2022 수능 예시문항으로

3월 모의고사

완벽 대비!

★★★ 자료 사용 설명서 ★★★

1. 2022 수능 예시문항 문제지를 푼다!
2. 채점 후 오답 문항을 다시 풀어본다!
3. 오답 점검 후 이 자료를 보며, 왼쪽 페이지 (짝수 페이지)의 분석 내용을 읽는다!

   point : 놓친 개념이나 풀이의 비약은 없는지, 접근 방법이 제대로 되었는지 확인하기!
4. 분석 후 오른쪽 페이지 (홀수 페이지)의 유사 문항을 풀어 보며

   공부한 내용을 잘 습득했는지 점검한다!

[참고 1] 선택과목은 3월 모의고사 범위에 맞는 문항들만 수록되어 있습니다.

[참고 2] 유사문항 답지는 자료 맨 뒤에 수록되어 있습니다.

001 $\dfrac{3^{\sqrt{5}+1}}{3^{\sqrt{5}-1}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

지수법칙을 이용하는 기본적인 문제야!

$\boxed{\begin{aligned} &\text{* 지수법칙} \\ &a^x \times a^y = a^{x+y} \\ &a^x \div a^y = a^{x-y} \end{aligned}}$

$$\frac{3^{\sqrt{5}+1}}{3^{\sqrt{5}-1}} = \frac{3 \times 3^{\sqrt{5}}}{\frac{1}{3} \times 3^{\sqrt{5}}} = 9$$

또는 $3^{(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)} = 3^2 = 9$

[자작 문항]

$\dfrac{2^{\sqrt{3}-1}}{2^{\sqrt{3}+1}}$ 의 값은? [2점][1)]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

002 $\int_{-1}^{1}(x^3+a)dx=4$ 일 때, 상수 a 의 값은? [2점]

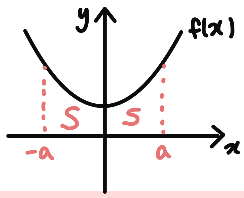
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

정적분 문항인데, 우함수와 기함수의 성질을 활용하면 쉽게 풀 수 있어.

* 우함수와 기함수의 정적분 : 적분구간의 양 끝이 부호만 다르고 절댓값이 같은 경우

① 우함수 : y축 대칭 함수 $(f(-x)=f(x))$

→ 다항함수인 경우 : 짝수차항만 존재함

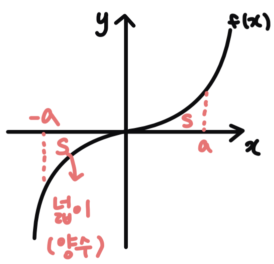


$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2S = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\boxed{\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx}$$

② 기함수 : 원점 대칭인 함수 $(f(-x)=-f(x))$

→ 다항함수인 경우 : 홀수차항만 존재함



$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = (-S)+(S)=0$$

$$\boxed{\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0}$$

$$\int_{-1}^{1}(x^3+a)dx=4 \rightarrow \underbrace{\int_{-1}^{1}x^3dx}_{\text{기함수}} + \underbrace{\int_{-1}^{1}a\,dx}_{\text{우함수}}=4$$

$$\rightarrow 0+2\int_{0}^{1}a\,dx=4$$

$$\rightarrow 2[ax]_0^1=4,\ 2a=4$$

$$\therefore a=2$$

[2019년 시행 10월 학평 나형 6번]

$\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx+\int_{3}^{-3}(x^3+x^2)dx$의 값은? [3점] 2)

① 36 ② 42 ③ 48 ④ 54 ⑤ 60

003 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지날 때, 상수 m의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

함수의 평행이동에 관한 기본 문제야.

* 함수의 평행이동

$$y=f(x) \xrightarrow[y\text{축으로 } n\text{만큼}]{x\text{축으로 } m\text{만큼}} y=f(x-m)+n$$

$$y=f(x) \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 } m\text{만큼 평행이동}]{} y=f(x)+m$$

$y=2^x$ $\qquad$ $y=2^x+m$

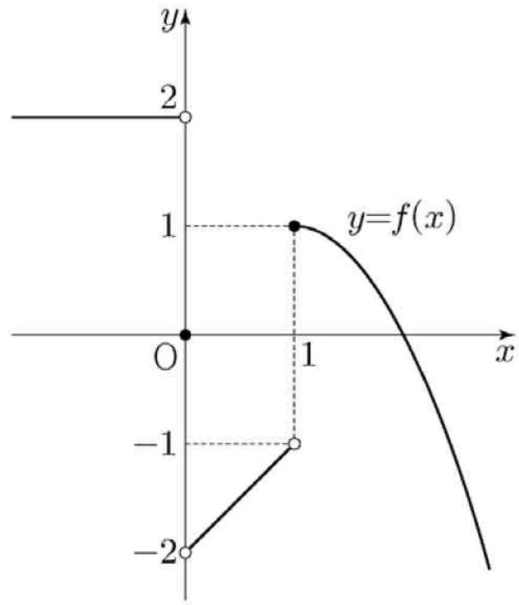
즉, 함수 $y=2^x+m$ 이 점 $(-1,2)$ 를 지나므로

$2=2^{-1}+m$, $m=\frac{3}{2}$

[2015년 시행 4월 학평 A형 25번]

함수 $y=\log x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 그래프가 두 점 $(4,\ b)$, $(13,\ 11)$을 지날 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. [3점][3)]

004 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

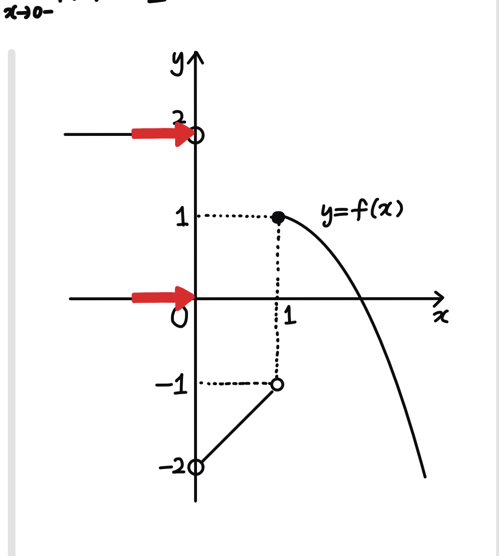


$\lim_{x \to 0-} f(x) - \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

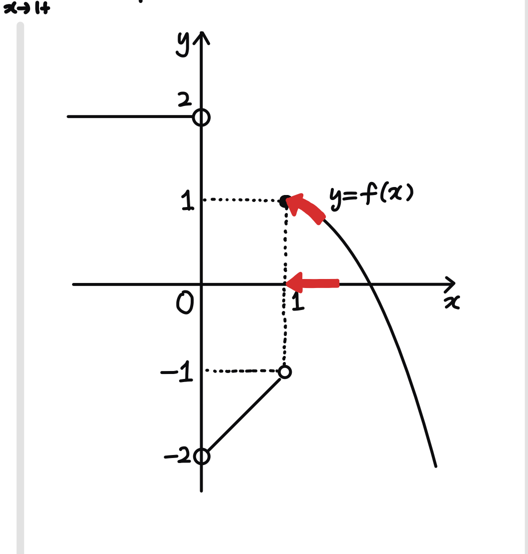
① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

함수의 극한 문제 중 그래프를 통해 함수의 좌극한, 우극한, 함숫값을 판단하는 기본 문제야.

$\lim_{x \to 0-} f(x) = 2$

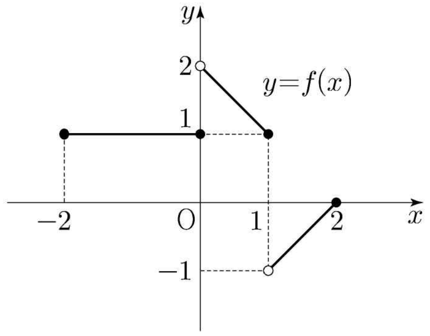


$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$



[2020년 시행 9월 모평 나형 6번]

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 4)



$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) + \lim\limits_{x \to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

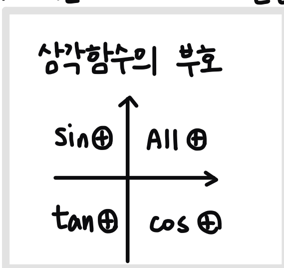
005 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$일 때, $\sin\theta-\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{5}$　　② 1　　③ $\frac{6}{5}$　　④ $\frac{7}{5}$　　⑤ $\frac{8}{5}$

주어진 식을 통해 삼각함수의 성질을 활용하여 답을 구하는 문제야.

문제를 풀기 전에 반드시 θ 값의 범위를 체크해 줘야 해!

이 문제에서는 θ가 제2사분면의 각이니, $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 이겠지.



또한 삼각함수의 기본 성질인 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$은 당연히 알아둬야겠지?

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1-2\times\left(-\frac{12}{25}\right)$$
$$=\frac{49}{25}$$

$$\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{7}{5}$$

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 이므로 $\sin\theta-\cos\theta$의 부호는 $+$겠지!

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$

[2016년 시행 7월 학평 가형 6번]

$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $\tan\theta + \cot\theta$ 의 값은? [3점] 5)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

006 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x^2-kx+1,\ f(0)=f(2)=1$$

을 만족시킬 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

다항함수의 적분 문제야!

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수, n은 자연수)

많은 학생들이 이 문제를 부정적분으로 쉽게 풀었을 것 같아.

정적분을 활용하는 풀이도 보여줄테니 꼭 두 풀이 모두 익혀 둬!

유사문항도 두가지 풀이 모두 가능하니 둘 다 연습해 봐~

Sol 1. 부정적분

$f'(x)=3x^2-kx+1 \longrightarrow f(x)=x^3-\frac{k}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=1 \longrightarrow C=1$

$f(2)=8-2k+2+1=1$

$\rightarrow 10=2k$

$\therefore k=5$

Sol 2 정적분

$f(0)=f(2) \rightarrow f(2)-f(0)=0$

$f(2)-f(0)=\int_0^2 f'(x)dx=\int_0^2(3x^2-kx+1)dx$

$=\left[x^3-\frac{k}{2}x^2+x\right]_0^2=8-2k+2=0$

$\therefore k=5$

[2020년 시행 4월 학평 나형 25번]

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=4x^3+4x+1$이다. $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [6][3점]

007 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-4 & (x<a) \\ x+3 & (x\ge a)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ 0　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 1

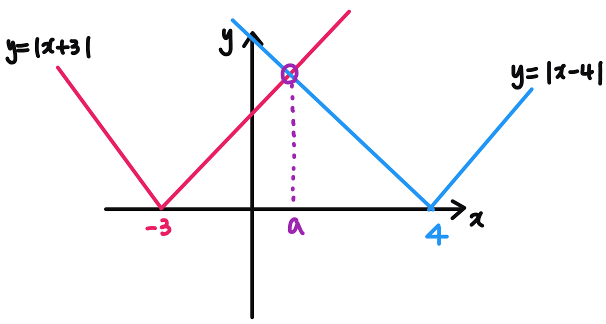
함수의 연속에 관한 문제인데, 절댓값을 포함한 함수라는 점에서 주의해야 해.

＊함수의 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$

이 문제에서는 함수가 절댓값을 포함하기 때문에, 그래프를 그려서 판단해 볼게.



즉, 위 그래프에서 $x+3=-(x-4)$의 근이 a라는 것을 알 수 있지!

$a+3=-a+4$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

(참고) $|a-4|=|a+3|$ 이 식을 바로 풀어도 되지만,

혹시나 시험장에서 절댓값을 빼먹고 $a-4=a+3$ 만 적어서 당황할 수 있으니

꼭 그래프로 이중 확인해 줘 ~~

[2018년 시행 10월 학평 나형 15번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le a) \\ x^2-4 & (x > a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은? [4점] 7)

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

008 함수 $y = 6\sin\frac{\pi}{12}x\ (0 \le x \le 12)$의 그래프와 직선 $y = 3$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

삼각함수의 그래프와 기본 성질(주기, 대칭성, 최대·최소)을 활용하는 문제야.

＊ 삼각함수의 기본 성질 $(b \neq 0)$

$y = a\sin bx + c$ (또는 $y = a\cos bx + c$)

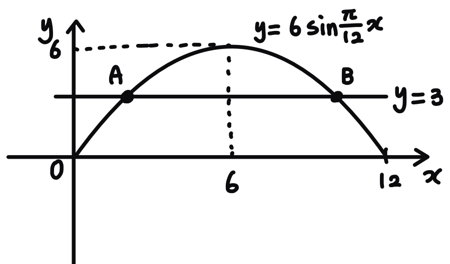
- 주기 : $\frac{2\pi}{|b|}$
- 최댓값 : $|a| + c$
- 최솟값 : $-|a| + c$

$y = a\tan bx + c$

- 주기 : $\frac{\pi}{|b|}$
- 최댓값, 최솟값 : 없음

$y = 6\sin\frac{\pi}{12}x\ (0 \le x \le 12)$ 에서 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$ 가 될거야.

즉 이 함수의 정의역인 $0 \le x \le 12$는 한 주기의 절반만큼이 되겠지.



(편의상 A의 x좌표 < B의 x좌표로 둠)

그래프로 나타내 보면 이런 상황이야.

점 A, B의 x좌표만 찾으면 선분 AB의 길이를 구할 수 있겠지?

$6\sin\frac{\pi}{12}x = 3 \rightarrow \sin\frac{\pi}{12}x = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \frac{\pi}{12}x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

$\rightarrow x = 2,\ 10$

여기서 삼각함수의 대칭성을 활용해서 점 A의 x좌표만 구하고 두 x좌표가 $x=6$에 대해 대칭임을 이용해도 좋아~

점 A의 x좌표가 2, 점 B의 x좌표가 10이므로

선분 AB의 길이는 8이야.

[2018년 시행 7월 학평 가형 8번]

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 2x = \dfrac{1}{3}$ 의 모든 해의 합은? [3점] 8)

① $\dfrac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\dfrac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\dfrac{7}{2}\pi$

009 원점을 지나고 곡선 $y=-x^3-x^2+x$ 에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은? [4점]

① 2　② $\frac{9}{4}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{11}{4}$　⑤ 3

함수의 접선의 방정식에 관한 문제야.

* 접선의 방정식 구하기

① 함수를 지나는 점(접점) : 미지수로 표현 $(t, f(t))$

→ 접선의 방정식 : $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

② 문제에서 주어진 정보 활용

ex) 기울기, 접선을 지나는 다른 점의 좌표 등

이 문제에서도 두가지 풀이 방법을 보여줄테니, 둘 다 연습해 봐!

Sol 1

접점이 주어지지 않았으니 (a, b) 라고 두면, 이 점은 함수 $y=-x^3-x^2+x$ 위의 점이야.

즉 $-a^3-a^2+a=b$ ①

접선의 방정식은 $y=(-3a^2-2a+1)(x-a)+b$ 이고, 이 접선이 점 $(0, 0)$을 지난다고 했어.

즉 $-a(-3a^2-2a+1)+b=0$ 에서 $-3a^3-2a^2+a=b$ ②

이제 ①, ②를 연립해주면

$b=-a^3-a^2+a=-3a^3-2a^2+a \rightarrow a=-\frac{1}{2}$ 또는 0

i) $a=-\frac{1}{2}$인 경우 : 접선의 기울기는 $\frac{5}{4}$

ii) $a=0$ 인 경우 : 접선의 기울기는 1

$\therefore 1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

Sol 2

원점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하는 상황이지?

접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 하면, $\frac{f(t)}{t}=f'(t)$ ↗ $x=t$ 에서의 접선의 기울기

↘ $(0,0)\sim(t, f(t))$ 연결한 직선의 기울기

↝ $t=0$ 또는 $-\frac{1}{2}$ (이하 과정은 동일해)

[2020년 시행 3월 학평 가형 17번]

$0 < a < 6$ 인 실수 a 에 대하여 원점에서 곡선 $y = x(x-a)(x-6)$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은? [9][4점]

① -54 ② -51 ③ -48 ④ -45 ⑤ -42

010 $\frac{1}{2} < \log a < \frac{11}{2}$ 인 양수 a 에 대하여 $\frac{1}{3} + \log\sqrt{a}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 a 의 값의 곱은? [4점]

① 10^{10} ② 10^{11} ③ 10^{12} ④ 10^{13} ⑤ 10^{14}

로그의 기본 성질을 활용하는 문제야.

복잡해 보이지만 풀어 보면 간단해 :)

* 로그의 기본 성질

$\log_a b = c$
- $a>0$, $a \neq 1$ (밑 조건)
- $b>0$ (진수 조건)
- $a^c = b$

$\frac{1}{2} < \log a < \frac{11}{2}$ 에서 $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}\log a \ (= \log\sqrt{a}) < \frac{11}{4}$

$\rightsquigarrow \frac{7}{12} < \frac{1}{3} + \log\sqrt{a} < \frac{37}{12}$ 임을 찾을 수 있어.

즉 $\frac{1}{3} + \log\sqrt{a}$ 가 가질 수 있는 자연수 값은 1, 2, 3 이 되는 거지.

i) $\frac{1}{3} + \log\sqrt{a} = 1 \rightarrow \log\sqrt{a} = \frac{2}{3}$, $\sqrt{a} = 10^{\frac{2}{3}}$, $a = 10^{\frac{4}{3}}$

ii) $\frac{1}{3} + \log\sqrt{a} = 2 \rightarrow \log\sqrt{a} = \frac{5}{3}$, $\sqrt{a} = 10^{\frac{5}{3}}$, $a = 10^{\frac{10}{3}}$

iii) $\frac{1}{3} + \log\sqrt{a} = 3 \rightarrow \log\sqrt{a} = \frac{8}{3}$, $\sqrt{a} = 10^{\frac{8}{3}}$, $a = 10^{\frac{16}{3}}$

$\therefore 10^{\frac{4}{3}} \times 10^{\frac{10}{3}} \times 10^{\frac{16}{3}} = 10^{\frac{4}{3}+\frac{10}{3}+\frac{16}{3}} = 10^{10}$

[2020년 시행 3월 학평 나형 25번]

$10 \le x < 1000$ 인 실수 x 에 대하여 $\log x^3 - \log \frac{1}{x^2}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 x 의 개수를 구하시오. [3점] [10)]

011 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> 방정식 $f(x)=9$ 는 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=1$, $f'(2)=-2$ 일 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

삼차함수의 성질과 수열에 대해 모두 알고 있어야 해결할 수 있는 문제야!

맨 윗줄의 '최고차항의 계수가 1' 이라는 조건 절대 잊으면 안 돼.

방정식 $f(x)=9$ 가 서로 다른 세 실근을 가진다는 조건으로 삼차함수의 개형을 추론할 수 있어.

이 경우에는 y의 값에 상관없이 하나의 실근 (또는 삼중근) 만을 가질 수 있어.

이 개형이 조건에 맞는 개형이야!

방정식 $f(x)=9$ 의 서로 다른 세 실근을 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ 라 할 때,

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+9$ 로 적을 수 있겠지.

또 α, β, γ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $\boxed{\beta^2=\alpha\gamma}$ 이 성립하겠지.

등비수열의 등비중항

이제 $f(0)=1$, $f'(2)=-2$ 조건을 활용해 볼게.

$f(0)=-\alpha\beta\gamma+9=1$ 에서 $\alpha\beta\gamma=8$, $\beta^3=8 \rightarrow \beta=2$

$f'(x)=(x-\alpha)(x-2)+(x-2)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)$

$f'(2)=(2-\alpha)(2-\gamma)$

$=4-2(\alpha+\gamma)+4=-2$

$\rightarrow (\alpha+\gamma)=5$

$\therefore f(3)=(3-\alpha)(3-\gamma)+9$

$=9-3(\alpha+\gamma)+4+9$

$=7$

[자작 문항]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 세 실근을 α, β, γ ($\alpha<\beta<\gamma$)라 하자. 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) β, α, γ는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) α, β, γ는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$f(0)=8$일 때, $f(5)$의 값은? [4점][11]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

012

$0<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^3-3x+k)dx>0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정적분의 기본 성질을 활용하는 문제야.

문제를 살펴보면 $0<a<b$ 인 모든 실수 a, b 에 대하여

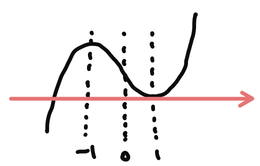
$\int_a^b (x^3-3x+k)dx>0$ 이 성립한다고 했어.

$x>0$ 인 부분에서 어떤 구간을 잡고 적분을 하든 0보다 크다는 것은,

피적분함수가 0보다 크거나 같아야 한다는 의미겠지!

즉 $x>0$ 에서 $x^3-3x+k \geq 0$ 이 성립해야 해.

$f(x)=x^3-3x+k$ 라 두면 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$



$x>0$ 에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$ 이므로,

$f(1)\geq 0$ 을 만족하면 되겠지!

$f(1)=1-3+k\geq 0 \rightarrow k\geq 2$

[2020년 시행 7월 학평 나형 28번]

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$, $f(x+3) = f(x)$이고 $\int_{-1}^{2} \{f(x) + x^2 - 1\}^2 dx$의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{26} f(x) dx$의 값을 구하시오. [4점] 12)

013 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$을 구하는 과정이다.

> $n=1$일 때, $a_1=S_1=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{a_1}=2$이다.
>
> $n=2$일 때, $a_2=S_2-S_1=-\frac{7}{6}$이므로 $\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}$이다.
>
> $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\frac{S_n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{k!}=-\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$$
>
> 즉, $S_n=-\frac{\boxed{(가)}}{n+1}$이므로
>
> $$a_n=S_n-S_{n-1}=-\left(\boxed{(나)}\right)$$
>
> 이다. 한편 $\sum_{k=3}^{n}k(k+1)=-8+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$이므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$$
>
> $$=\frac{64}{7}-\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{k=1}^{n}\boxed{(다)}$$
>
> $$=-\frac{1}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n+\frac{64}{7}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$라 할 때, $f(5)\times g(3)\times h(6)$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

빈칸을 채워나가는 문제야.

이런 문제들은 단순히 빈칸의 앞뒤만 보고 빈칸을 채워나가는 것이 아니라,

문제 전체를 파악하는 능력이 중요해!

(가) $\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}-1\right)$

$=\frac{1}{n!}\times\left(\frac{-n}{n+1}\right)=-\frac{\boxed{n}}{(n+1)!}$

(나) $S_n=-\frac{n}{n+1}$, $a_n=S_n-S_{n-1}=-\frac{n}{n+1}+\frac{n-1}{n}=-\boxed{\frac{1}{n(n+1)}}$

(다) $\frac{8}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)=\frac{8}{7}-\left\{-8+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\right\}=\frac{64}{7}-\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

$=\frac{64}{7}-\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{64}{7}-\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{k=1}^{n}\boxed{k^2}$

[2011년 시행 7월 학평 나형 19번]

수열 $\{a_n\}$이

$$T_n = 2a_1 + 3a_2 + \cdots + (n+1)a_n = \frac{n}{2n+4} \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} - T_n \qquad \cdots\cdots \ (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$= a_1 = \boxed{\text{(가)}}$

(우변)$= \dfrac{1}{(1+1)^2} - T_1 = \boxed{\text{(가)}}$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m$$

이다. $n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + a_{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + \boxed{\text{(나)}}(T_{m+1} - T_m) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{m+3}{m+2}(T_{m+1} - T_m) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{1}{(m+2)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1}\end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 α, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $\dfrac{\alpha}{f(2)}$의 값은? [3점] 13)

① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

014 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 가속도가

$$a(t)=3t^2-12t+9\ (t \geq 0)$$

이고, 시각 $t=0$ 에서의 속도가 k 일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. 구간 $(3, \infty)$ 에서 점 P 의 속도는 증가한다.

ㄴ. $k=-4$ 이면 구간 $(0, \infty)$ 에서 점 P 의 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄷ. 시각 $t=0$ 에서 시각 $t=5$ 까지 점 P 의 위치의 변화량과 점 P 가 움직인 거리가 같도록 하는 k 의 최솟값은 0 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

위치, 속도, 가속도에 관한 문제야.

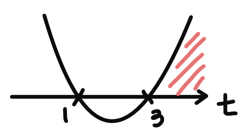
* 위치, 속도, 가속도 사이의 관계

위치 $\underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}}$ 속도 $\underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}}$ 가속도

$a(t)=3t^2-12t+9$ 에서 $v(t)=t^3-6t^2+9t+k$ 임을 알 수 있어.

ㄱ. $(3, \infty)$ 에서 점 P의 속도가 증가하려면, $(3, \infty)$ 에서 점 P의 가속도 ≥ 0 이 되어야겠지.

$a(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

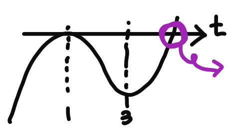


$(3, \infty)$에서 $a(t)>0$ (참)

ㄴ. 점 P의 운동 방향이 바뀐다는 것은 속도의 부호 변화를 의미해.

즉 $(0, \infty)$ 에서 $v(t)$ 의 부호가 두번 변하는지 묻는 문제야.

$v(t)=t^3-6t^2+9t-4$ 에서 $v(1)=0$, $v(3)<0$ 이므로 (직접 구해본 결과야)



$v(t)$ 부호변화는 한번만 일어남! (거짓)

ㄷ. $t=0$ 에서 $t=5$ 까지 위치의 변화량 : $\int_0^5 v(t)dt$

$t=0$ 에서 $t=5$ 까지 움직인 거리 : $\int_0^5 |v(t)|dt$

둘이 같으려면 구간 $(0,5)$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이 되어야 해.

구간 $(0,5)$ 에서 $v(t)$의 최솟값은 $v(3)$ 이므로

$v(3)=27-54+27+k \geq 0$ 에서 $k \geq 0$,

즉 k의 최솟값은 0 이야. (참)

[자작 문항]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가

$$a(t) = 3t^2 - 18t + 24 \quad (t \geq 0)$$

이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k이다. 시각 $t=1$에서 시각 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량을 p, 점 P가 움직인 거리를 q라 하자. $|p| = q$를 만족시키는 k의 값의 범위가 $k \leq \alpha$ 또는 $k \geq \beta$일 때, $\beta - \alpha$의 값을 구하시오.

[14] (단, $\alpha < \beta$이고 $\beta \neq 0$이다.) [4점]

015 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5=5$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0) \end{cases}$$
이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

요즘 어려운 수열 문제가 자주 등장하는데, 이 문제도 그런 문제야

복잡하지만 풀어낼 수 있어야 하니 천천히 설명을 읽으며 따라와 주고, 유사문항도 꼭 풀어 보기를 바라!

주어진 식을 보면 직전 항의 부호에 따라 다음 항의 값이 정해져.

$a_5=5$ 임을 알려줬으니 $a_6, a_7, \cdots$ 항은 이미 정해져 있는 항이겠지?

구하는 것이 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최대, 최소의 차이니, $a_6 \sim a_{100}$ 항은 구할 필요가 없어.

이제 a_5를 기준으로 $a_1 \sim a_4$의 값을 구해야 하는데, 모든 경우를 다 계산하기에는 너무 많지 ㅠ.ㅠ

그래서 이 문제에서 준 힌트인 "부호"로 접근해 볼 거야.

$a_n<0$ 인 경우, $a_{n+1}=-2a_n+3$ 인데, 이건 무조건 양수지?

즉 음수인 항 뒤에는 음수인 항이 올 수 없다는 거야.

$a_n \geq 0$ 인 경우, $a_{n+1}=a_n-6$ 이니, 이 경우엔 양수 → 음수 / 양수 → 양수 모두 가능하겠지.

그럼 이 아이디어로 문제를 한번 풀어볼게!

아무래도 최대가 되려면 모두 양수인 경우가 가장 가능성이 높지 않을까?

그 경우는 계산해 보면,

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
29	23	17	11	5

이렇게 돼.

최소인 경우는 음수를 최대한 많이 껴서, + − + − + 이 상황일 가능성이 높겠지?

이 경우엔 계산해 보면,

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
5	−1	5	−1	5

이렇게 돼.

실제로 이게 정답이야! $a_1 \sim a_5$ 합 최대: 85, 최소: 13 → 72.

이 풀이가 비약은 많지만, 시험장에서 시간이 없을 때 할 수 있는 최선이라고 생각해.

불안해서 다른 경우를 시도해 본 학생들도 아마 최대 경우는 당연하다고 생각했을 것이고,

최소인 경우도 $a_4 \geq 0$ 인 경우 $a_4=11$ 이 되는 걸 보고 빠르게 접었을 거야.

복습할 때 경우에 따라 a_4, a_3 정도만 구해 보고, 다른 경우가 불가능하다는 것을 꼭 느껴 봐!

[2020년 시행 9월 모평 나형 21번]

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 = 2$, $a_6 = 19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점] 15)

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ 0　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

016 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 7$, $a_2 + a_5 = 16$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

등차수열의 일반항 문제야.

$\boxed{\text{첫째항을 } a_1\text{, 공차를 } d\text{라 하면 } a_n = a_1 + (n-1)d}$

등차수열 문제가 나오면, 첫째항과 공차를 찾아봐야겠지.

$a_3 = 7 \rightarrow a_1 + 2d = 7$

$a_2 + a_5 = 16 \rightarrow 2a_1 + 5d = 16$

$\rightsquigarrow a_1 = 3,\ d = 2.$

$a_{10} = 3 + 9d = 21.$

+참고)

$a_2 + a_5 = a_3 + a_4$ 임을 이용하면

$a_4 = 9$ 에서 $d = 2$ 임을 더 쉽게 찾을 수 있어!

[2020년 시행 대수능 나형 2번]

첫째항이 $\frac{1}{8}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_3}{a_2}=2$일 때, a_5의 값은? [2점][16]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

017 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$, $f'(1)=4$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=(x+1)f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

함수의 곱의 미분법에 대한 문제야.

$$\boxed{f(x)g(x) \xrightarrow{\text{미분}} f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

$g(x)=(x+1)f(x) \rightarrow g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$

$g'(1)=f(1)+2f'(1)$

$=2+2\cdot4=10$

[2020년 시행 3월 학평 가형 22번]

함수 $f(x)=(2x+3)(x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점] 17)

018 두 양수 x, y가

$$\log_2(x+2y)=3,\ \log_2 x+\log_2 y=1$$

을 만족시킬 때, x^2+4y^2의 값을 구하시오. [3점]

로그의 연산 성질을 활용하는 문제야.

$$\boxed{\begin{aligned} \log_a b+\log_a c &= \log_a bc \\ \log_a b-\log_a c &= \log_a \frac{b}{c} \end{aligned}}$$

$\log_2(x+2y)=3 \rightarrow x+2y=2^3=8$

$\log_2 x+\log_2 y=1 \rightarrow \log_2 xy=1 \rightarrow xy=2$

$x^2+4y^2=(x+2y)^2-4xy=8^2-4\cdot 2=56$

[2019년 시행 7월 학평 나형 12번]

1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_a \frac{a^3}{b^2} = 2$$

가 성립할 때, $\log_a b + 3\log_b a$의 값은? [3점] 18)

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

019 실수 k 에 대하여 함수 $f(x)=x^4+kx+10$ 이 $x=1$ 에서 극값을 가질 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

함수의 극값에 관한 문제야.

함수가 $x=a$ 에서 극값을 가지려면 도함수가 $x=a$ 에서 부호변화가 있어야 해.

즉 함수 $f(x)$가 $x=1$ 에서 극값을 가진다고 했으니, $f'(1)=0$ 이 되겠지.

✿ $f'(a)=0$ 이라고 해서 함수 $f(x)$가 $x=a$ 에서 극값을 반드시 가지는 것은 아니니 조심해!

$x=a$ 에서 함수 $f(x)$가 극값을 가진다 $\underset{\text{아닐때도 있음}}{\overset{\text{항상 O}}{\rightleftharpoons}}$ $f'(a)=0$

$f'(x)=4x^3+k \rightarrow f'(1)=4+k=0 \rightarrow k=-4$

$f(1)=1+k+10=7$

[2020년 시행 7월 학평 나형 8번]

함수 $f(x)=x^3+6x^2+9x+a$ 의 극솟값이 -6 일 때, 상수 a 의 값은? [3점] 19)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

020 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 + a_5 = 0, \quad \sum_{k=1}^{6} (|a_k| + a_k) = 30$$

일 때, a_9 의 값을 구하시오. [4점]

등차수열의 기본성질을 활용하는 문제야.

> 첫째항이 a_1, 공차가 d 인 등차수열 a_n에 대해
>
> 등차수열의 일반항 : $a_n = a_1 + (n-1)d$
>
> 등차중항 : $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$

$a_3 + a_5 = 0 \rightarrow a_4 = 0$ (등차중항)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$-3d$	$-2d$	$-d$	0	d	$2d$

$|a_k| + a_k$ 는 $a_k > 0$ 인 경우에 $2a_k$,

$a_k < 0$ 인 경우에 0 이 되겠지?

따라서 $d > 0$ 인 경우와 $d < 0$ 인 경우로 나누어 생각해야 해.

i) $d < 0$

$\rightsquigarrow$ $k = 5, 6$ 인 경우 $|a_k| + a_k = 0$

$\sum_{k=1}^{6} (|a_k| + a_k) = 2 \times 6d = 30.$

$d = \frac{5}{2}$ (공차가 정수라는 조건에 맞지 않아)

ii) $d > 0$

$\rightsquigarrow$ $k = 1, 2, 3$ 인 경우 $|a_k| + a_k = 0$

$\sum_{k=1}^{6} (|a_k| + a_k) = 2 \times 3d = 30.$

$d = 5$

$\therefore a_9 = 5d = 25$

[2020년 시행 10월 학평 나형 14번]

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 5$ 이고 $\sum_{k=3}^{7} |2a_k - 10| = 20$ 이다. a_6 의 값은? [4점][20)]

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

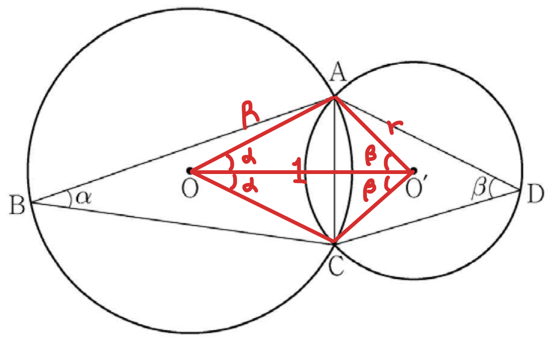
021 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′ 이라 하고

$\angle \mathrm{ABC} = \alpha$, $\angle \mathrm{ADC} = \beta$ 라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{3}{2},\quad \cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3},\quad \overline{\mathrm{OO'}} = 1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



사인법칙과 코사인법칙을 활용하는 문제야.

* 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

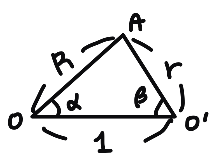
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

* 코사인법칙

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

문제의 조건을 그림에 나타내어 보면 위의 빨간색과 같아. (R, r 은 각각 외접원의 반지름 길이)

i) 코사인 법칙



$$R^2 + r^2 - 2Rr\cos\{\pi - (\alpha+\beta)\} = 1.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3} \rightarrow \cos\{\pi - (\alpha+\beta)\} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ R^2 + r^2 + \frac{2}{3}Rr = 1.$$

ii) 사인법칙

공통변인 $\overline{AC} = l$ 로 두면

$$\frac{l}{\sin\alpha} = 2R,\quad \frac{l}{\sin\beta} = 2r$$

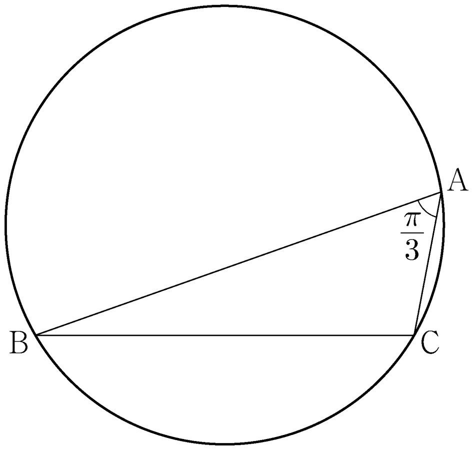
$$\frac{\frac{l}{\sin\alpha}}{\frac{l}{\sin\beta}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{2R}{2r} = \frac{3}{2},\quad 2R = 3r \rightarrow r = \frac{2}{3}R$$

이 두 식을 연립하면

$R^2 = \frac{9}{17}$ 임을 알 수 있어.

[2020년 시행 대수능 나형 28번]

$\angle A = \frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3:1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점][21]



022 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

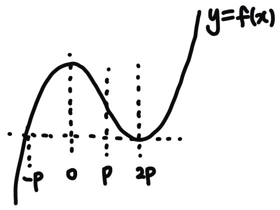
가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
> (나) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

삼차함수의 개형과 절댓값을 씌운 상태에서의 최댓값을 꼼꼼하게 판단해야 하는 고난도 문제야.

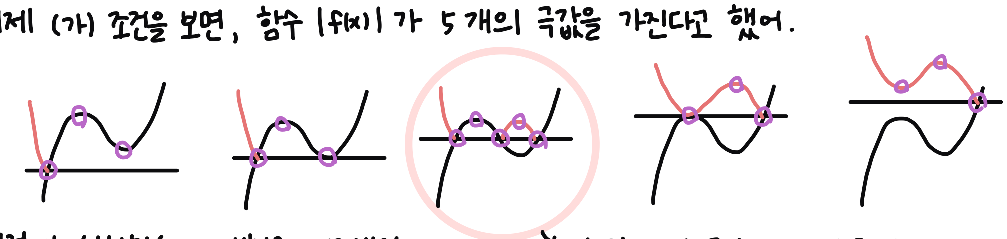
$f(x)=x^3-3px^2+q \rightarrow f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$ 에서

p는 자연수이므로 함수 f(x)의 개형이 대략 정해져.



↪ 이런 식의 그래프겠지?

이제 (가) 조건을 보면, 함수 |f(x)|가 5개의 극값을 가진다고 했어.



이렇게 삼차함수의 개형을 따져보면, ↘ 이 경우에만 극값이 5개 존재할 수 있지?

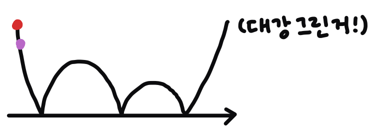
즉 함수 f(x)의 두 극값의 부호가 달라야 하므로, $f(0)f(2p)<0$ 이라고 할 수 있어.

$f(0)=q$인데 q는 자연수이므로, $f(2p)<0$, 즉 $\boxed{-4p^3+q<0}$ 을 만족해야겠지!

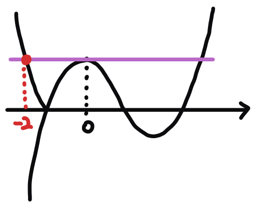
(나) 조건의 해석이 이 문제의 핵심이야.

$[-1,\ 1]$에서 $|f(x)|$의 최댓값과 $[-2,\ 2]$에서 $|f(x)|$의 최댓값이 같으려면,

f(0)의 값을 최댓값으로 가지게 돼. 그 이유는,



만약 $|f(-1)|$의 값이 $[-1,\ 1]$에서의 최댓값이라면,
$|f(-2)|$의 값은 무조건 그 값보다는 크기 때문이야.



그렇다면 $|f(-2)|$ 의 값이 $f(0)$의 값보다 무조건 같거나 작아야겠지?

$(-f(-2) \le f(0))$

즉, $8+12p-q \le q \rightsquigarrow \boxed{4+6p \le q}$ 라는 조건을 얻을 수 있어!

아까 구한 조건과 같이 나타내 보면 $4+6p \le q < 4p^3$ 이 되겠지.

이제 만족하는 순서쌍의 개수만 구해주면 돼. p, q는 25 이하의 자연수라는 점 명심!

$p=1 \rightarrow 10 \le q < 4$ (X)

$p=2 \rightarrow 16 \le q < 32$: 16~25, 10개

$p=3 \rightarrow 22 \le q < 108$: 22~25, 4개

$p=4 \rightarrow 28 \le \cdots$ 여기서부턴 q가 25 이하인 경우가 나오지 않아.

따라서 만족하는 순서쌍의 개수는 $10+4=14$개야.

복잡한 문제이지만, 꼭 꼼꼼하게 복습해 봤으면 좋겠어! 파이팅~~

[2018년 시행 10월 학평 나형 20번]

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=x(x-2)(x-a)$ (단, a는 실수)
(나) 방정식 $\lvert f(x)\rvert = f(0)$은 실근을 갖지 않는다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점][22]

〈 보 기 〉

ㄱ. $a=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $0<a<2$이고 $f(a)>0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

ㄷ. 함수 $\lvert f(x)-f(2)\rvert$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않으면 $k<0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

선택과목

확률과 통계

*선택과목은 3월 모의고사 범위에 해당하는 문항만 수록되어 있습니다.

027 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f : X \to X$의 개수는? [3점]

(가) $f(1)+f(2)+f(3) \geq 3f(4)$
(나) $k=1,\ 2,\ 3$일 때 $f(k) \neq f(4)$이다.

① 41 ② 45 ③ 49 ④ 53 ⑤ 57

특정 경우의 수를 구하는 대부분의 상황에서 분류라는 과정을 거치게 돼.

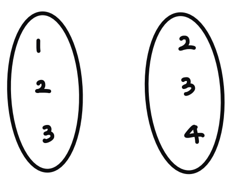
분류를 할 때에 조심해야 할 것이 있어!

1. 겹치지 않게
2. 빠짐없이
3. 분류 기준 : 가장 조건이 복잡하고 특이한 것

(가), (나) 조건을 보면 f(4)는 f(1) ~ f(3)과 조건이 조금씩 다르지?

그래서 f(4)를 기준으로 분류하면 돼.

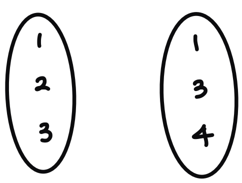
i) $f(4)=1 \to f(1)+f(2)+f(3) \geq 3$



이 경우 f(1), f(2), f(3)은 2, 3, 4 모두 가질 수 있어.

$\therefore$ 경우의 수 $= 3^3 = 27$

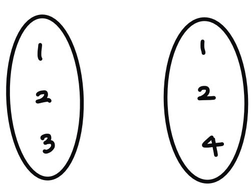
ii) $f(4)=2 \to f(1)+f(2)+f(3) \geq 6$



함숫값이 (1, 1, 1) / (1, 1, 3) 인 경우 합이 6보다 작으니 제외해야 해.
경우의수 1　　경우의수 $\frac{3!}{2!}=3$

$\therefore$ 경우의 수 $= 3^3 - 4 = 23$

iii) $f(4)=3 \to f(1)+f(2)+f(3) \geq 9$



함숫값이 (4, 4, 4) / (4, 4, 2) / (4, 4, 1) 인 경우에만 가능해.
경우의수 1　　경우의수 $\frac{3!}{2!}=3$　　경우의수 $\frac{3!}{2!}=3$

$\therefore$ 경우의수 $1+3+3=7$

iv) $f(4)=4 \to f(1)+f(2)+f(3) \geq 12$ → 만족하는 경우가 없음

$\therefore 27+23+7=57$

[2018년 시행 4월 학평 가형 29번]

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$로의 함수 중에서

$$f(1)+f(2)+f(3)-f(4)=3m \ (m\text{은 정수})$$

를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점] 23)

029 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a+b+c+d=12$
> (나) $a \neq 2$ 이고 $a+b+c \neq 10$ 이다.

(가) 조건을 보고 중복조합이 떠올랐으면 아주 좋아!

이런 등식이 일반적으로 중복조합과 연결되기 때문이지. (항상 그런 것은 아니니 조심해야 해!)

(나) 조건을 보고 여사건을 떠올렸다면 좋은 방향이야!

일반적으로 ~~ ≠ ~ 인 식보다는 ~~ = __ 인 식으로 문제를 풀어가는 것이 편하기 때문이야.

이것도 항상 그런 것은 아니니 조심해 줘!

이제 문제를 풀어 볼게.

(나) 조건의 $a \neq 2$: A, $a+b+c \neq 10$: B 라 해 보면,

구하는 것은 $n(A \cap B)$ 이지. 이는 $n(S) - n(A^c \cup B^c)$ 와 같아.

즉 $n(A^c) + n(B^c) - n(A^c \cap B^c)$ 를 구해보면 되겠지.

A^c : $a=2$, B^c : $d=2$ 인 경우이므로

$n(A^c) \rightsquigarrow b+c+d=10$, ${}_3H_{10}$

$n(B^c) \rightsquigarrow a+b+c=10$, ${}_3H_{10}$

$n(A^c \cap B^c) \rightsquigarrow b+c=8$, ${}_2H_8$

$\therefore {}_3H_{10} + {}_3H_{10} - {}_2H_8 = 123$

전체 경우 $= {}_4H_{12} = 455$

$\therefore 455 - 123 = 332$

[2020년 시행 10월 학평 나형 27번]

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오. [4점] 24)

(가) $a+b+c=14$
(나) $(a-2)(b-2)(c-2) \neq 0$

선택과목

미적분

*선택과목은 3월 모의고사 범위에 해당하는 문항만 수록되어 있습니다.

024 정수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n = \left(\frac{|k|}{3} - 2\right)^n$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 k의 개수는? [3점]

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

등비수열의 수렴 조건에 대해 알고 있다면 쉽게 풀 수 있는 문제야!

* 등비수열의 수렴 조건

등비수열 $a_n = ar^{n-1}$ 이 수렴하기 위한 조건

i) $a=0$ 또는,

ii) $-1 < r \le 1$

⊕ 등비수열 $a_n = ar^{n-1}$ 의 합 S_n이 수렴하기 위한 조건

i) $a=0$ 또는,

ii) $-1 < r < 1$

이 문제에서 수열 a_n의 첫째항은 $\left(\frac{|k|}{3}-2\right)$, 공비도 $\left(\frac{|k|}{3}-2\right)$ 이므로

이 수열이 수렴하기 위해서는 $-1 < \frac{|k|}{3} - 2 \le 1$ 을 만족하면 돼.

$-1 < \frac{|k|}{3} - 2 \le 1 \rightsquigarrow 1 < \frac{|k|}{3} \le 3 \rightsquigarrow 3 < |k| \le 9 \rightsquigarrow |k| = 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$\therefore$ 총 $6 \times 2 = 12$개

[2020년 시행 4월 학평 가형 8번]

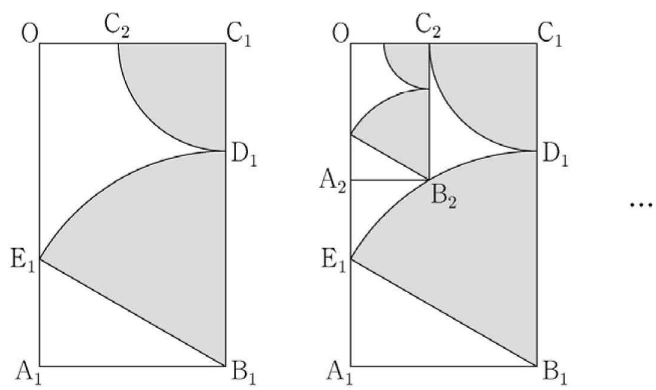
수열 $\left\{\dfrac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는? [3점] 25)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

026 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA_1}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OC_1}}=1$ 인 직사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ 이 있다. 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 $\overline{\mathrm{B_1D_1}}=2\overline{\mathrm{C_1D_1}}$ 인 점 $\mathrm{D_1}$ 에 대하여 중심이 $\mathrm{B_1}$ 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{B_1D_1}}$ 인 원과 선분 $\mathrm{OA_1}$ 의 교점을 $\mathrm{E_1}$, 중심이 $\mathrm{C_1}$ 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{C_1D_1}}$ 인 원과 선분 $\mathrm{OC_1}$ 의 교점을 $\mathrm{C_2}$ 라 하자. 부채꼴 $\mathrm{B_1D_1E_1}$ 의 내부와 부채꼴 $\mathrm{C_1C_2D_1}$ 의 내부로 이루어진 ◁ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 $\mathrm{OA_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 호 $\mathrm{D_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$와 점 $\mathrm{C_2}$, 점 O를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$ 에 ◁ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [3점]



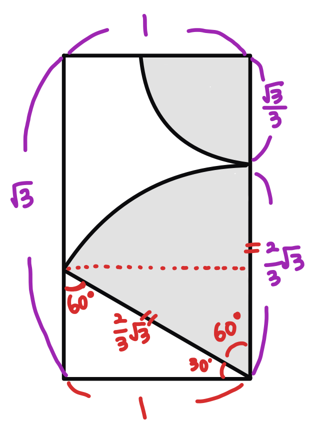
R_1 R_2 …

① $\frac{5+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{6}\pi$ ③ $\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ④ $\frac{1+\sqrt{3}}{6}\pi$ ⑤ $\frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

도형에서 등비급수를 활용하는 프랙탈 문제야!

이런 문제를 풀 때는 ① 첫째항, ②공비 를 잘 파악하면 돼~

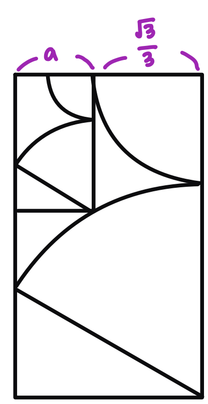
① 첫째항 구하기



$S_1=\frac{1}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\pi+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\frac{\pi}{3}$

$=\frac{11}{36}\pi$

② 공비 구하기



$a=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

길이비 $1:\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

넓이비 $1^2:\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$\therefore$ 공비 $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ 구하는 값 $=\dfrac{\frac{11}{36}\pi}{1-\left(\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}=\dfrac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

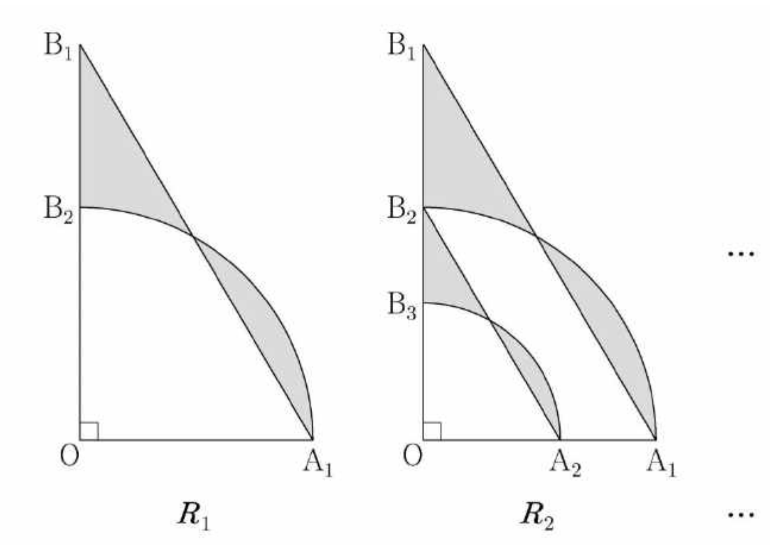
[2018년 시행 대수능 나형 16번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA_1}}=4$, $\overline{\mathrm{OB_1}}=4\sqrt{3}$ 인 직각삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA_1}}$ 인 원이 선분 $\mathrm{OB_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_2}$의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{OA_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA_2}}$ 인 원이 선분 $\mathrm{OB_2}$와 만나는 점을 $\mathrm{B_3}$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA_2B_2}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{OA_2B_3}$의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[26][4점]



① $\frac{3}{2}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ $\frac{11}{6}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{13}{6}\pi$

선택과목

기하

*선택과목은 3월 모의고사 범위에 해당하는 문항만 수록되어 있습니다.

026 좌표평면에서 타원 $x^2+3y^2=19$와 직선 l은 제1사분면 위의 한 점에서 접하고, 원점과 직선 l 사이의 거리는 $\frac{19}{5}$이다. 직선 l의 기울기는? [3점]

① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{5}{6}$　③ -1　④ $-\frac{7}{6}$　⑤ $-\frac{4}{3}$

타원의 접선 관련 문제야!

* 이차곡선의 접선 공식

이차곡선 위의 점 (α, β)에서의 접선의 방정식

i) 포물선 $y^2=4px \rightarrow \beta y=2p(x+\alpha)$

ii) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y=1$

iii) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{\alpha}{a^2}x-\frac{\beta}{b^2}y=1$

접선의 기울기가 m일 때 접선의 방정식

i) 포물선 $y^2=4px \rightarrow y=mx+\frac{p}{m}$

ii) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

iii) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (단, $a^2m^2-b^2>0$)

이제 문제를 풀어 볼게~!

접점을 (α, β)라 두면 이 점은 타원 위의 점이기 때문에

① $\alpha^2+3\beta^2=19$ 임을 알 수 있어.

접선의 방정식은 $\alpha x+3\beta y=19$ 이고 이 직선과 원점 사이의 거리가 $\frac{19}{5}$이기 때문에

$\frac{19}{\sqrt{\alpha^2+9\beta^2}}=\frac{19}{5}$, 즉 ② $\alpha^2+9\beta^2=25$ 임을 구할 수 있지.

①, ② 두 식을 연립하면 $\alpha^2=16 \rightarrow \alpha=4$, $\beta^2=1 \rightarrow \beta=1$ $(\alpha>0, \beta>0)$ 이고

$4x+3y=19$ 에서 접선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 야.

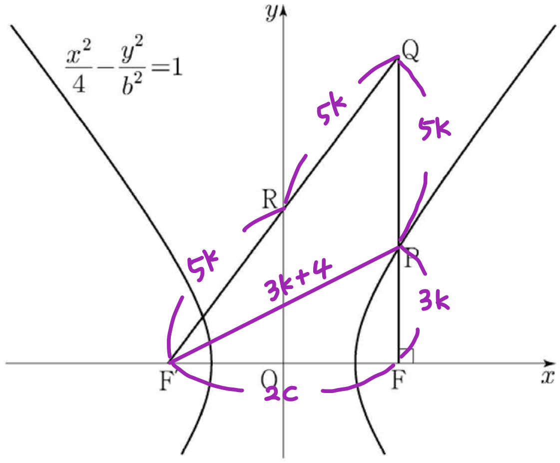
이차곡선의 접선 공식은 꼭 확실하게 복습해 둬!

[2019년 시행 10월 학평 가형 25번]

점 $\mathrm{A}(6,\ 4)$ 에서 타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, C 라 할 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 구하시오. [3점] 27)

027 그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 이 있다. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 직선 PF 위에 $\overline{\mathrm{QP}}:\overline{\mathrm{PF}}=5:3$ 이 되도록 점 Q를 잡는다.
직선 F$'$Q가 y축과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QR}}$ 이다. b^2 의 값은?
(단, b는 상수이고, 점 Q는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]

차 2×2 = 4



① $\frac{1}{2}+2\sqrt{5}$ ② $1+2\sqrt{5}$ ③ $\frac{3}{2}+2\sqrt{5}$ ④ $2+2\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}+2\sqrt{5}$

쌍곡선의 정의를 활용하는 문제야.

이차곡선 문제에서는 정의와 대칭성을 잊지 않고 써먹는 것이 가장 중요해!

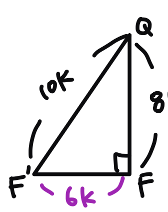
* 이차곡선의 정의

i) 포물선 : 초점까지의 거리 = 준선까지의 거리

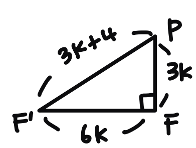
ii) 타원 : 두 초점까지 거리의 합이 일정

iii) 쌍곡선 : 두 초점까지 거리의 차가 일정

쌍곡선의 정의와 문제에서 주어진 조건을 그림에 표시해 봤어. (위에 보라색!)



→ $6k=2c$, $c=3k$



피타고라스 정리에 의해

$3\sqrt{5}k=3k+4 \rightarrow k=\frac{4}{3\sqrt{5}-3}=\frac{\sqrt{5}+1}{3}$

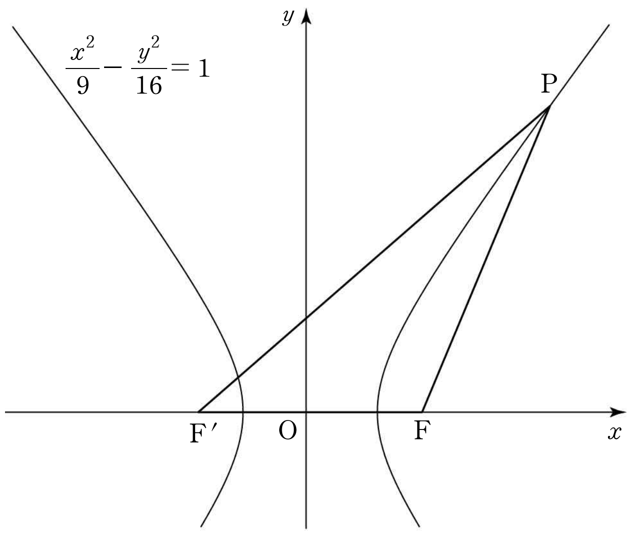
$\rightarrow c=\sqrt{5}+1$

$\sqrt{4+b^2}=c \rightarrow 4+b^2=5+2\sqrt{5}+1$

$\therefore b^2=2+2\sqrt{5}$

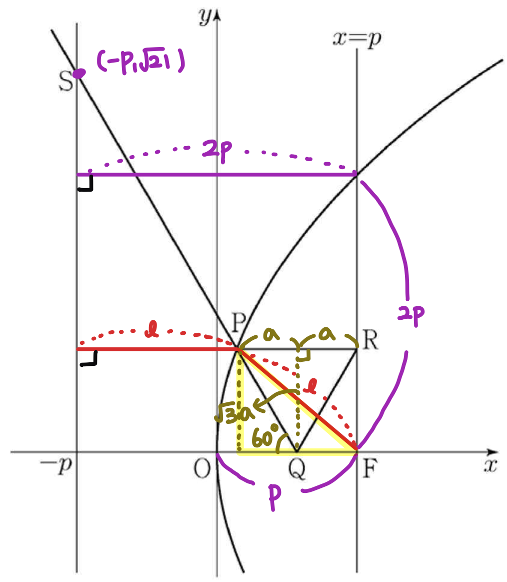
[2019년 시행 7월 학평 가형 28번]

그림과 같이 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 제1 사분면 위의 점을 P라 하자. 삼각형 PF′F에 내접하는 원의 반지름의 길이가 3일 때, 이 원의 중심을 Q라 하자. 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}^2$의 값을 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [4점] 28)



029 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O 이고 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ $(p>0)$ 인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 P, x축 위의 점 Q, 직선 $x=p$ 위의 점 R 에 대하여 삼각형 PQR 는 정삼각형이고 직선 PR 는 x축과 평행하다. 직선 PQ 가 점 $\mathrm{S}(-p,\ \sqrt{21})$ 을 지날 때, $\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{a+b\sqrt{7}}{6}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오.

(단, a 와 b 는 정수이고, 점 P 는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



이 문제도 마찬가지로 이차곡선의 정의를 활용하는 문제인데, 이번에는 포물선이야!

포물선 위의 점은 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같다는 점을 통해 그림에 표시해 둔 보라색, 빨간색 정보를 알 수 있어.

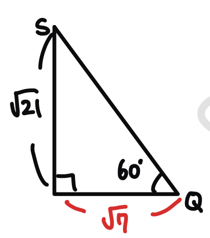
(점 P에서 초점, 준선까지의 거리는 미지수 ℓ로 설정했어!)

정삼각형의 한 변의 길이를 2a라고 두면, 올리브색..(?) 정보들을 알 수 있지.

이제 문제를 풀어볼게!

i) $2a+\ell=2p$

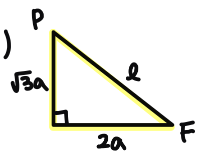
ii)



$\ell+a=\sqrt{7}$

(특수각 활용)

iii)



$\rightarrow \sqrt{7}a=\ell$

iii)을 ii)에 대입 $\rightarrow \sqrt{7}a+a=\sqrt{7}$, $a=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}=\dfrac{7-\sqrt{7}}{6}$ $\qquad\therefore 7+(-1)=6$

(풀고 보니 문제에 a가 이미 있네..ㅎㅎ 문제의 a와는 별개로 생각해줘..!)

암튼! 정보가 많아서 복잡하지만 정의를 바탕으로 정보들을 잘 정리해나가면 충분히 풀 수 있을거야~!!

[2017년 시행 9월 모평 가형 27번]

좌표평면에서 초점이 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ $(a>0)$ 이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>a)$ 인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{\mathrm{AF}}=2,\ \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}},\ \overline{\mathrm{FF}'}=\overline{\mathrm{PF}'}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$ 이다. p^2+q^2 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.) [4점][29)]