제 2 교시

수학 영역

MENTOR

1. $\frac{1}{2} < \log a < \frac{11}{2}$ 인 양수 a에 대하여 $\frac{1}{3} + \log\sqrt{a}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

$\log\sqrt{a} = \frac{1}{2}\log a$

[2022학년도 예시문항 수학 10번]

① 10^{10} ② 10^{11} ③ 10^{12} ④ 10^{13} ⑤ 10^{14}

$$\frac{1}{2} < \log a < \frac{11}{2}$$

$\times \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}\log a < \frac{11}{4}$$

$+\frac{1}{3}$

$$\underset{0.xxx}{\frac{7}{12}} < \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log a < \frac{37}{12} = \frac{36}{12} + \frac{1}{12} = 3.xxx$$

가능한 자연수 : 1, 2, 3

즉, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log a_1 = 1$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log a_2 = 2$

$\oplus$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log a_3 = 3$

$$3 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log(a_1 \times a_2 \times a_3) = 6$$

$$\therefore \log a_1a_2a_3 = 10$$

$$\therefore a_1a_2a_3 = 10^{10}$$

주어진 범위를 그대로 이용하여 원하는 모양으로 변형시키면 끝! 로그의 기본 성질만 알면 간단.

cf) 진수의 곱 $\Leftrightarrow$ 로그의 합

가끔 계산시간 단축에 도움될 때 있음

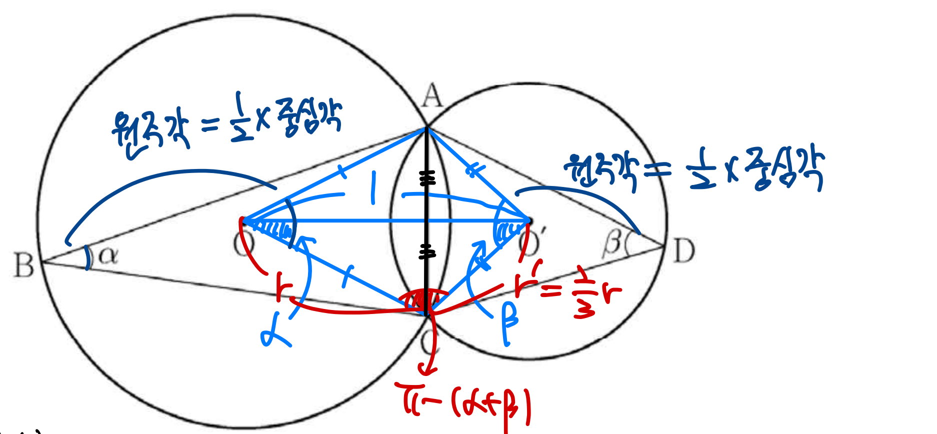
2. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 ∠ABC = α, ∠ADC = β라 할 때,

외접원의 중심

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{3}{2}, \quad \cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}, \quad \overline{OO'} = 1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[2022학년도 예시문항 수학 21번]



Sol 1)

"사인법칙"

$2r = \frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}$

$2r' = \frac{\overline{AC}}{\sin\beta}$

$\Rightarrow \frac{2r}{2r'} = \frac{r}{r'} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{3}{2}$

$\therefore r' = \frac{2}{3}r$

"코사인 법칙" ⇒ △COO′ 또는 △AOO′에서 이용.

$$1^2 = r^2 + \left(\frac{2}{3}r\right)^2 - 2 \cdot r \cdot \frac{2}{3}r \cdot \cos(\pi - (\alpha+\beta))$$

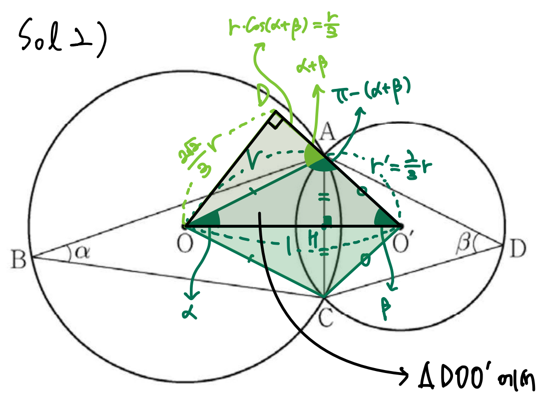
$$= \frac{13}{9}r^2 + \frac{4}{3}r^2 \cdot \cos(\alpha+\beta)$$

$$\therefore r^2 = \frac{9}{17}$$

$\therefore$ (삼각형 ABC의 외접원의 넓이) $= \frac{9}{17}\pi$

$\therefore p+q = 26$

Sol 2)



$\overline{AH} = r\sin\alpha$

$\overline{AH} = r'\cos\alpha$

$\Rightarrow 1 = \frac{r\sin\alpha}{r'\sin\beta} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{r'}$

$\therefore \frac{r}{r'} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow r : r' = 3 : 2$

△DOO′에서 피타고라스

$\Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}r\right)^2 + (r)^2 = 1^2 \quad \therefore \frac{17}{9}r^2 = 1$

$\therefore r^2 = \frac{9}{17}$

$\therefore S = \frac{9}{17}\pi$

$\boxed{p+q = 26}$

두 원의 중심 → 이어보자 : 현과 수직
두 점에서 만나는 원 → 이등변 삼각형
원주각 = ½ × 중심각
사인 법칙 & 코사인 법칙

양수? 음수? (당연하지만 여기서 조건에 의해 0은 불가능!)

3. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$=d$

$$a_3+a_5=0,\quad \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오.

운 좋으면 3분컷 가능 Case1, Case2 둘 다 확인하면 시간이 조금 걸릴 수도 있다!

[2022학년도 예시문항 수학 20번]

① : 계산보다는 등차수열의 특징 이용!

$\{a_n\}$이 AP 이므로 $\underbrace{a_3+a_5=2a_4}_{\text{등차중항}}=0$ ∴ $a_4=0$

$a_1+3d=0$ ⋯ ㉠

전환점

$a_1, a_2, a_3, \boxed{0}, a_5, a_6 \cdots$

② : $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$

절댓값은 시작부터 건드리지 말고 천천히 나열부터!

i) $d<0$: $a_1 \sim a_3>0$ 이고 $a_5, a_6<0$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=2(a_1+a_2+a_3)$

$=2(3a_1+3d)=30$

$\therefore a_1+d=5$ ⋯ ㉡

㉠㉡ 연립하면

$2d=-5 \Rightarrow d=-\frac{5}{2}$ (부적합)

정수가 아님!

ii) $d>0$: $a_1, a_2, a_3<0$ 이고 $a_5, a_6>0$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=(-a_1-a_2-a_3+a_5+a_6)$

$+(a_1+a_2+a_3+a_5+a_6)$

$=2(a_5+a_6)=2(2a_1+9d)=30$

$\therefore 2a_1+9d=15$ ⋯ ㉢

㉠㉢ 연립 : $3d=15$ $\therefore d=5$ (적합)

$\therefore a_1=-15$

$\therefore a_9=-15+8\cdot5$

$=25$

cf) 시험장에서 $d>0$ 부터 체크했으면 그냥 그게 답일 확률 MMM

4. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은?

→ 많다 ⇒ 규칙성 100%

끝까지 하면 풀린다! a_5 확정 ⇒ $a_6, a_7, \cdots$ 전부 결정된다! ⇒ 역추적만 하면 끝

(가) $a_5=5$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n\ge 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0) \end{cases}$$

이다.

[2022학년도 예시문항 수학 15번]

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

$a_5=5=\begin{cases} a_4-6 \Rightarrow a_4=11=\begin{cases} a_3-6 \Rightarrow a_3=17=\begin{cases} a_2-6 \Rightarrow a_2=23=\begin{cases} a_1-6 \Rightarrow a_1=29 \\ -2a_1+3 \Rightarrow a_1=-10 \end{cases} \\ -2a_2+3 \Rightarrow a_2=-7 \end{cases} \\ -2a_3+3 \Rightarrow a_3=-4 \end{cases} \\ -2a_4+3 \Rightarrow a_4=-1 \end{cases}$

Max

$a_4=-1=\begin{cases} a_3-6 \Rightarrow a_3=5=\begin{cases} a_2-6 \Rightarrow a_2=11=\begin{cases} a_1-6 \Rightarrow a_1=17 \\ -2a_1+3 \Rightarrow a_1=-4 \end{cases} \\ -2a_2+3 \Rightarrow a_2=-1=\begin{cases} a_1-6 \Rightarrow a_1=5 \\ -2a_1+3 \Rightarrow a_1=\cancel{2} \text{ (부적합)} \end{cases} \end{cases} \\ -2a_3+3 \Rightarrow a_3=\cancel{2}>0 \text{ (부적합)} \end{cases}$

min

규칙성 각

$a_6=a_5-6=-1$

$(\because a_5>0)$

$a_7=-2a_6+3=5$

⋮

결국 교차 무한반복

$a_n=\begin{cases} 5 & (n\text{은 홀수}) \\ -1 & (n\text{은 짝수}) \end{cases}, \quad n\ge5$

$M=(\underbrace{29+23+17+11}_{40})+\cancel{5-1}+\cancel{5-1}+\cdots$

$-\ m=(5-1+5-1)+\cancel{5-1}+\cancel{5-1}+\cdots$

$\therefore M-m=80-8$

$=72$