dfrac{1}{n}\pi-\sin\dfrac{1}{n}\pi\right)^n=\left\{f\left(\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{1}{n}\pi\right)\right\}^n$ 인 직사각형의 넓이이다.

이 직사각형은 함수 $y=\{f(x)\}^n$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분에 포함되어 있으므로

$$M^n e^\pi\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi < \int_0^\pi \{f(x)\}^n dx$$

가 성립한다.

[1-4] 문항 [1-3]의 부등식

$$M^n e^\pi\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi < \int_0^\pi \{f(x)\}^n dx < M^n\pi$$

에 $\sqrt[n]{\ }$ 를 적용하면

$$\left(M^n e^\pi\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\int_0^\pi \{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}} < \left(M^n\pi\right)^{\frac{1}{n}} = M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}$$

이다. 위 부등식의 왼쪽 부분을 정리하면

$$\left(M^n e^\pi\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi\right)^{\frac{1}{n}} = Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}}$$

이므로 위의 부등식을 다시 쓰면

$$Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}} < \left(\int_0^\pi \{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}} < M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}$$

이고, 극한값의 대소관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\pi \{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty} M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}$$

이 된다.

여기에서 π 와 e 는 상수이므로

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\pi}{n}}=1 \text{과 } \lim_{n\to\infty} \pi^{\frac{1}{n}}=1$$

을 얻고, 또한

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)=\cos 0-\sin 0=1$$

이며, 주어진 조건에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}}=M$$

이고

$$\lim_{n\to\infty} M\cdot n^{\frac{1}{n}}=M$$

이다. 따라서 위의 부등식은

$$M\le \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\le M$$

이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=M$이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] 등식 $f(a+f(b))=f(a)+b$ 에 $a=0$을 대입하면 모든 실수 b에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(f(b))=f(0)+b$$

이 등식에 $b=0$을 대입하면 $f(f(0))=f(0)$ 을 얻는다. $f(0)$이 0이 아닌 수 k라 하면 $f(0)=k$이고 $f(f(0))=f(0)$ 에서 $f(k)=k$이므로 일대일대응이라는 사실에 모순이다. 따라서 $f(0)=0$이다.

이제 $f(0)=0$이므로 모든 실수 b에 대하여 등식 $f(f(b))=f(0)+b=b$가 성립함을 알 수 있다.

[2-2] 임의의 실수 a에 대하여 등식 $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$가 성립하면 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

임의의 실수 c, d에 대하여, f가 일대일대응이므로 $d=f(b)$인 실수 b가 있고, 주어진 등식으로부터

$$f(c+d)=f(c+f(b))=f(c)+b$$

임을 알 수 있다. 그런데 $d=f(b)$ 이므로 문항 [2-1]에 의하여 $f(d)=f(f(b))=b$ 이다. 따라서

$$f(c+d)=f(c)+f(d)$$

이고 이 등식은 모든 실수 c, d에 대하여 성립한다.

위에서 얻은 등식을 활용하면, 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{h\to0}f(a+h)=\lim_{h\to0}\{f(a)+f(h)\}=f(a)+\lim_{h\to0}f(h)$$

이다. $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{h\to0}f(h)=f(0)=0$ 이다. 따라서

$$\lim_{h\to0}f(a+h)=f(a)$$

이므로 함수 $f(x)$가 임의의 실수 $x=a$에서 연속이다.

[2-3] 임의의 실수 a에 대하여 극한 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 가 존재하면 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.

문항 [2-2]의 풀이에서 $f(a+h)=f(a)+f(h)$ 와 $f(0)=0$을 활용하면, $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a)+f(h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)$$

이다. 따라서 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $f'(a)=f'(0)$ 이다.

$f'(0)$을 k라 두고 도함수 $f'(x)=k$를 적분하면 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x)=kx$$

이다. 이 식을 등식 $f(a+f(b))=f(a)+b$ 에 대입하면

$$ka+k^2b=ka+b$$

이므로 $k^2=1$ 이다. 즉 $k=1$ 또는 $k=-1$.

따라서 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] 좌표평면의 한 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 집합 B의 임의의 한 점 $\mathrm{Q}(3\cos\theta+6, 3\sin\theta)$를 이은 선분 PQ를 1:2로 내분하는 점 (x, y)를 구하면

$$(x,\ y)=\left(\frac{2a+(3\cos\theta+6)}{3},\ \frac{2b+3\sin\theta}{3}\right)$$

이다. 삼각함수에 대한 식으로 쓰면

$$(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(x-\frac{2a+6}{3},\ y-\frac{2b}{3}\right)$$

이고

$$\left(x-\frac{2a+6}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2b}{3}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

이므로 중심이 $\left(\frac{2a}{3}+2,\ \frac{2b}{3}\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 나타낸다.

[3-2] 점 $\mathrm{P}(-3,\ t)$와 점 $\mathrm{C}(6,\ 0)$을 이은 선분 PC를 $1:2$로 내분하는 점을 구하면

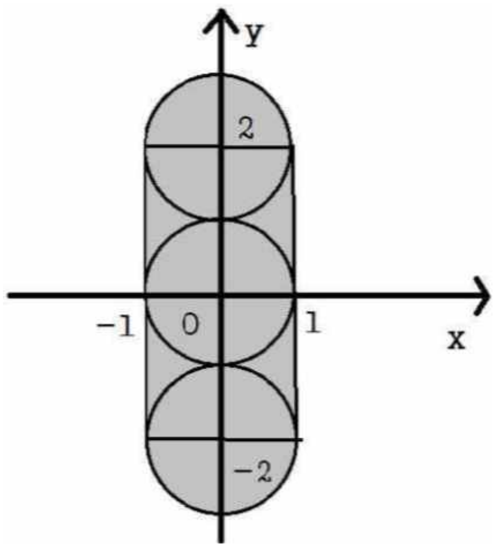
$$\left(\frac{2\cdot(-3)+1\cdot 6}{3},\ \frac{2\cdot t+1\cdot 0}{3}\right)=\left(0,\ \frac{2t}{3}\right)$$

이다. 따라서 구하는 집합은

$$\left\{\left(0,\ \frac{2}{3}t\right) \mid -3\le t\le 3\right\}$$

이다.

[3-3] 집합 A의 한 점 $(-3,\ t)$를 정하고 집합 B의 임의의 점과 이루는 선분을 $1:2$로 내분하는 점으로 구성된 집합을 S라 하면 집합 S는 문항 [3-1]에 따라 중심이 $\left(0,\ \frac{2}{3}t\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 t에 의해 모은 영역으로 나타난다. 범위 $-3\le t\le 3$에서 중심이 $\left(0,\ \frac{2}{3}t\right)$인 원을 살펴보면 집합 S의 영역은 아래와 같이 나타난다.



집합 S가 나타내는 영역은 반지름의 길이가 1인 반원 2개와 변의 길이가 4, 2인 직사각형으로 나누어지므로 집합 S가 나타내는 영역의 넓이는 $1^2\pi+4\cdot 2=\pi+8$이다.

28 이화여자대학교(자연계열Ⅱ) 수시28)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
극대, 최댓값, 미분, 적분, 지수함수, 삼각함수, 연속성, 합성함수, 일대일대응, 부정적분, 도함수, 원, 내분점	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 3개 영역 등급 합 6 이내 [탐구영역] 응시한 과목 중 상위 1과목의 등급으로 반영	수학 3문항	100분

※ [문항 1]은 이화여자대학교(자연계열Ⅰ) [문항 1]과 일치하므로 생략합니다.

[문항 2] 함수 $f(x)$가 모든 실수 a, b에 대하여 다음 등식을 만족시킨다.

$$f(f(a)+b)=a+f(b)$$

다음 물음에 답하시오.(35점)

[2-1] $f(0)$의 값을 구하고, 모든 실수 a에 대하여 $f(f(a))=a$임을 보이시오.

[2-2] 함수 $f(x)$가 $x=2020$에서 연속일 때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 보이시오.

[2-3] 함수 $f(x)$가 $x=2020$에서 미분가능할 때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 보이고, 함수 $f(x)$를 모두 구하시오.

28) 이화여자대학교 홈페이지

[문항 3] 좌표평면에서 두 집합 $A=\{(5,\ t)\mid -2\le t\le 2\}$과
$B=\{(3\cos\theta+6,\ 3\sin\theta)\mid 0\le\theta<2\pi\}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.(30점)

[3-1] 좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 집합 B의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점을 원소로 하는 집합이 원을 나타냄을 보이고, 이 원의 중심을 a, b에 대한 식으로 나타내고 반지름의 길이를 구하시오.
(단, 점 P는 집합 B의 원소가 아니다.)

[3-2] 집합 A의 임의의 점 P와 점 $\mathrm{C}(6,0)$에 대하여 선분 PC를 $1:2$로 내분하는 점을 원소로 하는 집합을 구하시오.

[3-3] 집합 A의 임의의 점 P와 집합 B의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점이 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.

예시답안

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] 등식 $f(f(a)+b)=a+f(b)$ 에 $b=0$ 을 대입하면

$$f(f(a))=a+f(0)$$

을 얻는다. 이 등식에 $a=0$ 을 대입하면 $f(f(0))=f(0)$ 을 얻는다. 이 등식이 모든 실수 a 에 대하여 성립하므로 $f(0)$ 을 a 에 대입하면

$$f(f(f(0)))=f(0)+f(0)=2f(0)$$

이 성립한다. $f(f(0))=f(0)$ 을 활용하면 $f(f(f(0)))=f(f(0))=f(0)$ 이므로 $f(0)=2f(0)$ 을 얻고 따라서 $f(0)=0$ 이다.

이제 $f(0)=0$ 이므로 모든 실수 a 에 대하여 등식 $f(f(a))=a+f(0)=a$ 가 성립함을 알 수 있다.

[2-2] 임의의 실수 a 에 대하여 등식

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$$

가 성립하면 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이다.

임의의 실수 c, d 에 대하여 $f(c)$ 와 d 를 등식의 a, b 에 각각 대입하면

$$f(f(f(c))+d)=f(c)+f(b)$$

이다. 문항 [2-1]에 의하여 $f(f(c))=c$ 가 성립하므로, $f(f(f(c))+d)=f(c+b)$ 이다.

따라서, 모든 실수 c, d 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(c+d)=f(c)+f(d)$$

위에서 얻은 등식을 활용하면, 임의의 실수 a 에 대하여

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(a+h) &= \lim_{h\to 0} f(a-2020+2020+h)\\ &= \lim_{h\to 0}\{f(a-2020)+f(2020+h)\}\\ &= f(a-2020)+\lim_{h\to 0} f(2020+h)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

$f(x)$ 가 $x=2020$ 에서 연속이므로 $\lim_{h\to 0} f(2020+h)=f(2020)$ 이다. 따라서

$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a-2020)+f(2020)=f(a)$

이므로 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 $x=a$ 에서 연속이다.

[2-3] 임의의 실수 a에 대하여 극한

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.

문항 [2-2]의 풀이에서 $f(c+d)=f(c)+f(d)$ 를 활용하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)+f(h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

이다. 위 등식은 특별히 $a=2020$일 때에도 성립하므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2020+h)-f(2020)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

이다. $f(x)$가 $x=2020$에서 미분가능하므로 좌변의 극한이 존재하고 극한값은 $f'(2020)$이며, 따라서 우변의 극한도 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(2020)$이다. 그러므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(2020)$$

이다. 따라서 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $f'(a)=f'(2020)$이다.

$f'(2020)$을 k라고 두고 도함수 $f'(x)=k$를 적분하면 $f(0)=0$이므로

$$f(x)=kx$$

이다. 이 식을 등식 $f(f(a)+b)=a+f(b)$ 에 대입하면

$$k^2a+kb=a+kb$$

이므로 $k^2=1$이다. 즉 $k=1$ 또는 $k=-1$.

따라서 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] 좌표평면의 한 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 집합 B의 임의의 한 점 $\mathrm{Q}(3\cos\theta+6, 3\sin\theta)$를 이은 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점 (x, y)를 구하면

$$(x,\ y)=\left(\frac{2a+(3\cos\theta+6)}{3},\ \frac{2b+3\sin\theta}{3}\right)$$

이다. 삼각함수에 대한 식으로 쓰면

$$(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(x-\frac{2a+6}{3},\ y-\frac{2b}{3}\right)$$

이고

$$\left(x-\frac{2a+6}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2b}{3}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

이므로 중심이 $\left(\frac{2a}{3}+2,\ \frac{2b}{3}\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 나타낸다.

[3-2] 점 $\mathrm{P}(5,\ t)$와 점 $\mathrm{C}(6,\ 0)$을 이은 선분 PC를 $1:2$로 내분하는 점을 구하면

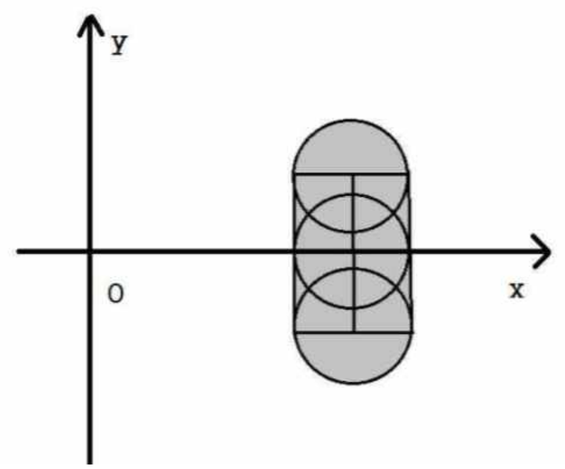
$$\left(\frac{2\cdot 5+1\cdot 6}{3},\ \frac{2\cdot t+1\cdot 0}{3}\right)=\left(\frac{16}{3},\ \frac{2t}{3}\right)$$

이다. 따라서 구하는 집합은

$$\left\{\left(\frac{16}{3},\ \frac{2}{3}t\right) \mid -2 \le t \le 2\right\}$$

이다.

[3-3] 집합 A의 한 점 $(5,\ t)$를 정하고 집합 B의 임의의 점과 이루는 선분을 $1:2$로 내분하는 점으로 구성된 집합을 S라 하면 집합 S는 문항 [3-1]에 따라 중심이 $\left(\frac{16}{3},\ \frac{2}{3}t\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 t에 의해 모은 영역으로 나타난다. 범위 $-2 \le t \le 2$에서 중심이 $\left(\frac{16}{3},\ \frac{2}{3}t\right)$인 원을 살펴보면 집합 S의 영역은 아래와 같이 나타난다.



집합 S가 나타내는 영역은 반지름의 길이가 1인 반원 2개와 변의 길이가 $\frac{8}{3}$, 2인 직사각형으로 나누어지므로 집합 S가 나타내는 영역의 넓이는 $1^2\pi+\frac{8}{3}\cdot 2=\pi+\frac{16}{3}$이다.