풀이 I

1711 30. 이계도함수의 활용.

[1] A. $x>a$에서 $f(x)$는 3차함수로 정의 vs B. A는 틀렸다. $f(x)$는 $\frac{g(x)}{x-a}$ 형태의 분수함수다.

if A. $g(x)=(x-a)f(x)$. ($f(x)$의 최고차항의 계수는 -1.)

(나)에서 $f(\alpha)=f(\beta)=M$ / $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극대

3차함수에 극대가 2번 나타날 수 없음. 즉 모순.

$\rightarrow$ B.

[2] 수식 정리

$$f(x)=\frac{g(x)}{x-a} \quad (x>a)$$

$$g(x)=(x-a)f(x)$$

$$g'(x)=f(x)+(x-a)f'(x).$$

Sub. $x=\alpha \rightarrow M+(\alpha-a)f'(\alpha)=g'(\alpha)$

Sub. $x=\beta \rightarrow M+(\beta-a)f'(\beta)=g'(\beta)$

$f(x)$와 $g(x)$가 실수 전체 집합에서 미분가능함

⊕ $g'(\alpha)=g'(\beta)=M$ ($f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ 임이 주어졌으므로)

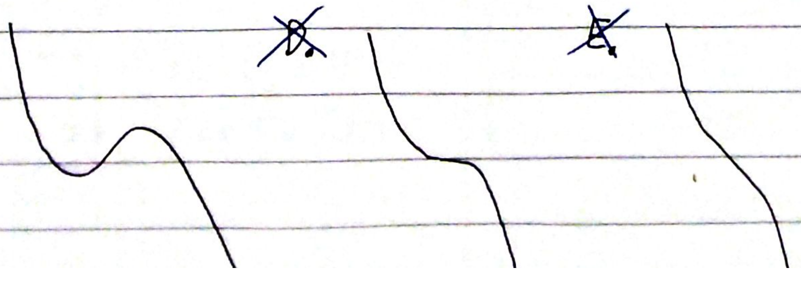
⊕ $g'(x)$는 최고차항의 계수가 -4인 3차함수

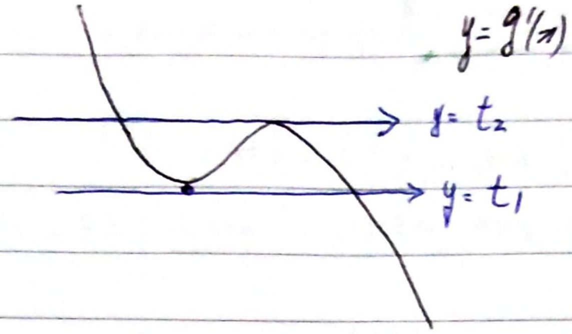
여기서 사용.

[3] 개형 추론

① $g'(x)$의 개형

C ~~D.~~ ~~E.~~





$y=g'(x)$에서 $y=t_1$, $y=t_2$는 중근을 가진다.

$g'(x)=M$의 근은 α, β가 이미 밝혀진 상태라 최소 2개 이상이다.

즉, $t_1 < M < t_2$.

그런데 $M>0$이므로 $g'(x)=0$ 만족값들 중 극값의 개수로는

3개 또는 1개만 가능하다.

(Case F) (Case G)

② $g(x)$의 극값 개수 추론 (이계도함수 활용을 통한 엄밀한 풀이)

Case F를 살피면 (다)에 의해

$y=f(x)$의 극값의 개수가 4개 이상이 된다.

$$f'(x)=\frac{(x-a)g'(x)-g(x)}{(x-a)^2}.$$

let. $r(x)=(x-a)g'(x)-g(x)$.

$r'(x)=(x-a)g''(x)$,

☆ => 설령 $g''(x)$의 경우 2개의 근을 $x>a$에서 가지더라도,

$(x-a)$의 존재로 인해 근이 4개일 가능성은 없다.

즉 Case G가 유도된다.

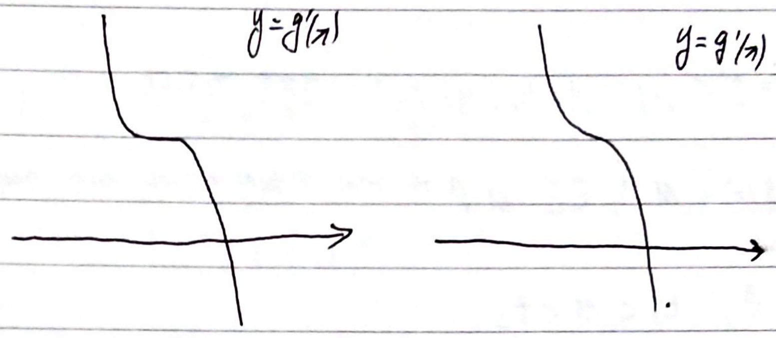
$\therefore$ $g(x)$의 극값의 개수는 1개다.

4 Case G의 그래프적 해석. (개형 추론)

Case G를 $g''(x)=0$의 근이 0개, 1개인 $\boxed{\text{Case H}}$

〃 근이 2개로 이루어진 $\boxed{\text{Case I}}$ 로 나누자.

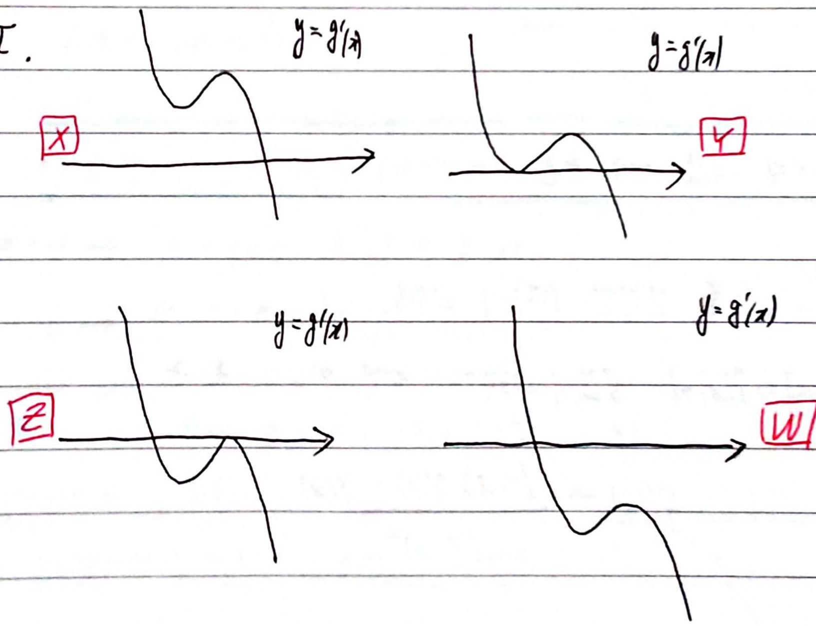
Case H.



$g'(\alpha)=g'(\beta)=m$을 만족하지 못한다.

Case I 가 옳다.

Case I.



$m>0$ 이므로 $\boxed{X}$ $\boxed{Y}$ 만 걸릴 수 있다.

5 인수 정리의 활용

→ 타 풀이들은 평균변화율이나 기울기함수 등의 이름으로 설명하지만,

평가원의 의도는 아마도 식 변환 시 인수 정리 활용이었을 것이다

물론 이 인수 정리 이외의 여러 해석법들이 존재하지만, 대부분은

이 문제 이후에 사후적으로 생성되었다. 인수 정리는 대조적으로, 항상 사용되었던 익숙한 풀이다

우리는 $g(x) = M(x-a)$의 근이 α, β이며,

$g'(\alpha) = g'(\beta) = M$임을 알고 있다.

이를 식으로 나타내면

let. $h(x) = g(x) - M(x-a)$.

$\rightarrow \begin{pmatrix} h(\alpha) = h(\beta) = 0 \\ h'(\alpha) = h'(\beta) = 0. \end{pmatrix}$ + ($g(x)$는 다항함수)

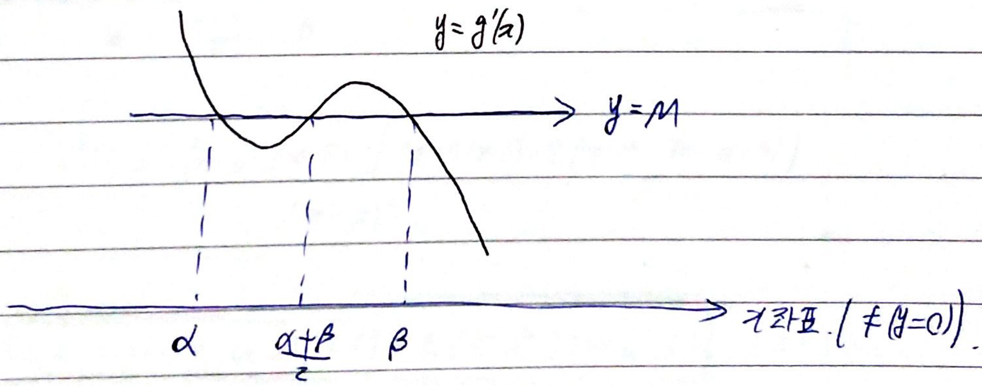
$\rightarrow$ $\therefore h(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 확정.

$$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + M(x-a)$$

$$g'(x) = -4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + M,$$

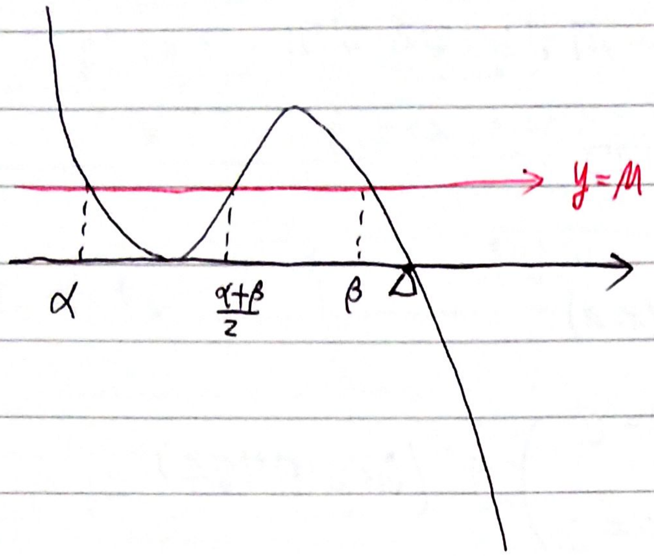
즉 $g'(x) = M$의 근은 $\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}$.

$\boxed{4}$의 $\boxed{X}$ $\boxed{Y}$ 개형만 가져오자.



⊕ $g'(x)$가 3차함수이므로 $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$에서 변곡점을 가지게 된다는 것을 추가로 알 수 있다. 3, 4차 함수의 비례와, 근과 계수의 관계, 이동 자취를 통한 넓이 공식 등을 사용해 $\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$이라는 조건을 단 한 줄로 마무리지을 수 있겠으나 이 문제에서 전체를 다루기엔 양이 방대하니 넘어가겠다.

돌아와서, ($|g'(x)|$ 극값의 개수가 1개) 일 때 M의 최솟값을 구하는 것이므로



위와 같은 $y=0$ (x축)의 위치가 타당할 것이다.

정직하게 α, β를 그대로 사용하도록 하겠다.

??? : 귀찮다.

그냥 이후로는 알아서 N.G.D. $\rightarrow \therefore 216 = M$.

(쓰다 보니 다음에 다항함수의 비례 관계와 함께 다루는 게 좋을 것 같아서...)